

СТРОИТЕЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ, ЗДАНИЯ И СООРУЖЕНИЯ

УДК 624.04

DOI: 10.31675/1607-1859-2020-22-3-94-105

Л.С. ЛЯХОВИЧ¹, П.А. АКИМОВ^{1,2}, Б.А. ТУХФАТУЛЛИН¹,

¹Томский государственный архитектурно-строительный университет,

²Российская академия архитектуры и строительных наук

КРИТЕРИЙ ОЦЕНКИ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ПРИ ФОРМИРОВАНИИ КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫХ УЧАСТКОВ ПОЛОСЫ, УСИЛИВАЮЩЕЙ СТЕНКУ СТЕРЖНЕЙ ДВУТАВРОВОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ, ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ ПО УСТОЙЧИВОСТИ ИЛИ НА ВЕЛИЧИНУ ПЕРВОЙ ЧАСТОТЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

Ранее был сформулирован критерий минимальной материалоемкости полос, усиливающих стенки двутавра, при ограничениях на величину критической силы или первой частоты собственных колебаний и непрерывном изменении варьируемого параметра. Также известно, что такое решение позволяет оценивать реальный конструкторский проект не только по критерию его близости к минимально материалоемкому, но и использовать его как ориентир при реальном проектировании. Во многих случаях для этого используется замена непрерывного изменения варьируемого размера полос, усиливающих стенку, по её длине кусочно-постоянными участками. Границы участков выбираются на основе минимально материалоемкого проекта, а размеры ширины полос на участках определяются методами оптимизации. В статье предлагается критерий, позволяющий объективно оценивать окончание процессов такой оптимизации.

Ключевые слова: усиление; критерий; оптимизация; материалоемкость; устойчивость; частота собственных колебаний; критическая сила; формы потери устойчивости; формы собственных колебаний; напряжения; изгиб; двутавр.

Для цитирования: Ляхович Л.С., Акимов П.А., Тухфатуллин Б.А. Критерий оценки оптимальных решений при формировании кусочно-постоянных участков полосы, усиливающей стенку стержней двутаврового поперечного сечения, при ограничениях по устойчивости или на величину первой частоты собственных колебаний // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. 2020. Т. 22. № 3. С. 94–105.
DOI: 10.31675/1607-1859-2020-22-3-94-105

L.S. LYAKHOVICH¹, P.A. AKIMOV^{1,2}, B.A. TUKHFATULLIN¹,

¹Tomsk State University of Architecture and Building,

²The Russian Academy of Architecture and Construction Sciences

ASSESSMENT CRITERION FOR OPTIMUM DESIGN SOLUTIONS OF PIECEWISE CONSTANT SECTIONS IN I-RODS WITH STABILITY OR FIRST EIGEN-FREQUENCY LIMITS IN I-ROD STRENGTHENING

The criterion for the minimum material consumption of strips strengthening the I-rod with stability or first eigen-frequency limits is formulated in previous studies for the case of continuous change of the variable parameter. It is known that this solution allows evaluating a real design project not only by the criterion of its proximity to the minimum material consumption, but also by the reference point in the real design. In many cases, it is used to replace the continuous change in the variable size of the rod-strengthening piecewise constant sections. The boundaries of these sections are based on the minimum material consumption. The width of the strengthening strips is determined by the optimization methods. The paper proposes the criterion allowing to correctly assess the termination of the optimization processes.

Keywords: strengthening; criterion; optimization; consumption; sustainability; natural frequency; critical force; buckling; mode shapes; stresses; bending; I-rod.

For citation: Lyakhovich L.S., Akimov P.A., Tukhfatullin B.A. Kriterii otsenki optimal'nykh reshenii pri formirovani kusochno-postoyannykh uchastkov polosy, usilivayushchei stenu sterzhnei dvutavrovogo poperechnogo secheniya, pri ogranicheniyakh po ustoychivosti ili na velichinu pervoi chastoty sobstvennykh kolebaniy [Assessment criterion for optimum design solutions of piecewise constant sections in I-rods with stability or first eigen-frequency limits]. Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta – Journal of Construction and Architecture. 2020. V. 22. No. 3. Pp. 94–105.

DOI: 10.31675/1607-1859-2020-22-3-94-105

Многие публикации (например, [1]) посвящены критериям, позволяющим оценивать при оптимизации [2–6] близость полученных решений к минимально материалоёмким объектам. Аналогичные критерии формулируются и в задачах усиления сооружений (например, [7, 8]). Так, в работе [7] сформулирован критерий оптимального усиления полок, а в работе [8] – стенок стержней двутаврового поперечного сечения при ограничениях по устойчивости или на величину первой собственной частоты, но при непрерывном изменении параметра усиливающих полос. Известно, что в задачах оптимизации проекты, полученные при непрерывном изменении варьируемых параметров, в некоторых случаях противоречат технологическим требованиям. В таких случаях часто используется переход от непрерывного изменения варьируемых параметров к кусочно-постоянному их изменению по участкам стержня. Границы участков выбираются на основе минимально материалоёмкого проекта, а размеры ширины полос на участках определяются методами оптимизации (например, [1, 7–9]).

Сформулируем критерий для оценки окончания процесса оптимизации кусочно-постоянных размеров полос, усиливающих стенку двутавра, при ограничениях по устойчивости или на величину первой собственной частоты. Примем, как

и в работе [3], что стенка усиливается четырьмя дополнительными листами одинаковой толщины δ_{st2} (рис. 1). Введем также обозначения: b_2 – ширина полки; δ_p – толщина полки; δ_{st} – толщина стенки усиливаемого двутавра; b_1 – высота сечения при усилении полки (рис. 1, б) и без усиления (рис. 1, а). Пусть для кусочно-постоянного изменения высоты полос, усиливающих стенку, намечено n участков, в каждом из которых высота полосы не меняется.

На рис. 1, б используются следующие обозначения: δ_{p1} – толщина полки; δ_{p2} – толщина усиливающего листа; b_{21} – ширина полки; $b_{22}(x)$ – ширина усиливающего листа.

Обозначим координаты границ участков по длине стержня через $x[i] (i = 0, 1, 2, \dots, n)$, а длины участков через $l_u[i] (i = 1, 2, \dots, n)$.

Пусть не варьируются никакие параметры поперечного сечения двутавра, кроме размеров высоты дополнительных усиливающих полос $b_{12}[i]$ (рис. 1).

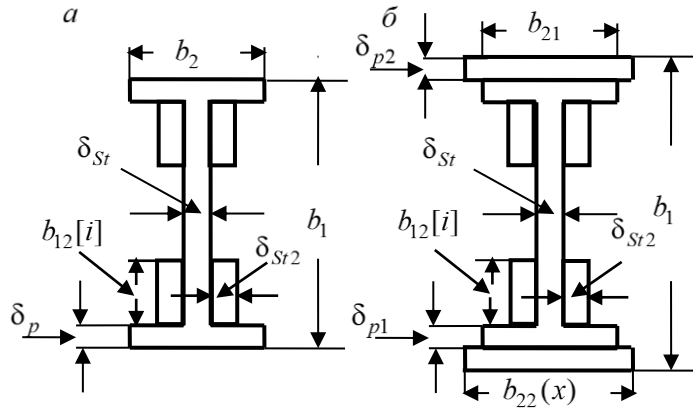


Рис. 1

Как известно (например [1]), при равенстве количества варьируемых параметров числу ограничений оптимум реализуется на ограничениях в виде равенств.

В рассматриваемой задаче варьируется один параметр – ($b_{12}[i]$). В этой связи, если рассматривается только ограничение по устойчивости, то оно имеет вид

$$P = P_{kp} \cdot \quad (1)$$

Если рассматривается только ограничение на величину первой частоты собственных колебаний, то оно записывается в виде

$$\omega_0 = \omega_1 \cdot \quad (2)$$

В (1), (2) использованы следующие обозначения: P – действующая сила; ω_1 – первая частота собственных колебаний усиленного стержня; ω_0 – заданная величина. Заметим, что величины P_{kp} в (1) и ω_1 назначаются с учетом необходимого коэффициента запаса.

Формулируемый критерий оценивает оптимальность проекта по определению таких размеров высоты дополнительных листов, усиливающих стенку двутавра, при которых будут соблюдаться ограничения на величину критической силы или первой собственной частоты, а расход материала на усиление будет минимальным.

Функция цели (объем материала усиливающих листов) имеет вид

$$V = 4 \cdot \delta_{st2} \sum_{i=1}^n b_{12}[i] l_u[i]. \quad (3)$$

Выведем выражение критерия оптимальности усиления стенки при ограничении на величину первой частоты собственных колебаний для случая поперечного сечения без усиленной полки (рис. 1, а). Возможность использования полученного критерия для сечения с усиленной полкой будет рассмотрена позже. При выводе критерия учтем, что собственная частота определяется с учетом влияния продольной силы. Функция цели записывается в виде (3), а ограничение имеет вид (2). Сформулированный при таких условиях критерий может использоваться и тогда, когда учитывается только ограничение на величину первой критической силы. В этом случае в выражении критерия полагается, что $\omega_0 = 0$.

Известно, что при выполнении ограничения (2) должно иметь место условие

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = \sum_{i=1}^n \int_{x[i-1]}^{x[i]} \{EI_1[i](v_\omega(x))''^2 - P[i](v_\omega(x))'^2 - \\ - (\omega_0)^2 [m(x) + \rho F[i](v_\omega(x))^2]\} dx = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

В выражении (4) использованы следующие обозначения: \mathcal{E} – приращение потенциальной энергии; $v_\omega(x)$ – ординаты первой формы собственных колебаний; E – модуль упругости материала;

$$\begin{aligned} I_1[i] = \left\{ b_1^3 \cdot b_2 - (b_2 - \delta_{st} - 2 \cdot \delta_{st2})(b_1 - 2 \cdot \delta_p)^3 - \right. \\ \left. - 2 \cdot \delta_{st2} [b_1 - 2 \cdot \delta_p - 2 \cdot b_{12}[i]]^3 \right\} \frac{1}{12} - \end{aligned} \quad (5)$$

момент инерции сечения относительно его главной горизонтальной оси на i -м участке стержня; $m(x)$ – интенсивность внешней массы; ρ – значение удельной массы; $F(x)$ – площадь сечения на i -м участке стержня,

$$F(x) = 2 \cdot b_2 \cdot \delta_p + (b_1 - 2 \cdot \delta_p) \delta_{st} + 4 \cdot b_{12}(x) \delta_{st2}. \quad (6)$$

Оптимальные значения размеров $b_{12}[i]$ реализуются как условия минимума выражения

$$\begin{aligned} V_{0\omega} = \delta_{st2} \sum_{i=1}^n 4 \cdot b_{12}[i] l_u[i] - \lambda_{\omega 1} \sum_{i=1}^n \int_{x[i-1]}^{x[i]} \left\{ \frac{E}{12} [b_1^3 \cdot b_2 - \right. \\ \left. - (b_1 - 2 \cdot \delta_p)^3 (b_2 - \delta_{st} - 2 \cdot \delta_{st2}) - \right. \end{aligned}$$

$$- 2 \cdot \delta_{St2} (b_1 - 2 \cdot \delta_p - 2 \cdot b_{12}[i])^3 (v_\omega(x))^2 - P(v_\omega(x))^2 - (\omega_0)^2 [m(x) + \rho(2 \cdot b_2 \cdot \delta_p + (b_1 - 2 \cdot \delta_p) \delta_{St} + 4 \cdot b_{12}[i] \delta_{St2}) (v_\omega(x))^2] dx. \quad (7)$$

В выражении (7) $\lambda_{\omega 1}$ – множитель Лагранжа при решении задачи об условном экстремуме. Выражение $V_{0\omega}$ зависит от варьируемых величин $b_{12}[i]$ и по отношению к ним рассматривается как функция, а по отношению к функции $v_\omega(x)$ как функционал.

Экстремум выражения (7) реализуется решением системы уравнений

$$\begin{aligned} \delta(V_{0\omega})_{\lambda_{\omega 1}} &= 0; \\ \frac{\partial V_{0\omega}}{\partial b_{12}[i]} &= 0 \dots (i = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (8)$$

Первое уравнение системы (8) (вариация выражения $V_{0\omega}$ (7) по $\lambda_{\omega 1}$ $\delta(V_{0\omega})_{\lambda_{\omega 1}} = 0$) приведет к условию (4).

Оптимальные значения величин $b_{12}[i]$ находятся из решения оставшихся уравнений системы (8):

$$\frac{\partial V_{0\omega}}{\partial b_{12}[i]} = 0 \dots (i = 1, 2, \dots, n). \quad (9)$$

Обоснование такого способа отыскания минимума выражений, аналогичных (4), приведено в работе [5].

Уравнение с номером i для системы (9) имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{0\omega}}{\partial b_{12}[i]} &= 4 \cdot \delta_{St2} \cdot l_u[i] - \lambda_{\omega 1} \int_{x^{i-1}}^{x^i} \{E[\delta_{St2} (b_1 - 2 \cdot \delta_p - 2 \cdot b_{12}[i])^2] (v_\omega(x))^2 - \\ &- (\omega_0)^2 \rho \cdot 4 \cdot \delta_{St2} (v_\omega(x))^2\} dx = 0. \end{aligned}$$

Поделив все слагаемые на $l_u[i]$, запишем

$$\begin{aligned} 4 \cdot \delta_{St2} \cdot -\lambda_{\omega 1} \frac{1}{l_u[i]} \int_{x^{i-1}}^{x^i} \{E[\delta_{St2} (b_1 - 2 \cdot \delta_p - 2 \cdot b_{12}[i])^2] (v_\omega(x))^2 - \\ - (\omega_0)^2 \rho \cdot 4 \cdot \delta_{St2} (v_\omega(x))^2\} dx = 0 \end{aligned}$$

и далее, после сокращения на δ_{St2} , получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{l_u[i]} \int_{x^{i-1}}^{x^i} \{E[b_1 - 2 \cdot \delta_p - 2 \cdot b_{12}[i]]^2 (v_\omega(x))^2 - \\ - (\omega_0)^2 \rho \cdot 4 \cdot v_\omega(x)^2\} dx = \frac{4}{\lambda_{\omega 1}}. \end{aligned} \quad (10)$$

Так как решается задача об условном экстремуме при условии (4), то такая задача изопараметрическая, а λ_{ω_1} – постоянная величина. Таким образом, (10) принимает вид

$$\frac{1}{l_u[i]} \int_{x^{[i-1]}}^{x^{[i]}} \{E[b_1 - 2 \cdot \delta_p - 2 \cdot b_{12}[i]]^2 (v_{\omega}(x))''^2 - 4(\omega_0)^2 \rho(v_{\omega}(x))^2\} dx = \text{const} . \quad (11)$$

Известно, что нормальные напряжения стержня при изгибе в волокне на расстоянии y_s от нейтрального слоя, выражаются формулой $\sigma = \frac{M \cdot y_s}{I}$, где $M = -EI \cdot v''$ – изгибающий момент; I – момент инерции поперечного сечения. Отсюда следует, что

$$\sigma = -E \cdot y_s \cdot v'' . \quad (12)$$

Заметим, что выражение $b_1 - 2 \cdot \delta_p - 2 \cdot b_{12}[i]$ из (11) – это удвоенное расстояние от нейтрального слоя до края усиливающей полосы. Обозначим

$$b_1 - 2 \cdot \delta_p - 2 \cdot b_{12}[i] = 2 \cdot y_s[i] . \quad (13)$$

С учётом (13) нормальное напряжение в волокне стержня на краю усиливающей полосы определяется следующим образом:

$$\sigma_{S\omega}(x) = -E \cdot y_s[i] (v(x))'' . \quad (14)$$

Умножим слагаемые выражения (11) на E и с учётом (13) перепишем (11) в виде

$$\frac{1}{l_u[i]} \int_{x^{[i-1]}}^{x^{[i]}} \{4 \cdot E^2 \cdot y_s[i]^2 (v_{\omega}(x))''^2 - 4 \cdot E(\omega_0)^2 \rho(v_{\omega}(x))^2\} dx = \text{const} ,$$

и далее с учётом (12) в виде

$$\frac{1}{l_u[i]} \int_{x^{[i-1]}}^{x^{[i]}} \{(\sigma_{S\omega}(x))^2 - E(\omega_0)^2 \rho(v_{\omega}(x))^2\} dx = \text{const} .$$

Обозначим

$$S_{St}[i] = \frac{1}{l_u[i]} \int_{x^{[i-1]}}^{x^{[i]}} \{(\sigma_{S\omega}(x))^2 - E(\omega_0)^2 \rho(v_{\omega}(x))^2\} dx = \text{const} . \quad (15)$$

Выражение (15) формулирует критерий оценки близости к оптимуму результата решения задачи по определению на каждом из участков кусочно-постоянного изменения размеров высот дополнительных полос $b_{12}[i]$, усиливающих стенку двутавра, при ограничениях на величину первой собственной частоты и при минимальном расходе материала на усиление.

Критерий (15) может использоваться и в ситуациях, когда вводится только ограничение на величину первой критической силы (1). Тогда в (15) полагается, что $\omega_0 = 0$ и критерий записывается в виде

$$S_{S_t}[i] = \frac{1}{l_u[i]} \int_{x[i-1]}^{x[i]} [(\sigma_{S_\omega}(x))^2] dx = \text{const} . \quad (16)$$

В (15) через $v_\omega(x)$ обозначены ординаты соответствующей формы собственных колебаний. В (15) и (16) через $\sigma_{S_\omega}(x)$ обозначено нормальное напряжение, возникающее при колебаниях по соответствующей собственной форме в волокне стержня на краю усиливающей полосы

Как и в [3], критерии (15) и (16) целесообразно нормировать так, чтобы наибольшее значение величины $S_{S_t}[i]$ было бы равно единице. Тогда оптимальность решения будет оцениваться близостью значений $S_{S_t}[i]$ к единице.

Вывод критериев для усиления стенок при наличии усиленных полок (рис. 1, б) приводит к выражениям (15) и (16) и поэтому в данной статье не приводится.

При оптимизации размеров $b_{12}[i]$ необходимо соблюдение ограничения высоты усиливающих листов, которое контролирует возможность их установки на стенке двутавра. Ограничение для двутавра без усиленной полки формулируется в виде

$$b_{12}[i] \leq 0,5(b_1 - 2 \cdot \delta_p), \quad (17)$$

а с усиленной полкой в виде

$$b_{12}[i] \leq 0,5(b_1 - 2 \cdot \delta_p - 2 \cdot \delta_{p2}). \quad (17a)$$

Критерии (15) и (16) применимы тогда, когда ограничения (1) или (2) выполняются в виде равенства, ограничение (17) или (17a) в виде неравенства.

Сопоставим критерии (15) и (16), оценивающие оптимальность определения размеров высоты листов, усиливающих стенку двутавра при кусочно-постоянном их изменении, с соответствующим критерием при их непрерывном изменении. Такой критерий сформулирован в [8] в двух вариантах

$$\sigma_{S_\omega}^2(x) - E(\omega_0)^2 \rho \cdot v_\omega^2 = \text{const} \quad (18)$$

$$\text{и} \quad \bar{\sigma}_{S_\omega}(x) = \sqrt{\sigma_{S_\omega}^2(x) - E(\omega_0)^2 \rho \cdot v_\omega^2} = \text{const} . \quad (18a)$$

Вариант (18a) представлен только для сравнения с ранее выведенными критериями. Использование его на некоторых этапах оптимизации может давать отрицательные величины под корнем, что вызывает сбой процесса вычислений. С учетом этого обстоятельства вариант (18a) рекомендуется не применять.

Сопоставление критерия (15) с критерием (18) показывает, что в (15) под интегралом стоит левая часть выражения (18), а перед интегралом множитель $1/l_u[i]$. Отсюда критерий (15) может быть представлен на каждом кусочно-постоянном участке как среднее значение критерия (18) на единицу длины участка.

Для иллюстрации возможностей использования критерия (15) приведем пример.

Рассмотрим прямолинейный шарнирно опертый стержень двутаврового сечения пролётом $l = 6$ м (рис. 2, а). Пусть высота сечения двутавра равна $b_1 = 0,3$ м, толщина стенки равна $\delta_{st} = 0,01$ м, толщина полки равна $\delta_p = 0,014$ м, ширина полки равна $b_2 = 0,28$ м, модуль упругости материала равен $E = 206000$ МПа. Положим, что стержень несёт распределённую массу интенсивностью $m = 200$ кг/м, удельная масса материала стержня равна $\rho = 7850$ кг/м³. Критическая сила стержня при отсутствии вибрационного воздействия составит $P_{кр} = 10000000$ Н, а первая частота собственных колебаний при отсутствии продольной силы составит $\omega_1 = 98,3953$ с⁻¹.

Если этот стержень будет сжат силой $P = 10000000$ Н, то его первая частота собственных колебаний составит $\omega = 93,3457$ с⁻¹. Требуется усилить стенку стержня двутаврового сечения (рис. 1, а) таким образом, чтобы первая частота собственных колебаний усиленного стержня с учетом влияния продольной силы составила бы $\omega_1 = 100$ с⁻¹, а расход материала на создание усиливающих полос был бы минимальным. Решение задачи проведём на основе дискретной модели из 30 участков. Распределённая масса заменяется сосредоточенными узловыми массами $m[i] = 40$ кг. Все размеры сечения стержня заданы, в том числе и толщина усиливающих полос $\delta_{st2} = 0,016$ м. Варьируется только высота $b_{12}[i]$ (рис. 1).

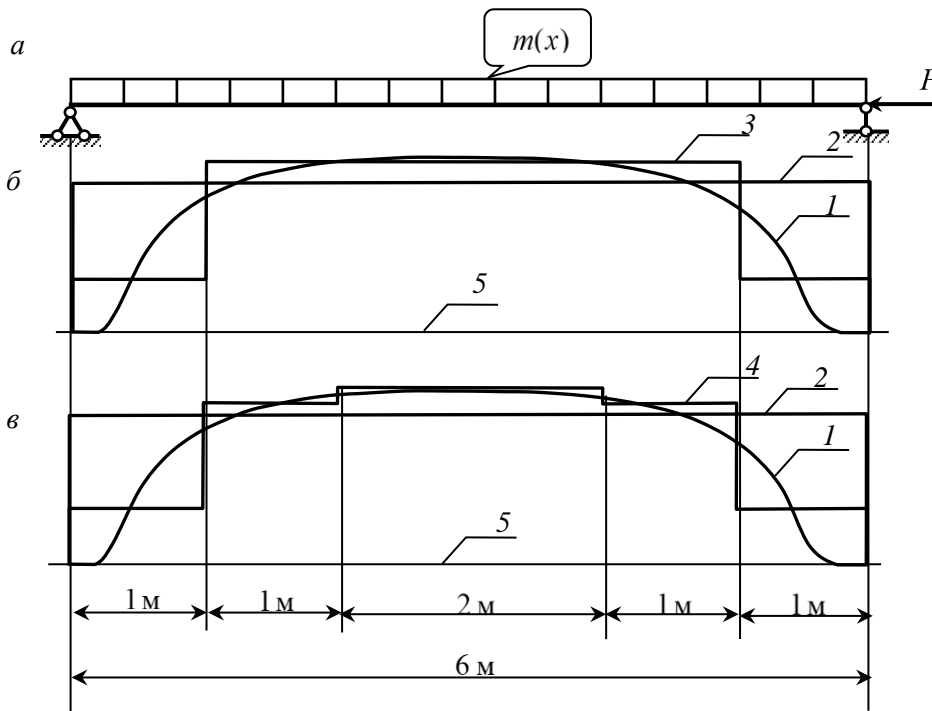


Рис. 2

Рассмотрим четыре варианта усиления.

Вариант 1 предусматривает непрерывное по сечениям изменение размеров $b_{12}[i]$. Этот вариант позволяет получить минимально материалоёмкое решение данной задачи, однако он в некоторых случаях может не соответствовать технологическим требованиям. В этой связи дополнительно рассматриваются варианты с кусочно-постоянным изменением значений $b_{12}[i]$. Выбор границ участков таких вариантов определяется, как технологическими требованиями, так и стремлением приблизиться к минимально материалоёмкому решению (варианту 1).

Вариант 2 предусматривает всего один участок, длина которого равна длине стержня.

Вариант 3 предусматривает три участка, длины которых соответственно составляют 1, 4 и 1 м.

Вариант 4 предусматривает 5 участков кусочно-постоянного изменения значений $b_{12}[i]$ длиной соответственно 1, 1, 2, 1, 1 м.

Оптимизация значений $b_{12}[i]$ во всех рассматриваемых вариантах проводилась методом случайного поиска. В качестве критерия окончания процесса оптимизации в первом варианте использовался критерий (18), а в остальных вариантах критерий (15). Результаты оптимизации приведены в таблице и показаны на рис. 2, б и в. На рисунке цифрой 5 обозначена линия соединения стенки двутавра с нижней полкой. Остальные цифры обозначают номера вариантов усиления рассматриваемых в примере и соответствуют обозначениям вариантов в таблице.

	Варианты							
	1		2		3		4	
1	2	3	4	5	6	7	8	9
№	$b_{12}[i]$	$\sigma_{s0}^2[i]$	$b_{12}[i]$	$S_{s1}[i]$	$b_{12}[i]$	$S_{s1}[i]$	$b_{12}[i]$	$S_{s1}[i]$
1	0,0003	0,2229	0,0482	1,0000	0,0173	0,9999	0,0177	0,2229
2	0,0004	0,6646	0,0482	1,0000	0,0173	0,9999	0,0177	0,6646
3	0,0063	0,9949	0,0482	1,0000	0,0173	0,9999	0,0177	0,9949
4	0,0238	0,9994	0,0482	1,0000	0,0173	0,9999	0,0177	0,9994
5	0,0348	0,9996	0,0482	1,0000	0,0173	0,9999	0,0177	0,9996
6	0,0417	0,9992	0,0482	1,0000	0,0544	1,0000	0,0512	0,9992
7	0,0462	0,9994	0,0482	1,0000	0,0544	1,0000	0,0512	0,9994
8	0,0493	1,0000	0,0482	1,0000	0,0544	1,0000	0,0512	1,0000
9	0,0514	0,9997	0,0482	1,0000	0,0544	1,0000	0,0512	0,9997
10	0,0530	1,0000	0,0482	1,0000	0,0544	1,0000	0,0512	1,0000
11	0,0541	0,9994	0,0482	1,0000	0,0544	1,0000	0,0564	0,9994
12	0,0548	0,9993	0,0482	1,0000	0,0544	1,0000	0,0564	0,9993
13	0,0554	0,9991	0,0482	1,0000	0,0544	1,0000	0,0564	0,9991

Окончание таблицы

1	Варианты							
	1		2		3		4	
№	$b_{12}[i]$	$\sigma_{s_{\text{об}}}^2[i]$	$b_{12}[i]$	$S_{s_r}[i]$	$b_{12}[i]$	$S_{s_r}[i]$	$b_{12}[i]$	$S_{s_r}[i]$
14	0,0557	0,9996	0,0482	1,0000	0,0544	1,0000	0,0564	0,9996
15	0,0559	0,9994	0,0482	1,0000	0,0544	1,0000	0,0564	0,9994
16	0,0559	0,9994	0,0482	1,0000	0,0544	1,0000	0,0564	0,9994
17	0,0557	0,9996	0,0482	1,0000	0,0544	1,0000	0,0564	0,9996
18	0,0554	0,9991	0,0482	1,0000	0,0544	1,0000	0,0564	0,9991
19	0,0548	0,9993	0,0482	1,0000	0,0544	1,0000	0,0564	0,9993
20	0,0541	0,9994	0,0482	1,0000	0,0544	1,0000	0,0564	0,9994
21	0,0530	1,0000	0,0482	1,0000	0,0544	1,0000	0,0512	1,0000
22	0,0514	0,9997	0,0482	1,0000	0,0544	1,0000	0,0512	0,9997
23	0,0493	1,0000	0,0482	1,0000	0,0544	1,0000	0,0512	1,0000
24	0,0462	0,9994	0,0482	1,0000	0,0544	1,0000	0,0512	0,9994
25	0,0417	0,9992	0,0482	1,0000	0,0544	1,0000	0,0512	0,9992
26	0,0348	0,9996	0,0482	1,0000	0,0173	0,9999	0,0177	0,9996
27	0,0238	0,9994	0,0482	1,0000	0,0173	0,9999	0,0177	0,9994
28	0,0063	0,9949	0,0482	1,0000	0,0173	0,9999	0,0177	0,9949
29	0,0004	0,6646	0,0482	1,0000	0,0173	0,9999	0,0177	0,6646
30	0,0003	0,2229	0,0482	1,0000	0,0173	0,9999	0,0177	0,2229
V_0	0,014926		0,018497		0,016146		0,016044	
%	0		23,48		8,17		7,04	

В предпоследней строке таблицы приводится объём материала усиливающих полос, а в последней строке указано превышение в процентах объёма полос соответствующего варианта по сравнению с минимально материалоемким.

В столбце 3 таблицы приводятся значения критерия (18). Во всех сечениях кроме 1, 2, 29 и 30 его величины близки к единице, что свидетельствует о возможности остановить процесс оптимизации в этом варианте. В сечениях 1, 2, 29 и 30 величины $b_{12}[i]$ малы, и продолжение процесса оптимизации для уточнения их величин не имеет смысла. В столбцах 5, 7 и 9 приводятся значения критерия (15). Следует отметить, что все его значения близки к единице, что позволило в соответствующих вариантах останавливать процесс оптимизации.

Итак, в статье сформулирован критерий, позволяющий объективно оценивать окончание процессов оптимизации при кусочно-постоянном изменении размеров полос, усиливающих стенку двутавра, при ограничениях по устойчивости или на величину первой собственной частоты. На практическом примере проведена иллюстрация сформулированного критерия и показана возможность

использовании минимально материалоемкого решения для выбора вариантов кусочно-постоянного изменения размеров полос. Рассмотрение нескольких вариантов кусочно-постоянного изменения размеров полос и их сравнение с минимально материалоемким, позволяет проектировщику выбрать из них наиболее приемлемый [10].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ляхович Л.С. Особые свойства оптимальных систем и основные направления их реализации в методах расчета сооружений. Томск : Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2009. 372 с.
2. Afzal M., Liu Y., Cheng J.C.P., Gan V.J.L. Reinforced concrete structural design optimization: A critical review // *Journal of Cleaner Production*. 2020. V. 260. Article 120623.
3. Khan W., Siraj-ul-Islam, Ullah B. Structural optimization based on meshless element free Galerkin and level set methods // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2019. V. 344. P. 144–163.
4. Martin A., Deierlein G.G. Structural topology optimization of tall buildings for dynamic seismic excitation using modal decomposition // *Engineering Structures*. 2020. V. 216. Article 110717.
5. Mayencourt P., Mueller C. Hybrid analytical and computational optimization methodology for structural shaping: Material-efficient mass timber beams // *Engineering Structures*. 2020. V. 215. Article 110532.
6. Zhang R., Phillips B.M., Fernández-Caban P.L., Masters F.J. Cyber-physical structural optimization using real-time hybrid simulation // *Engineering Structures*. 2019. V. 195. P. 113–124.
7. Ляхович Л.С., Малиновский А.П. Критерий минимальной материалоемкости при усилении стержней двутаврового поперечного сечения и ограничениях на величину критической силы или первой собственной частоты // *Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета*. 2015. № 5. С. 41–50.
8. Ляхович Л.С., Малиновский А.П., Тухфатуллин Б.А. Критерии оптимального усиления стенки стержней двутаврового поперечного сечения при ограничениях по устойчивости или на величину первой собственной частоты // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2016. V. 12. I. 2. С. 118–125.
9. Ляхович Л.С., Перельмутер А.В. Некоторые вопросы оптимального проектирования строительных конструкций // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2014. V. 10. I. 2. P. 14–23.
10. Ляхович Л.С., Акимов П.А., Тухфатуллин Б.А. О задачах поиска минимума и максимума в строительной механике // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2017. T. 13. № 2. С. 103–124.

REFERENCES

1. Lyakhovich L.S. Osobyie svoistva optimal'nykh sistem i osnovnye napravleniya ikh realizatsii v metodakh rascheta sooruzhenii [Specific properties of optimum systems using methods of structural analysis]. Tomsk: TSUAB, 2009. 372 p. (rus).
2. Afzal M., Liu Y., Cheng J.C.P., Gan V.J.L. Reinforced concrete structural design optimization: A critical review. *Journal of Cleaner Production*. 2020. V. 260. Article 120623.
3. Khan W., Siraj-ul-Islam, Ullah B. Structural optimization based on meshless element free Galerkin and level set methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2019. V. 344. Pp. 144–163.
4. Martin A., Deierlein G.G. Structural topology optimization of tall buildings for dynamic seismic excitation using modal decomposition. *Engineering Structures*. 2020. V. 216. Article 110717.
5. Mayencourt P., Mueller C. Hybrid analytical and computational optimization methodology for structural shaping: Material-efficient mass timber beams. *Engineering Structures*. 2020. V. 215. Article 110532.
6. Zhang R., Phillips B.M., Fernández-Caban P.L., Masters F.J. Cyber-physical structural optimization using real-time hybrid simulation. *Engineering Structures*. 2019. V. 195. Pp. 113–124.

7. Lyakhovich L.S., Malinovskii A.P. Kriterii minimal'noi materialoemkosti pri usilenii sterzhnei dvutavrovogo poperechnogo secheniya i ogranicheniyakh na velichinu kriticheskoi sily ili pervoi sobstvennoi chastoty [Minimum materials consumption at rebar H-shaped section strengthening and critical load and first eigenfrequency restrictions]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta. Journal of Construction and Architecture*. 2015. No. 5. Pp. 41–50. (rus)
8. Lyakhovich L.S. Malinovskii A.P. Tukhfatullin B.A. Kriterii optimal'nogo usileniya stenki sterzhnei dvutavrovogo poperechnogo secheniya pri ogranicheniyakh po ustoychivosti ili na velichinu pervoi sobstvennoi chastoty [Criterion for optimum strengthening of I-rods with stability or first eigen-frequency limits]. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2016. V. 12. No. 2. Pp. 118–125.
9. Lyakhovich L.S., Perel'muter A.V. Nekotorye voprosy optimal'nogo proektirovaniya stroitel'nykh konstruksii [Optimum structural design]. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2014. V. 10. No. 2. Pp. 14–23.
10. Lyakhovich L.S., Akimov P.A., Tukhfatullin B.A. O zadachakh poiska minimuma i maksimuma v stroitel'noi mekhanike [Search for minimum and maximum in structural theory]. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2017. V. 13. No. 2. Pp. 103–124.

Сведения об авторах

Ляхович Леонид Семенович, докт. техн. наук, профессор, академик Российской академии архитектуры и строительных наук, Томский государственный архитектурно-строительный университет, 634003, г. Томск, пл. Соляная, 2, lls@tsuab.ru

Акимов Павел Алексеевич, докт. техн. наук, профессор, академик Российской академии архитектуры и строительных наук, Томский государственный архитектурно-строительный университет, 634003, г. Томск, пл. Соляная, 2; главный ученый секретарь президиума, Российская академия архитектуры и строительных наук, 107031, г. Москва, ул. Большая Дмитровка, 24, стр. 1, akimov@raasn.ru

Тухфатуллин Борис Ахатович, канд. техн. наук, доцент, Томский государственный архитектурно-строительный университет, 634003, г. Томск, пл. Соляная, 2, bat9203@gmail.com

Authors Details

Leonid S. Lyakhovich, DSc, Professor, Academy Fellow of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Department of Structural Mechanics, Tomsk State University of Architecture and Building, 2, Solyanaya Sq., 634003, Tomsk, Russia, lls@tsuab.ru

Pavel A. Akimov, DSc, Professor, Chief Academic Secretary, Academy Fellow of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, 24, Bol'shaya Dmitrovka, 107031, Moscow, Russia; Professor, Tomsk State University of Architecture and Building; 2, Solyanaya Sq., 634003, Tomsk, Russia, akimov@raasn.ru

Boris A. Tukhfatullin, PhD, A/Professor, Department of Structural Mechanics, Tomsk State University of Architecture and Building, 2, Solyanaya Sq., 634003, Tomsk, Russia, bat9203@gmail.com