

СТРОИТЕЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ, ЗДАНИЯ И СООРУЖЕНИЯ

УДК 624.042.2

*ЛЯХОВИЧ ЛЕОНИД СЕМЕНОВИЧ, докт. техн. наук, профессор,
lls@tsuab.ru, lsl@sibmail.com.*

*МАЛИНОВСКИЙ АНАТОЛИЙ ПАВЛОВИЧ, канд. техн. наук, доцент,
maptgasu@yandex.ru*

*Томский государственный архитектурно-строительный университет,
634003, г. Томск, пл. Соляная, 2*

КРИТЕРИЙ МИНИМАЛЬНОЙ МАТЕРИАЛОЕМКОСТИ ПРИ УСИЛЕНИИ СТЕРЖНЕЙ ДВУТАВРОВОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ И ОГРАНИЧЕНИЯХ НА ВЕЛИЧИНУ КРИТИЧЕСКОЙ СИЛЫ ИЛИ ПЕРВОЙ СОБСТВЕННОЙ ЧАСТОТЫ

Ранее автором рассматривались критерии минимальной материалоемкости проектируемых стержней при различных ограничениях и типах поперечных сечений. В частности сформулированы такие критерии для стержней двутаврового поперечного сечения и ограничениях на величину критической силы или первой собственной частоты. В реальности часто возникает необходимость в усилении элементов сооружений. В данной статье формулируется критерий минимальной материалоемкости при усилении стержней двутаврового поперечного сечения и ограничениях на величину критической силы или первой собственной частоты.

Ключевые слова: оптимизация; системы минимальной материалоемкости; устойчивость; частота; формы потери устойчивости; формы собственных колебаний; напряжения; изгиб.

LEONID S. LYAKHOVICH, DSc, Professor,

lls@tsuab.ru

ANATOLII P. MALINOVSKII, PhD, A/Professor,

Tomsk University of Architecture and Building,

2, Solyanaya Sq., 634003, Tomsk, Russia

MINIMUM MATERIALS CONSUMPTION AT REBAR H-SHAPED SECTION STRENGTHENING AND CRITICAL LOAD AND FIRST EIGENFREQUENCY RESTRICTIONS

In previous works, the criteria of minimum material consumption were considered at different restrictions and types of cross-sections. Such criteria are determined for H-shaped section bars

and restrictions to the value of critical load and first eigenfrequency. In real situations, structural elements are needed to be reinforced. This paper presents the criterion for the minimum materials consumption at strengthening of H-shaped rebar section and restrictions to the value of critical load or first eigenfrequency.

Keywords: optimization; minimum materials consumption; stability; frequency; buckling mode; eigenfrequency mode; stress; flexure.

В работе [2] показано, что при ограничениях по устойчивости стержень двутаврового сечения (рис. 1) минимальной материалоемкости, когда не варьируются высота сечения b_1 , толщина полки δ_p и толщина стенки $\delta_{st}(x)$, а варьируется только ширина полки $b_1(x)$, является брусом равного сопротивления по отношению к приведенным напряжениям $\bar{\sigma}_{1pt}(x)$, возникающим при потере устойчивости.

Критерий минимальной материалоемкости в этом случае имеет вид

$$\bar{\sigma}_{1pt}(x) = \sqrt{\sigma_{1p}^2(x) \frac{b_1}{2 \cdot \delta_p} - \sigma_{1pt}^2(x) \left(\frac{b_1}{2 \cdot \delta_p} - 1 \right)} = \text{const}, \quad (1)$$

где $\sigma_{1p}(x)$ и $\sigma_{1pt}(x)$ соответственно нормальные напряжения в крайних волокнах двутаврового сечения и в волокнах на границе стенки и полки, возникающие при потере устойчивости.

В работе [2] также показано, что при ограничении на величину первой собственной частоты стержень двутаврового сечения (рис. 1) минимальной материалоемкости, когда не варьируются высота сечения, толщина полки и толщина стенки, а варьируется только ширина полки, является брусом равного сопротивления по отношению к приведенным напряжениям $\bar{\sigma}_{1or}(x)$, возникающим при колебаниях по соответствующей собственной форме.

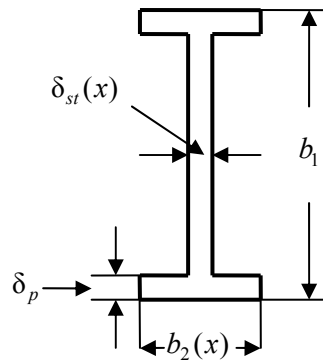


Рис. 1

Критерий минимальной материалоемкости в этом случае имеет вид

$$\bar{\sigma}_{1\omega}(x) = \sqrt{\sigma_{1\omega}^2(x) \frac{b_1}{2 \cdot \delta_p} - \sigma_{1\omega}^2(x) \left(\frac{b_1}{2 \cdot \delta_p} - 1 \right) - 3E(\omega_0)^2 v_\omega^2(x) \rho} = \text{const}, \quad (2)$$

где $\sigma_{1\omega}(x)$ и $\sigma_{1\omega}(x)$ – соответственно нормальные напряжения в крайних волокнах двутаврового сечения и в волокнах на границе стенки и полки, возникающие при колебаниях по соответствующей собственной форме; E – модуль упругости; v_ω – ординаты соответствующей формы собственных колебаний; ρ – удельная масса материала стержня.

Критерии (1) и (2) позволяют оценивать близость проектного решения при условиях, приведенных выше, к минимально материалоемкому.

При изменении условий эксплуатации возникает необходимость усиления стержней двутаврового поперечного сечения. Такое усиление может быть реализовано присоединением к полкам двутавра дополнительных листов

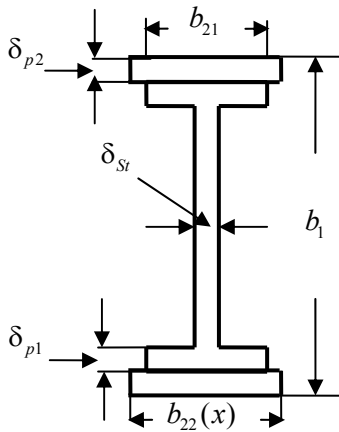


Рис. 2

(рис. 2). На рис. 2 b_{21} , δ_{p1} , δ_{st} – соответственно ширина полки, ее толщина и толщина стенки усиливаемого двутавра, толщина дополнительного листа – δ_{p2} , его ширина – $b_{22}(x)$, которая может изменяться по длине стержня, высота усиленного сечения – b_1 .

В данной статье формулируются критерии, позволяющие оценить близость решения по усилению стержня двутаврового поперечного сечения при ограничениях на величину критической силы или первой собственной частоты к минимально материалоемкому. Таким образом, критерии должны оценить оптимальность решения задачи по определению такого закона изменения ширины дополнительного листа $b_{22}(x)$, усиливающего полки

двутавра, при котором будут соблюдаться ограничения на величину критической силы или первой собственной частоты, а расход материала на усиление будет минимальным. Не варьируются высота сечения b_1 , толщины полок δ_{p1} и δ_{p2} , толщина стенки δ_{st} ($b_1 = \text{const}$, $\delta_{p1} = \text{const}$, $\delta_{p2} = \text{const}$, $\delta_{st} = \text{const}$). Варьируется ширина полки $b_2(x)$.

Функция цели (объем материала усиливающих листов) имеет вид

$$V = 2 \int_0^l \delta_{p2} b_{22}(x) dx. \quad (3)$$

Здесь l – пролет стержня. Сформулируем критерий минимальной материалоемкости при ограничении на величину критической силы. Это ограничение записывается в виде

$$P \leq P_{кр}, \quad (4)$$

где P – действующая сила, а $P_{кр}$ – критическая усиленной системы. Как известно (например, [1]), при выполнении (4) в виде равенства должно иметь место условие

$$\Theta = \frac{1}{2} \int_0^l \left[EI(x) (v_p(x)''')^2 - P_{кр} (v_p(x)')^2 \right] dx = 0. \quad (5)$$

Здесь Θ – приращение потенциальной энергии; $v_p(x)$ – ординаты формы потери устойчивости; $I(x) = \left\{ b_{22}(x) \left[b_1^3 - (b_1 - 2\delta_{p2})^3 \right] + b_{21} (b_1 - 2\delta_{p2})^3 - (b_{21} - \delta_{st}) (b_1 - 2\delta_{p1} - 2\delta_{p2})^3 \right\} \frac{1}{12}$ – момент инерции сечения относительно его горизонтальной оси симметрии.

Теперь с учетом (3) и (5) задача сводится к отысканию минимума функционала

$$\begin{aligned} V_{0,p} = \int_0^l \left\{ (2b_{22}(x)\delta_{p2} - \right. \\ \left. - \lambda_{oi} \left[\frac{E}{12} (b_{22}(x) \left[b_1^3 - (b_1 - 2\delta_{p2})^3 \right] + b_{21} (b_1 - 2\delta_{p2})^3 - \right. \right. \right. \\ \left. \left. - (b_{21} - \delta_{st}) (b_1 - 2\delta_{p1} - 2\delta_{p2})^3 \right] (v_p(x)''')^2 - P_{кр} (v_p(x)')^2 \right\} dx. \quad (6) \end{aligned}$$

Минимум функционала (6) реализуется на решении уравнения

$$\delta(V_{0,p})_{b_{22}(x)} = 2\delta_{p2} - \lambda_{p1} \left\{ \frac{E}{12} \left[b_1^3 - (b_1 - 2\delta_{p2})^3 \right] (v_p(x)''')^2 \right\} = 0$$

или $\frac{E}{12} \left[b_1^3 - (b_1 - 2\delta_p)^3 \right] (v_p''')^2 = -\frac{2\delta_p}{\lambda_{p1}}$. Учитывая, что δ_p и λ_{p1} – постоянные величины, можем записать

$$\frac{E}{12} \left[b_1^3 - (b_1 - 2\delta_p)^3 \right] (v_p''')^2 = \text{const}. \quad (7)$$

Как известно, нормальные напряжения в стержне при изгибе в волокне, отстоящем от нейтрального слоя на расстоянии y_s , определяются зависимо-

стью $\sigma = \frac{M \cdot y_s}{I}$. Учитывая, что $M = -EI \cdot v''$, запишем

$$\sigma = -E \cdot y_s \cdot v''. \quad (8)$$

После простых преобразований (7) переписется в виде

$$\frac{1}{3E} \left[\left(\frac{E \cdot b_1 \cdot v_{p(x)}'''}{2} \right) b_1 - \left(\frac{b_1 - 2\delta_{p2}}{2} E \cdot v_p(x)'' \right)^2 (b_1 - 2\delta_{p2}) \right] = \text{const}. \quad (9)$$

Заметим, что $(\frac{E \cdot b_1 \cdot v_p(x)''}{2})^2 = \sigma_{1p}^2(x)$ и $(\frac{b_1 - 2 \cdot \delta_{p2}}{2} E \cdot v_p(x)'')^2 = \sigma_{1pt}^2(x)$

соответственно квадрат нормального напряжения в крайних волокнах усиленного сечения и крайних волокнах исходного двутаврового сечения. Теперь (9)

примет вид $\sigma_{1p}^2(x) \frac{b_1}{2\delta_{p2}} - \sigma_{1pt}^2(x) (\frac{b_1}{2\delta_{p2}} - 1) = \text{const}$ или

$$\bar{\sigma}_{1pt}(x) = \sqrt{\sigma_{1p}^2(x) \frac{b_1}{2\delta_{p2}} - \sigma_{1pt}^2(x) (\frac{b_1}{2\delta_{p2}} - 1)} = \text{const.} \quad (10)$$

Таким образом, при усилении полок стержня двутаврового сечения дополнительными листами постоянной толщины и варьированием по длине стержня их шириной $b_{22}(x)$, при ограничении по устойчивости минимальная материалоемкость достигается, когда стержень становится бруском равного сопротивления по отношению к приведенным напряжениям $\bar{\sigma}_{1pt}(x)$, возникающим при потере устойчивости.

Сформулируем аналогичный критерий при ограничении на величину первой частоты собственных колебаний. Очевидно, что функция цели запишется в виде (3), а ограничение в виде

$$\omega_0 \leq \omega_1. \quad (11)$$

В (11) ω_0 – заданная величина, а ω_1 – значение первой частоты собственных колебаний усиленной системы. Как известно (например, [4]), при выполнении (11) в виде равенства должно иметь место условие

$$\begin{aligned} \exists = \int_0^l \{EI(x)(v_\omega(x)''')^2 - P(x)(v_\omega(x)''')^2 - \\ - (\omega_1)^2 [m(x) + \rho \cdot F(x)](v_\omega(x)'')^2\} dx = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

В (12) $P(x)$ – переменная по длине стержня продольная сила.

Теперь с учетом (3) и (12) задача сводится к отысканию минимума функционала

$$\begin{aligned} V_{0\omega} = \int_0^l \{ (2b_{22}(x)\delta_{p2} - \lambda_{\omega 1} [\frac{E}{12}(b_{22}(x)[b_1^3 - (b_1 - 2\delta_{p2})^3] + b_{21}(b_1 - 2\delta_{p2})^3 - \\ - (b_{21} - \delta_{st})(b_1 - 2\delta_{p1} - 2\delta_{p2})^3]) (v_\omega(x)''')^2 - P(x)(v_\omega(x)''')^2 - \\ - \omega_0^2 (m(x) + \rho(2b_{22}(x)\delta_{p2} + 2b_{21}\delta_{p1} + (b_1 - 2\delta_{p1} - 2\delta_{p2})\delta_{st})) (v_\omega(x)'')^2 \} dx. \end{aligned} \quad (13)$$

Минимум функционала (12) реализуется на решении уравнения

$$\begin{aligned} \delta(V_{0\omega})_{b_{22}(x)} = 2\delta_{p2} - \lambda_{p1} \{ \frac{E}{12} [b_1^3 - (b_1 - 2\delta_{p2})^3] (v_\omega(x)''')^2 - \omega_0^2 \rho \cdot 2\delta_{p2} v_\omega(x)'' \} = 0 \\ \text{или } \frac{E}{12} [b_1^3 - (b_1 - 2\delta_{p2})^3] (v_\omega(x)''')^2 - \omega_0^2 \rho \cdot 2\delta_{p2} v_\omega(x)'' = \text{const.} \end{aligned} \quad (14)$$

Выполнив простые преобразования с учетом (8), перепишем (14) в виде

$$\frac{1}{3E} \left[\left(\frac{Eb_1 v_\omega''}{2} \right)^2 b_1 - \left(\frac{b_1 - 2\delta_{p2}}{2} E v_\omega'' \right)^2 (b_1 - 2\delta_{p2}) \right] - \omega_0^2 \rho \cdot 2\delta_{p2} v_\omega^2 = \text{const.} \quad (15)$$

Очевидно, что $\left(\frac{Eb_1 v_\omega(x)''}{2} \right)^2 = \sigma_{1\omega}^2(x)$ и $\left(\frac{b_1 - 2\delta_{p2}}{2} E v_\omega(x)'' \right)^2 = \sigma_{1\omega r}^2(x)$ соответственно квадрат нормального напряжения в крайних волокнах усиленного сечения и крайних волокнах исходного двутаврового сечения. Теперь (15)

примет вид $\sigma_{1\omega}^2(x) \frac{b_1}{2\delta_{p2}} - \sigma_{1\omega r}^2(x) \left(\frac{b_1}{2\delta_{p2}} - 1 \right) - 3E\omega_0^2 (v_\omega(x))^2 \rho$

или $\bar{\sigma}_{1\omega r}(x) = \sqrt{\sigma_{1\omega}^2(x) \frac{b_1}{2\delta_{p2}} - \sigma_{1\omega r}^2(x) \left(\frac{b_1}{2\delta_{p2}} - 1 \right) - 3E\omega_0^2 (v_\omega(x))^2 \rho} = \text{const.} \quad (16)$

Таким образом, при усилении полок стержня двутаврового сечения дополнительными листами постоянной толщины и варьированием по длине стержня их шириной $b_{22}(x)$, при ограничении на величину первой собственной частоты минимальная материалоемкость достигается, когда стержень становится бруском равного сопротивления по отношению к приведенным напряжениям $\bar{\sigma}_{1\omega r}(x)$, возникающим при колебаниях по соответствующей собственной форме.

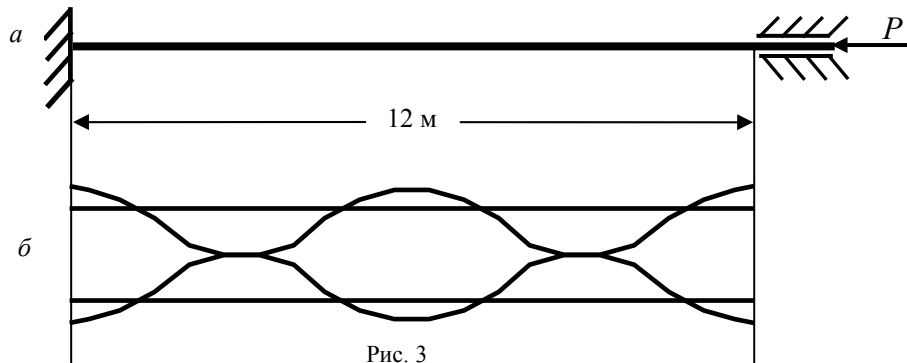


Рис. 3

Приведем примеры, иллюстрирующие сформулированные критерии.

Пример 1. Рассмотрим стержень двутаврового сечения (рис. 1). Размеры сечения $b_1 = 0,12$ м, $b_2 = 0,06$ м, $\delta_{sr} = 0,01$ м, $\delta_p = 0,01$ м. Пролет стержня $l = 12$ м, модуль упругости материала стержня $E = 206\,000$ МПа. Стержень жестко зашпелен и сжимается силой (рис. 3, а).

Расчет стержня на устойчивость и оптимизацию усиления выполнялся на основе дискретной модели из 20 участков (например, [3]). Критическая

нагрузка рассматриваемого стержня составляет 250,565 кН. Рассмотрим случай, когда необходимо усилить стержень так, чтобы его критическая нагрузка увеличилась до значения $P_{кр} = 500$ кН. Усиливаются полки двутавра дополнительными листами (см. рис. 2). Пусть толщина дополнительных листов принята $\delta_{p2} = 0,01$ м. Требуется определить закон изменения ширины дополнительных полос по длине стержня $b_{22}(x)$ таким образом, чтобы для усиленного стержня $P_{кр} = 500$ кН и при этом материалоемкость усиления была бы минимальной. Оптимизация усиления выполнена методом случайного поиска. Результаты приведены в табл. 1.

Во втором столбце приведены размеры ширины полки усиливаемого двутавра b_{21} (см. рис. 2). В столбце 3 приводятся размеры ширины полки дополнительной полосы, определенной при условии постоянства ширины и выполнения ограничения (4) в виде равенства. В столбце 4 приведены размеры ширины полки дополнительной полосы, найденные в результате оптимизации. Объем материала дополнительных полос при усилении полосами постоянной ширины составляет $0,012623$ м³, а оптимальных усиливающих полос $0,009110$ м³, что меньше на 38,56 %. На рис. 3, б показаны варианты усиления полосой постоянной ширины (столбец 3) и оптимальной (столбец 4). В пятом столбце показаны по сечениям значения приведенных напряжений (10). Так как форма потери устойчивости, а следовательно, и возникающие при этом напряжения определены с точностью до постоянного множителя, то определяется сечение, в котором $\bar{\sigma}_{1pr}(x)$ имеет наибольшую величину, и на него делятся приведенные напряжения в остальных сечениях. Таким образом, критерий (10) характеризует близость решения к оптимальному близостью величин $\bar{\sigma}_{1pr}(x)$ к единице.

Таблица 1

№ сечений	b_{21}	b_{22_0}	$b_{22}(x)$	$\bar{\sigma}_{1pr}(x)$
1	2	3	4	5
1	0,060000	0,052596	0,073258	0,9992
2	0,060000	0,052596	0,062948	0,9995
3	0,060000	0,052596	0,042281	0,9996
4	0,060000	0,052596	0,011363	0,9989
5	0,060000	0,052596	0,000041	0,4326
6	0,060000	0,052596	0,000036	0,4321
7	0,060000	0,052596	0,011322	0,9991
8	0,060000	0,052596	0,042248	0,9996
9	0,060000	0,052596	0,062826	1,0000
10	0,060000	0,052596	0,073281	0,9990
11	0,060000	0,052596	0,073281	0,9990
12	0,060000	0,052596	0,062826	1,0000
13	0,060000	0,052596	0,042248	0,9996
14	0,060000	0,052596	0,011322	0,9991
15	0,060000	0,052596	0,000036	0,4321

Окончание табл. 1

№ сечений	b_{21}	b_{22_0}	$b_{22}(x)$	$\bar{\sigma}_{1pr}(x)$
1	2	3	4	5
16	0,060000	0,052596	0,000041	0,4326
17	0,060000	0,052596	0,011363	0,9989
18	0,060000	0,052596	0,042281	0,9996
19	0,060000	0,052596	0,062948	0,9995
20	0,060000	0,052596	0,073258	0,9992

Как видно из табл. 1, во всех сечениях, кроме тех, где ширина усиливающей полосы $b_{22}(x)$ исчезающе мала (5, 6, 15 и 16), значения $\bar{\sigma}_{1pr}(x)$ близки к единице с точностью до долей процента. В сечениях 5, 6, 15 и 16 усиление не требуется. Таким образом, критерий (10) показывает высокую близость полученного решения к минимально материалоемкому.

Пример 2. Рассмотрим стержень двутаврового сечения (см. рис. 1). Размеры сечения $b_1 = 0,16$ м, $b_2 = 0,1$ м, $\delta_{st} = 0,01$ м, $\delta_p = 0,01$ м. Пролет стержня $l = 6$ м, модуль упругости материала стержня $E = 206\,000$ МПа. Стержень жестко заземлен одним краем и шарнирно оперт другим (рис. 4, а). Стержень несет равномерно распределенную внешнюю массу интенсивностью $m = 100$ кг/м. Учитывая, что расчеты выполняются на основе дискретной модели из 20 участков, приведенная к узлам масса составит 30 кг в каждом узле. Удельная масса материала стержня $\rho = 7850$ кг/м³.

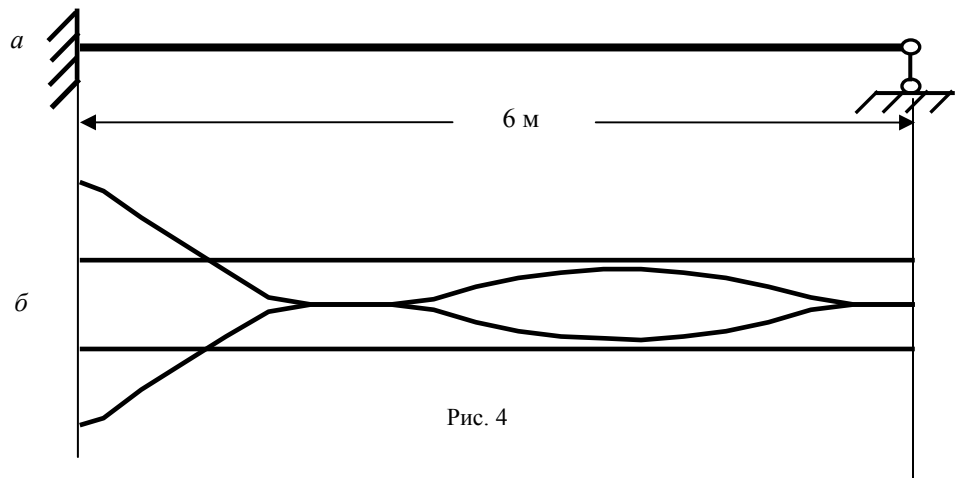


Рис. 4

Первая собственная частота рассматриваемого стержня составляет $\omega_1 = 63,53$ с⁻¹. Рассмотрим случай, когда необходимо усилить стержень так, чтобы его первая собственная частота увеличилась до значения $\omega_0 = 90$ с⁻¹. Усиливаются полки двутавра дополнительными листами (см. рис. 2). Пусть

толщина дополнительных листов принята $\delta_{p2} = 0,015$ м. Требуется определить закон изменения ширины дополнительных полос по длине стержня $b_{22}(x)$ таким образом, чтобы для усиленного стержня $\omega l = 90$ с⁻¹ и при этом материалоемкость усиления была бы минимальной. Оптимизация усиления выполнена методом случайного поиска. Результаты приведены в табл. 2.

Таблица 2

№ сечений	b_{21}	b_{22_0}	$b_{22}(x)$	$\sigma_{10r}(x)$
1	2	3	4	5
1	0,100000	0,075946	0,195604	0,9998
2	0,100000	0,075946	0,149282	0,9996
3	0,100000	0,075946	0,102917	0,9999
4	0,100000	0,075946	0,057071	0,9996
5	0,100000	0,075946	0,012356	0,9986
6	0,100000	0,075946	0,000082	0,4262
7	0,100000	0,075946	0,000057	0,3291
8	0,100000	0,075946	0,000107	0,6316
9	0,100000	0,075946	0,009622	0,9983
10	0,100000	0,075946	0,030134	1,0000
11	0,100000	0,075946	0,045269	0,9999
12	0,100000	0,075946	0,055261	0,9999
13	0,100000	0,075946	0,060344	0,9997
14	0,100000	0,075946	0,060588	0,9999
15	0,100000	0,075946	0,055991	0,9998
16	0,100000	0,075946	0,046379	0,9996
17	0,100000	0,075946	0,031576	0,9987
18	0,100000	0,075946	0,011355	0,9984
19	0,100000	0,075946	0,000146	0,7464
20	0,100000	0,075946	0,000067	0,2528

Во втором столбце приведены размеры ширины полки усиливаемого двутавра b_{21} (рис. 2). В столбце 3 приводятся размеры ширины полки дополнительной полосы, определенной при условии постоянства ширины и выполнения ограничения (11) в виде равенства. В столбце 4 приведены размеры ширины полки дополнительной полосы, найденные в результате оптимизации. Объем материала дополнительных полос при усилении полосами постоянной ширины составляет $0,006835$ м³, а оптимальных усиливающих полос $0,004159$ м³, что меньше на 64,35 %. На рис. 4, б показаны варианты усиления полосой постоянной ширины (столбец 3) и оптимальной (столбец 4). В пятом столбце показаны по сечениям значения приведенных напряжений (10). Так как форма собственных колебаний, а следовательно, и возникающие при этом напряжения определены с точностью до постоянного множителя, то определяется сечение, в котором $\sigma_{10r}(x)$ имеет наибольшую величину, и на него делаются приведенные напряжения в остальных сечениях. Таким образом, крите-

рий (16) характеризует близость решения к оптимальному близостью величин $\bar{\sigma}_{1pt}(x)$ к единице.

Как видно из табл. 2, во всех сечениях, кроме тех, где ширина усиливающей полосы $b_{22}(x)$ исчезающе мала (6, 7, 8, 19 и 20), значения $\bar{\sigma}_{1pt}(x)$ близки к единице с точностью до долей процента. В сечениях (6, 7, 8, 19 и 20) усиление не требуется. Таким образом, критерий (10) показывает высокую близость полученного решения к минимально материалоемкому.

Сформулированные в данной статье критерии (10) и (16) позволяют оценивать близость решений по усилению полок стержней двутаврового сечения дополнительными полосами при ограничениях на величину критической силы или первой собственной частоты.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Вольмир, А.С.* Устойчивость упругих систем / А.С. Вольмир. – Л. : Физматгиз, 1963. – 879 с.
2. *Ляхович, Л.С.* Особые свойства оптимальных систем и основные направления их реализации в методах расчета сооружений : монография / Л.С. Ляхович. – Томск : Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2009. – 372 с.
3. *Малиновский, А.П.* Численный метод расчета стержней на прочность, устойчивость и колебания / А.П. Малиновский // Исследования по строительным конструкциям и строительной механике. – Томск : Изд-во ТГУ, 1978. – С. 85–96.
4. *Пановко, Я.Г.* Основы прикладной теории колебаний и удара / Я.Г. Пановко. – Л. : Машиностроение, Ленинградское отделение, 1976. – 320 с.

REFERENCES

1. *Vol'mir A.S.* Ustoichivost' uprugikh sistem [Elastic system stability]. Leningrad : Fizmatgiz Publ., 1963. 879 p. (rus)
2. *Lyakhovich L.S.* Osobyie svoistva optimal'nykh sistem i osnovnye napravleniya ikh realizatsii v metodakh rascheta sooruzhenii : monografiya [Optimum system properties and main trends of their implementation in design technique. Monograph]. Tomsk : TSUAB Publ., 2009. 372 p. (rus)
3. *Malinovskii A.P.* Chislennyi metod rascheta stержnei na prochnost', ustoichivost' i kolebaniya [Numerical methods of rebar strength, stability, and oscillations]. Issledovaniya po stroitel'nyim konstruktsiyam i stroitel'noi mekhanike. Tomsk : TSUAB Publ., 1978. Pp. 85–96. (rus)
4. *Panovko Ya.G.* Osnovy prikladnoi teorii kolebanii i udara [Basics of theory of oscillations and impact]. Leningrad : Mashinostroenie, Leningradskoe otdelenie, 1976. 320 p. (rus)