

УДК 624.04

DOI: 10.31675/1607-1859-2020-22-1-92-105

Л.С. ЛЯХОВИЧ¹, П.А. АКИМОВ^{1,2}, Б.А. ТУХФАТУЛЛИН¹,
¹Томский государственный архитектурно-строительный университет,
²Российская академия архитектуры и строительных наук

КРИТЕРИЙ ОЦЕНКИ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ПРИ ФОРМИРОВАНИИ КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫХ УЧАСТКОВ ПОЛКИ СТЕРЖНЕЙ ДВУТАВРОВОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ ПО УСТОЙЧИВОСТИ ИЛИ НА ВЕЛИЧИНУ ПЕРВОЙ ЧАСТОТЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

В опубликованных работах авторов были рассмотрены некоторые особые свойства соответствующих оптимальных систем и сформулированы критерии, позволяющие адекватно оценить близость оптимальных решений к минимально материалоемкому. В частности были представлены такого рода критерии для стержней с двутавровым поперечным сечением при заданных ограничениях по устойчивости или на величину первой частоты собственных колебаний.

Указанные критерии можно использовать при решении задачи оптимизации, когда поперечные сечения стержня непрерывно изменяются по его длине. Определяемые таким образом оптимальные решения могут рассматриваться как идеализированный объект в смысле предельного. Данная функция оптимального проекта дает возможность оценивать реальное конструкторское решение на основе критерия его близости к предельному (например, по материалоемкости).

Такого рода оптимальный проект также может использоваться и как определенный ориентир при реальном проектировании, например, в рамках поэтапного процесса перехода от идеального объекта к реальному.

Следует отметить, что при этом на каждом этапе имеется возможность оценить изменения показателя оптимальности объекта по сравнению с начальным и с идеализированным решениями. В частности, один из вариантов соответствующего процесса предусматривает замену непрерывного изменения размеров поперечных сечений стержня по его длине соответствующими кусочно-постоянными участками. Границы этих участков могут выбираться на основе идеального объекта, а размеры поперечных сечений определяться с использованием одного из методов оптимизации. В настоящей статье представлены критерии, дающие возможность достоверно и надежно оценить момент окончания процесса подобной оптимизации.

Ключевые слова: критерий; оптимизация; особые свойства; устойчивость; частота; критическая сила; формы потери устойчивости; формы собственных колебаний; приведённые напряжения.

Для цитирования: Ляхович Л.С., Акимов П.А., Тухфатуллин Б.А. Критерий оценки оптимальных решений при формировании кусочно-постоянных участков полки стержней двутаврового поперечного сечения при ограничениях по устойчивости или на величину первой частоты собственных колебаний // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. 2020. Т. 22. № 1. С. 92–105.
DOI: 10.31675/1607-1859-2020-22-1-92-105

L.S. LYAKHOVICH¹, P.A. AKIMOV^{1,2}, B.A. TUKHFATULLIN¹,

¹Tomsk State University of Architecture and Building,

²Russian Academy of Architecture and Construction Sciences

ASSESSMENT CRITERION FOR OPTIMUM DESIGN SOLUTIONS OF PIECEWISE CONSTANT SECTIONS IN RODS OF I-SHAPED CROSS-SECTION WITH STABILITY OR FIRST EIGEN-FREQUENCY LIMITS

Specific properties of optimum systems have been already considered in previous research. Moreover, the criteria were proposed for a correct assessment of proximity of optimum to minimum material consumption. In particular, the criteria are proposed for rods of rectangular cross-section with stability or first eigen-frequency limits. These criteria can be used for problem optimization, when the rod cross-sections continuously change longitudinally. The obtained optimum solutions can be considered as a perfect limited object. This optimum project function allows researcher to assess the real design solution using the proximity limit criterion (for example, material consumption limit). This kind of optimum design can also be used as a guideline for real design in terms of a stage-by-stage process of transition from a perfect to real object. In this case, it is possible to assess changes in the object optimality at each stage as compared to the initial and idealized solutions. In particular, one of the variants of the process includes replacing the rod with continuous longitudinally varying cross-sections by a rod with piecewise constant sections. The section boundaries can be based on a perfect object, and cross-sections can be determined by one of the optimization methods. This paper presents criteria, which ensure the reliable definition of the time of completion of the optimization process.

Keywords: criterion; optimization; specific properties; stability; frequency; critical force; buckling; eigen-frequency; reduced stresses.

For citation: Lyakyjvich L.S., Akimov P.A., Tukhfatullin B.A. Kriterij ocenki optimal'nyh reshenij pri formirovanii kusochno-postoyannyh uchastkov sterzhnej dvutavrovogo poperechnogo secheniya pri ogranicheniah po ustojchivosti ili velichiny pervoj chastoty sobstvnyh kolebanij [Assessment criterion for optimum design solutions of piecewise constant sections in rods of I-shaped cross-section with stability or first eigen-frequency limits]. Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta – Journal of Construction and Architecture. 2020. V. 22. No. 1. Pp. 92–105.

DOI: 10.31675/1607-1859-2020-22-1-92-105

В работах по минимизации веса конструкций [1–7], в частности стержней при различных ограничениях, начиная с публикаций Лагранжа [8], Т. Клаузена [9], Е.Л. Николаи [10] и других, формулировались особые свойства оптимальных конструкций [11, 12]. Так, в работе [13] были сформулированы критерии, позволяющие оценивать близость решений по оптимизации стержней прямоугольного поперечного сечения к минимально материалоемкому проекту при ограничениях по устойчивости или на величину первой частоты собственных колебаний. Полученные критерии применимы для случая, когда параметры сечений изменяются непрерывно по длине стержня. Несмотря на то что такой оптимальный проект в подавляющем большинстве случаев в прямом виде не реализуется, он, являясь предельным, например, по минимальной материалоемкости, позволяет оценивать принятое конструкторское решение. Кроме того, предельный проект может использоваться как началь-

ная стадия процесса поэтапного движения от идеального объекта к технологически приемлемому проектному решению [13, 14]. В частности, такой процесс может состоять в замене непрерывного изменения размеров поперечных сечений стержня по его длине на кусочно-постоянное. Для этого по длине стержня намечаются участки, в каждом из которых размеры поперечных сечений не меняются. Выбор границ таких участков определяется как технологическими требованиями, так и стремлением приблизиться к минимально материалоёмкому решению. После выбора границ участков размеры поперечных сечений определяются на каждом участке одним из методов оптимизации.

В большинстве методов оптимизации за критерий завершения процесса принимается состояние, при котором на очередном шаге соответствующего поиска изменение функции цели оказывается меньше некоторой заранее выбранной малой величины. Однако известны случаи, когда при малом изменении на соседних шагах функции цели координаты точки оптимума заметно изменяются. Очевидно, что наличие критерия, более объективно оценивающего близость решения к оптимуму, повысит уверенность в полученном результате. Такие критерии были сформулированы в работе [13] для оптимизации стержней прямоугольного поперечного сечения при ограничениях по устойчивости или на величину первой частоты собственных колебаний, когда параметры сечений изменяются непрерывно по длине стержня. Эти критерии позволяют оценивать близость полученного решения к минимально материалоёмкому проекту. В настоящей статье предлагаются аналогичные критерии для некоторых случаев проектирования полок стержней [15–19] наименьшего веса с двутавровыми кусочно-постоянно изменяющимися по длине стержня поперечными сечениями (рис. 1, а, б) при ограничениях по устойчивости или на величину первой частоты собственных колебаний.

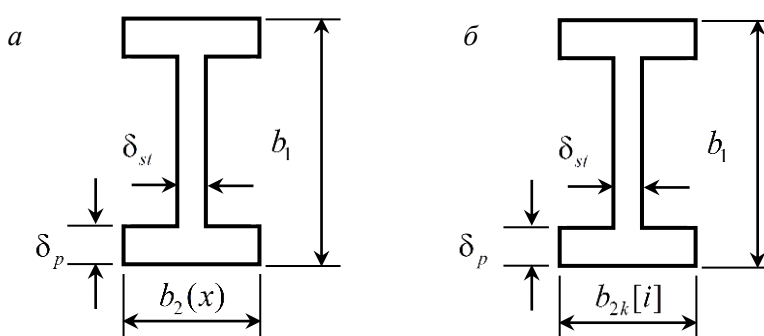


Рис. 1. Сечение рассматриваемого стержня

Пусть не варьируются высота сечения b_1 , толщина полки δ_p и толщина стенки δ_{st} , а варьируются только размеры ширины полки $b_{2k}[i]$ ($i = 1, 2, \dots, n$) при кусочно-постоянном изменении. Собственные колебания происходят в одной главной плоскости инерции.

Критерий, позволяющий оценивать результаты решений об оптимизации ширины полки при ограничениях по устойчивости или величины первой

частоты собственных колебаний для случая, когда ширина полки изменяется непрерывно по длине стержня, сформулирован в работе [13]. Этот критерий может быть представлен в виде трёх вариантов:

$$\sigma_{1\omega}^2(x)b_1 - \sigma_{1\omega r}^2(x)(b_1 - 2 \cdot \delta_p) - 3 \cdot E(\omega_0 \cdot k_\omega)^2 \rho \cdot 2 \cdot \delta_p \cdot v_\omega^2 = \text{const}; \quad (1)$$

$$\sigma_{1\omega}^2(x) \frac{b_1}{2 \cdot \delta_p} - \sigma_{1\omega r}^2(x) \left(\frac{b_1}{2 \cdot \delta_p} - 1 \right) - 3 \cdot E(\omega_0 \cdot k_\omega)^2 v_\omega^2 \cdot \rho = \text{const}; \quad (2)$$

$$\bar{\sigma}_{1\omega r}(x) = \sqrt{\sigma_{1\omega}^2(x) \frac{b_1}{2 \cdot \delta_p} - \sigma_{1\omega r}^2(x) \left(\frac{b_1}{2 \cdot \delta_p} - 1 \right) - 3 \cdot E(\omega_0 \cdot k_\omega)^2 v_\omega^2 \cdot \rho = \text{const}}, \quad (3)$$

где $\sigma_{1\omega}(x)$ и $\sigma_{1\omega r}$ – соответственно нормальные напряжения в крайних волокнах двутаврового сечения и в волокнах на границе стенки и полки.

Вариант (3) введен лишь для того, чтобы подчеркнуть его связь с ранее сформулированными критериями. Использование этого варианта критериев при ограничениях на величину низшей частоты собственных колебаний для оценки процесса на начальных стадиях оптимизации может привести к отрицательным значениям подкоренных выражений. Поэтому для избегания сбоев вычислительного процесса вариант (3) не следует использовать.

Сформулируем критерий, позволяющий оценивать результаты решений об оптимизации ширины полки при ограничениях по устойчивости или величине первой частоты собственных колебаний при кусочно-постоянном изменении размеров.

Запишем функцию цели в виде

$$V_0 = \sum_1^n F[i] \cdot l_u[i], \quad \text{где} \quad F[i] = 2 \cdot b_{2k}[i] \delta_p + b_1 \cdot \delta_{st} - 2 \cdot \delta_p \cdot \delta_{st}.$$

Но, так как варьируются только значения $b_{2k}[i]$, примем

$$V_0 = \sum_1^n 2 \cdot b_{2k}[i] \delta_p \cdot l_u[i]. \quad (4)$$

Ограничения на величину низшей частоты собственных колебаний

$$\omega_0 \leq \omega[1]. \quad (5)$$

Для выявления критерия достижения функцией цели минимума при ограничении на величину низшей частоты собственных колебаний используем метод поиска условного экстремума.

Сформируем интеграл, условия экстремума которого должны обеспечить как минимум функции цели (4), так и выполнение условий, что заданная частота будет низшей собственной в главной плоскости инерции, то есть

$$\omega_0 = \omega[1]. \quad (6)$$

Как уже отмечалось, при выполнении (6) в виде равенства должно иметь место условие

$$\Theta_{\omega_1} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{x[i-1]}^{x[i]} \{E I_1[i] (v_\omega'')^2 - P[i] (v_\omega')^2 - (\omega[1])^2 [m(x) + \rho \cdot F[i] v_\omega^2]\} dx = 0. \quad (7)$$

Момент инерции сечения записывается в виде

$$I_1[i] = \frac{b_{2k}[i]}{12} [b_1^3 - (b_1 - 2 \cdot \delta_p)^3] + \frac{\delta_{st}}{12} (b_1 - 2 \cdot \delta_p)^3. \quad (8)$$

Выражение, экстремум которого обеспечит минимум функции

$$V_0 = \sum_{i=1}^n 2 \cdot b_{2k}[i] \delta_p \cdot l_u[i] \quad (9)$$

и выполнение условий, запишется в виде

$$\mathfrak{D}_{\omega_1} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{x[i-1]}^{x[i]} \{EI_1[i](v''_{\omega})^2 - P[i](v'_{\omega})^2 - (\omega_1[1])^2[m(x) + \rho \cdot F[i]v_{\omega}^2]\} dx = 0; \quad (10)$$

$$\begin{aligned} V_{0\omega} = & \sum_{i=1}^n 2 \cdot b_{2k}[i] \delta_p \cdot l_u[i] - \sum_{i=1}^n \int_{x[i-1]}^{x[i]} \lambda_{\omega_1} \{E[\frac{b_{2k}[i]}{12} (b_1^3 - (b_1 - 2 \cdot \delta_p)^3) + \\ & + \frac{\delta_{st}}{12} (b_1 - 2 \cdot \delta_p)^3](v''_{\omega})^2 - P[1](v'_{\omega})^2 - \\ & - (\omega_0)^2[m(x) + \rho(2 \cdot b_{2k}[i] \delta_p + b_1 \cdot \delta_{st} - 2 \cdot \delta_p \cdot \delta_{st})v_{\omega}^2]\} dx. \quad (11) \end{aligned}$$

Очевидно, что вариации выражения $V_{0\omega}$ (11) по λ_{ω_1} приведут к выполнению условия (10).

Для отыскания минимума выражения (11) при поставленных условиях (6), (10) запишем систему уравнений

$$\frac{\partial V_{0\omega}}{\partial b_{1k}[i]} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (12)$$

Запишем i -е уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{0\omega}}{\partial b_{1k}[i]} = & 2 \cdot \delta_p \cdot l_u[i] - \\ & - \int_{x[i-1]}^{x[i]} \{\lambda_{\omega_1} \{ \frac{E}{12} [b_1^3 - (b_1 - 2 \cdot \delta_p)^3] (v''_{\omega})^2 - (\omega_0)^2 \rho \cdot 2 \cdot \delta_p \cdot v_{\omega}^2 \}\} dx = 0 \end{aligned}$$

или

$$\int_{x[i-1]}^{x[i]} \{ \frac{E}{12} [b_1^3 - (b_1 - 2 \cdot \delta_p)^3] (v''_{\omega})^2 - (\omega_0)^2 \rho \cdot 2 \cdot \delta_p \cdot v_{\omega}^2 \} dx = \frac{2 \cdot \delta_p \cdot l_u[i]}{\lambda_{\omega_1}}.$$

Учитывая, что δ_p и λ_{ω_1} – постоянные величины, можем записать

$$\frac{1}{l_k[i]} \int_{x[i-1]}^{x[i]} \{ \frac{E}{12} [b_1^3 - (b_1 - 2 \cdot \delta_p)^3] (v''_{\omega})^2 - (\omega_0)^2 \rho \cdot 2 \cdot \delta_p \cdot v_{\omega}^2 \} dx = \text{const}. \quad (13)$$

Как известно, нормальные напряжения в стержне при изгибе в волокне, отстоящем от нейтрального слоя на расстоянии y_s , определяются зависимостью $\sigma = (M \cdot y_s) / I$. Так как $M = -EI \cdot v''$, запишем $\sigma = -E \cdot y_s \cdot v''$.

После простых преобразований (13) перепишется в виде

$$\frac{1}{l_k[i]} \int_{x[i-1]}^{x[i]} \left\{ \frac{1}{3 \cdot E} \left[\left(\frac{E \cdot b_1 \cdot v''_{\omega}}{2} \right)^2 b_1 - \right. \right. \\ \left. \left. - \left(\frac{b_1 - 2 \cdot \delta_p}{2} E \cdot v''_{\omega} \right)^2 (b_1 - 2 \cdot \delta_p) \right] - (\omega_0)^2 \cdot \rho \cdot 2 \cdot \delta_p \cdot v_{\omega}^2 \right\} dx = \text{const.} \quad (14)$$

Заметим, что

$$\left(\frac{E \cdot b_1 \cdot v''_{\omega}}{2} \right)^2 = \sigma_{1\omega}^2(x); \quad \left(\frac{b_1 - 2 \cdot \delta_p}{2} E \cdot v''_{\omega} \right)^2 = \sigma_{1\omega r}^2(x)$$

соответственно квадрат нормального напряжения в крайних волокнах двутаврового сечения и в волокнах на границе стенки и полки.

Теперь (14) запишется в виде

$$\frac{1}{l_k[i]} \int_{x[i-1]}^{x[i]} [\sigma_{1\omega}^2(x) b_1 - \sigma_{1\omega r}^2(x) (b_1 - 2 \cdot \delta_p) - 3 \cdot E (\omega_0)^2 \cdot \rho \cdot 2 \cdot \delta_p \cdot v_{\omega}^2] dx = \text{const} \quad (15)$$

или

$$\frac{1}{l_k[i]} \int_{x[i-1]}^{x[i]} \left[\sigma_{1\omega}^2(x) \frac{b_1}{2 \cdot \delta_p} - \sigma_{1\omega r}^2(x) \left(\frac{b_1}{2 \cdot \delta_p} - 1 \right) - 3 \cdot E (\omega_0)^2 v_{\omega}^2(x) \cdot \rho \right] dx = \text{const.} \quad (16)$$

Перепишем зависимости (15) и (16) в виде

$$S_1[i] = \frac{1}{l_k[i]} \int_{x[i-1]}^{x[i]} [\sigma_{1\omega}^2(x) b_1 - \sigma_{1\omega r}^2(x) (b_1 - 2 \cdot \delta_p) - \\ - 3 \cdot E (\omega_0)^2 \rho \cdot 2 \cdot \delta_p \cdot v_{\omega}^2] dx = \text{const}; \quad (17)$$

$$S_2[i] = \frac{1}{l_k[i]} \int_{x[i-1]}^{x[i]} \left[\sigma_{1\omega}^2(x) \frac{b_1}{2 \cdot \delta_p} - \sigma_{1\omega r}^2(x) \left(\frac{b_1}{2 \cdot \delta_p} - 1 \right) - \right. \\ \left. - 3 \cdot E (\omega_0)^2 v_{\omega}^2(x) \rho \right] dx = \text{const.} \quad (18)$$

Как отмечалось выше, сформулированные критерии могут использоваться и тогда, когда вводится только ограничение по устойчивости. В этом случае в выражениях критериев значение собственной частоты полагается нулевым. Сравнение критериев (17), (18), полученных при кусочно-постоянном изменении ширины полки, с аналогичными критериями при непрерывном её изменении (1), (2) и (3) показывает, что под интегралами в (17) и (18) стоят соответственно выражения (1) и (2). Критерии $S_1[i]$ и $S_2[i]$ содержат множитель $1/l_k[i]$. Поэтому критерии (17) и (18) могут рассматриваться на каждом кусочно-постоянном участке как среднее значение соответственно критериев (1) и (2) на единицу длины участка. Для иллюстрации возможностей полученного критерия приведем примеры.

Пример 1. Приведем пример использования критерия (17) для случая, когда вводятся ограничения по устойчивости.

Рассмотрим прямолинейный шарнирно опертый стержень двутаврового сечения пролётом $l = 6$ м, нагруженный продольной силой $P = 9000000$ Н (рис. 2, а). Модуль упругости материала стержня $E = 206000$ МПа [15, 20]. Высота сечения двутавра $b_1 = 0,29$ м, толщина стенки $\delta_{st} = 0,009$ м, полки $\delta_p = 0,014$ м.

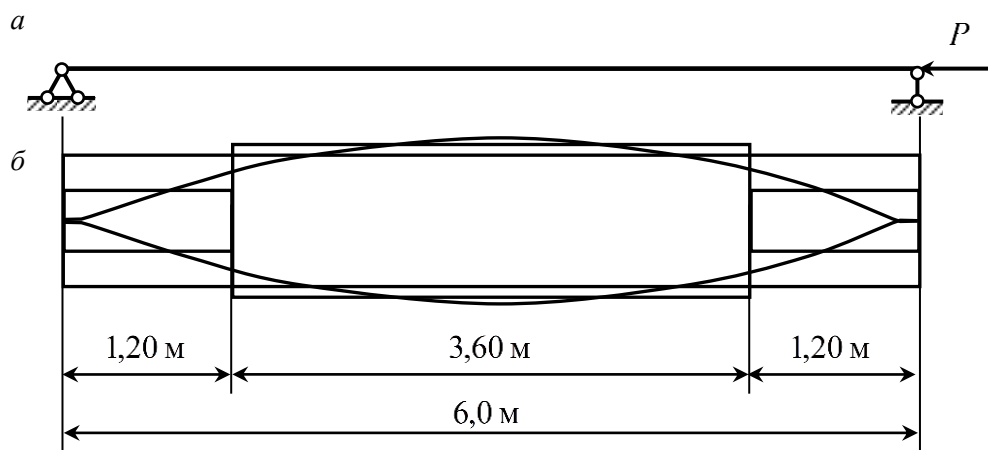


Рис. 2. К примеру 1

Требуется определить очертание полки двутавра таким образом, чтобы критическая сила была бы не больше действующей, а объём материала полки был бы минимальным.

Ограничение по устойчивости запишем в виде

$$P = P_{кр}, \quad (19)$$

а функцию цели в виде (4). Оптимизацию [8–14, 20, 21] проведём методом случайного поиска на основе дискретной модели из 25 участков.

Рассмотрим три варианта. За исходный вариант принята полка постоянного по длине сечения. Значения ее размеров определены при первом выходе на границу области допустимых решений. Они оказались равными $b_2^0[i] = 0,2737$ м. При этом функция цели равна $V_0 = 0,0460$ м³. Результаты этого варианта представлены во втором столбце табл. 1 и на рис. 2, б.

Во втором варианте рассматривается непрерывное изменение размеров ширины полки. За критерий остановки процесса оптимизации здесь принята близость нормированного значения критерия (1) к единице. В сечениях 1 и 25 критерий значительно отличается от единицы, что объясняется достижением шириной полки размера толщины стенки и остановкой в этих сечениях процесса оптимизации. Результаты этого варианта приведены в столбцах 3 и 4 табл. 1 и на рис. 2, б. Функция цели в этом варианте равна $V_0 = 0,0372$ м³, что на 19,20 % меньше, чем у исходного варианта.

Таблица 1

Сведения о вариантах решения примера 1

№ п/п	$b_2^0[i], \text{ м}$	$b_2[i], \text{ м}$	$\sigma_{1\omega}^2[i]$	$b_{2k}[i], \text{ м}$	$\sigma_{1\omega}^2[i]$	$S_1[i]$
1	2	3	4	5	6	7
1	0,2737	0,009	0,7308	0,1233	0,0153	1,0000
2	0,2737	0,0581	0,9994	0,1233	0,1351	1,0000
3	0,2737	0,1075	1,0000	0,1233	0,3596	1,0000
4	0,2737	0,1524	0,9986	0,1233	0,6605	1,0000
5	0,2737	0,1926	0,9976	0,1233	1,0000	1,0000
6	0,2737	0,2277	0,9999	0,3139	0,2564	0,9992
7	0,2737	0,2584	0,9997	0,3139	0,3220	0,9992
8	0,2737	0,2843	0,9994	0,3139	0,3852	0,9992
9	0,2737	0,3057	0,9985	0,3139	0,4426	0,9992
10	0,2737	0,3220	0,9997	0,3139	0,4908	0,9992
11	0,2737	0,3341	0,9976	0,3139	0,5274	0,9992
12	0,2737	0,3412	0,9975	0,3139	0,5501	0,9992
13	0,2737	0,3435	0,9979	0,3139	0,5578	0,9992
14	0,2737	0,3412	0,9975	0,3139	0,5501	0,9992
15	0,2737	0,3341	0,9976	0,3139	0,5274	0,9992
16	0,2737	0,3220	0,9997	0,3139	0,4908	0,9992
17	0,2737	0,3057	0,9985	0,3139	0,4426	0,9992
18	0,2737	0,2843	0,9994	0,3139	0,3852	0,9992
19	0,2737	0,2584	0,9997	0,3139	0,3220	0,9992
20	0,2737	0,2277	0,9999	0,3139	0,2564	0,9992
21	0,2737	0,1926	0,9976	0,1233	1,0000	1,0000
22	0,2737	0,1524	0,9986	0,1233	0,6605	1,0000
23	0,2737	0,1075	1,0000	0,1233	0,3596	1,0000
24	0,2737	0,0581	0,9994	0,1233	0,1351	1,0000
25	0,2737	0,009	0,7308	0,1233	0,0153	1,0000
$V_0, \text{ м}^3$	0,0460	0,0372	–	0,0399	–	–
%	0	19,20	–	13,18	–	–

В третьем варианте рассматривается кусочно-постоянное изменение ширины полки. Как отмечалось выше, выбор границ участков, на которых размеры не изменяются, определяется как технологическими требованиями, так и стремлением максимально приблизиться к минимально материалоемкому решению, в данном примере к решению по второму варианту. Предположим, что технологические требования допускают проектирование стержня из трёх участков. Так как целью примера является иллюстрация критерия (17), то, учитывая ограничение объёма статьи, рассмотрим только один вариант выбора границ участков (рис. 2).

Результаты оптимизации этого варианта приведены в столбцах 5, 6, 7 табл. 1 и на рис. 2, б. Величины критерия (17) (столбец 7 табл. 1) во всех сечениях близки к единице, что позволяет остановить процесс оптимизации. Функция цели в этом варианте равна $V_0 = 0,0399 \text{ м}^3$, что на 13,18 % меньше, чем у исходного варианта.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий применение критериев для многопролётных стержней.

Пример 2. Рассматривается двухпролётный стержень двутаврового сечения, нагруженный продольной силой $P = 5000000 \text{ Н}$ и несущий распределённую массу $m(x) = 200 \text{ кг/м}$ (рис. 3, а). Модуль упругости материала стержня $E = 206000 \text{ МПа}$, удельная масса $\rho = 7850 \text{ кг/м}^3$. Высота сечения двутавра $b_1 = 0,29 \text{ м}$, толщина стенки $\delta_{st} = 0,009 \text{ м}$, полки $\delta_p = 0,014 \text{ м}$.

Требуется определить очертание полки двутавра таким образом, чтобы первая частота собственных колебаний была бы не больше заданного значения $\omega_0 = 90 \text{ с}^{-1}$, а объём материала полки был бы минимальным. Оптимизацию проведём методом случайного поиска на основе дискретной модели из 40 участков.

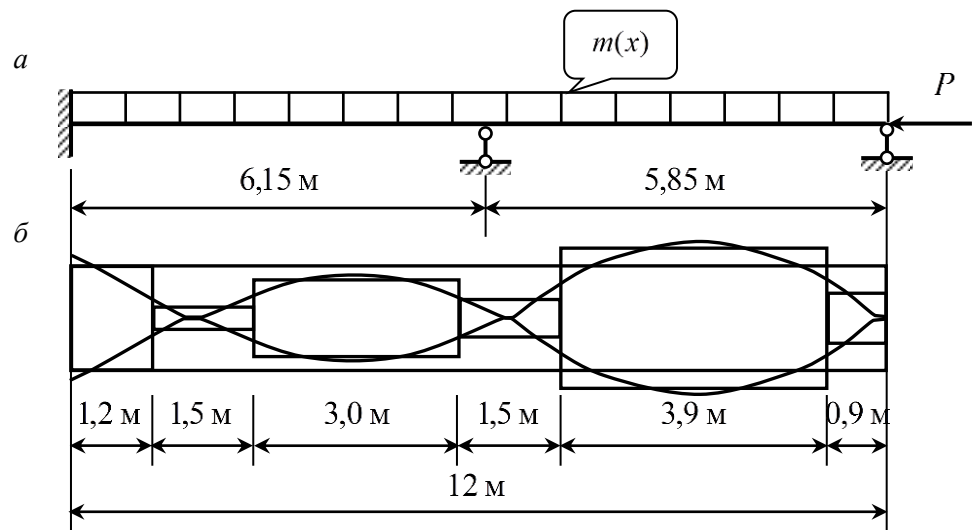


Рис. 3. К примеру 2

Рассмотрим три варианта. За исходный вариант принята полка постоянного по длине сечения. Значения её размеров определены при первом выходе на границу области допустимых решений. Они оказались равными $b_2^0[i] = 0,2934 \text{ м}$. При этом функция цели равна $V_0 = 0,0986 \text{ м}^3$. Результаты этого варианта представлены во втором столбце табл. 2 и на рис. 3, б.

Во втором варианте рассматривается непрерывное изменение размеров ширины полки. За критерий остановки процесса оптимизации здесь принята близость нормированного значения критерия (1) к единице. В сечениях 7 и 22

критерий значительно отличается от единицы, что объясняется достижением шириной полки размера, близкого к толщине стенки, и остановкой в этих сечениях процесса оптимизации. Результаты этого варианта приведены в столбцах 3 и 4 табл. 2 и на рис. 3, б. Функция цели в этом варианте равна $V_0 = 0,0758 \text{ м}^3$, что на 23,10 % меньше, чем у исходного варианта.

Таблица 2

Сведения о вариантах решения примера 2

№ п/п	$b_1^0[i], \text{ м}$	$b_1[i], \text{ м}$	$\sigma_{1\omega}^2[i]$	$b_{1k}[i], \text{ м}$	$\sigma_{1\omega}^2[i]$	$S_1[i]$
1	2	3	4	5	6	7
1	0,2934	0,3400	0,9962	0,2772	0,6888	0,9994
2	0,2934	0,2842	0,9961	0,2772	0,4922	0,9994
3	0,2934	0,2243	0,9974	0,2772	0,3177	0,9994
4	0,2934	0,1610	0,9948	0,2772	0,1743	0,9994
5	0,2934	0,0939	0,9982	0,0706	0,7387	0,9994
6	0,2934	0,0254	0,9766	0,0706	0,1250	0,9994
7	0,2934	0,0099	0,2779	0,0706	-0,0121	0,9994
8	0,2934	0,0574	1,0000	0,0706	0,2994	0,9994
9	0,2934	0,1116	0,9900	0,0706	0,9401	0,9994
10	0,2934	0,1556	0,9955	0,2199	0,2063	0,9997
11	0,2934	0,1906	0,9971	0,2199	0,3243	0,9997
12	0,2934	0,2168	0,9976	0,2199	0,4317	0,9997
13	0,2934	0,2350	0,9930	0,2199	0,5129	0,9997
14	0,2934	0,2439	0,9950	0,2199	0,5574	0,9997
15	0,2934	0,2451	0,9914	0,2199	0,5605	0,9997
16	0,2934	0,2370	0,9954	0,2199	0,5232	0,9997
17	0,2934	0,2206	0,9963	0,2199	0,4523	0,9997
18	0,2934	0,1958	0,9960	0,2199	0,3589	0,9997
19	0,2934	0,1625	0,9945	0,2199	0,2561	0,9997
20	0,2934	0,1206	0,9986	0,1046	0,5722	0,9989
21	0,2934	0,0722	0,9970	0,1046	0,2569	0,9989
22	0,2934	0,009	0,0091	0,1046	-0,0045	0,9989
23	0,2934	0,0778	0,9993	0,1046	0,2657	0,9989
24	0,2934	0,1657	0,9938	0,1046	1,0000	0,9989
25	0,2934	0,2407	0,9946	0,3908	0,1419	0,9998
26	0,2934	0,3030	0,9947	0,3908	0,2415	0,9998
27	0,2934	0,3528	0,9972	0,3908	0,3473	0,9998
28	0,2934	0,3916	0,9955	0,3908	0,4472	0,9998
29	0,2934	0,4192	0,9959	0,3908	0,5300	0,9998
30	0,2934	0,4364	0,9962	0,3908	0,5868	0,9998

Окончание табл. 2

№ п/п	$b_1^0[i]$, м	$b_1[i]$, м	$\sigma_{1\omega}^2[i]$	$b_{1k}[i]$, м	$\sigma_{1\omega}^2[i]$	$S_1[i]$
1	2	3	4	5	6	7
31	0,2934	0,4436	0,9962	0,3908	0,6115	0,9998
32	0,2934	0,4410	0,9962	0,3908	0,6017	0,9998
33	0,2934	0,4281	0,9974	0,3908	0,5588	0,9998
34	0,2934	0,4057	0,9943	0,3908	0,4876	0,9998
35	0,2934	0,3714	0,9967	0,3908	0,3961	0,9998
36	0,2934	0,3264	0,9945	0,3908	0,2946	0,9998
37	0,2934	0,2686	0,9960	0,3908	0,1942	0,9998
38	0,2934	0,1987	0,9944	0,1365	0,8821	1,0000
39	0,2934	0,1163	0,9988	0,1365	0,3351	1,0000
40	0,2934	0,0250	0,9633	0,1365	0,0382	1,0000
$V_0, \text{ м}^3$	0,0986	0,0758	–	0,0813	–	–
%	0	23,10	–	17,57	–	–

В третьем варианте рассматривается кусочно-постоянное изменение ширины полки. Как отмечалось выше, выбор границ участков, на которых размеры не изменяются, определяется как технологическими требованиями, так и стремлением максимально приблизиться к минимально материалоемкому решению. Учитывая ограничение объема статьи, рассмотрим только один вариант выбора границ участков (рис. 3).

Результаты оптимизации этого варианта приведены в столбцах 5, 6, 7 табл. 2 и на рис. 3, б. Величины критерия (17) (столбец 7 табл. 2) во всех сечениях близки к единице, что позволяет остановить процесс оптимизации. Функция цели в этом варианте равна $V_0 = 0,0813 \text{ м}^3$, что на 17,57 % меньше, чем у исходного варианта.

При оптимизации стержней с двутавровым поперечным сечением при ограничениях по устойчивости или на величину первой частоты собственных колебаний, когда поперечные сечения непрерывно изменяются по его длине, были сформулированы критерии, оценивающие близость полученных решений к минимально материалоемкому [13]. Однако такие проекты в большинстве случаев в непосредственном варианте не реализуются. В то же время они позволяют оценивать реальное конструкторское решение по критерию его близости к предельному (например, по материалоемкости), а также использоваться как ориентир при реальном проектировании. Один из вариантов перехода от предельного проекта к реально приемлемому состоит в замене непрерывного изменения размеров поперечных сечений кусочно-постоянными участками. Границы участков могут выбираться на основе идеального объекта, а размеры поперечных сечений определяться одним из методов оптимизации.

В настоящей статье предлагаются критерии, позволяющие надёжно оценивать момент окончания процесса такой оптимизации.

Теоретические результаты статьи в англоязычном варианте представлены в работе [22], а примеры в работе [23].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Boslovyak P.V., Emelyanova G.A.* Optimization Mathematical Modeling of the Weight of Metal Structure of Suspended Belt Conveyor Linear Section // IFAC-PapersOnLine. 2018. V. 51. I. 30. P. 616–619.
2. *Hansel W., Treptow A., Becker W., Freisleben B.* A heuristic and a genetic topology optimization algorithm for weight-minimal laminate structures // Composite Structures. 2002. V. 58. I. 2. P. 287–294.
3. *Jonsson B., Barsoum Z., Sperle J.-O.* Weight optimization and fatigue design of a welded bogie beam structure in a construction equipment // Engineering Failure Analysis. 2012. V. 19. P. 63–76.
4. *Navarrina F., Muinos I., Colominas I., Casteleiro M.* Topology optimization of structures: A minimum weight approach with stress constraints // Advances in Engineering Software. 2005. V. 36. I. 9. P. 599–606.
5. *Park C.H., Saouab A., Breard J., Han W.S., Vautrin A., Lee W.I.* An integrated optimisation for the weight, the structural performance and the cost of composite structures // Composites Science and Technology. 2009. V. 69. I. 7–8. P. 1101–1107.
6. *Praveen V., Dayan G.M., Kumar A.S.* A multi-objective design optimization technique for weight and cost minimization of hybrid laminated composite structure by modified non-dominated sorting genetic algorithm // Materials Today: Proceedings. 2018. V. 5. I. 12. Part 1. P. 25798–25806.
7. *Winklberger M., Heftberger P., Sattler M., Schagerl M.* Fatigue strength and weight optimization of threaded connections in tie-rods for aircraft structures // Procedia Engineering. 2018. V. 213. P. 374–382.
8. *Lagrange J.-L.* Sur la figure des colonnes // Mescellanea Taurinensia. 1770–1773. V. 5, P. 123.
9. *Clausen T.* Uber die form architektonischer Säulen // Bull. cl. physico-raath. Acad. St.-Petersburg. 1851. V. 9. P. 371–380.
10. *Николаи Е.Л.* Задача Лагранжа о наивыгоднейшем очертании колонны // Известия Санкт-Петербургского политехнического института. 1907. № 8.
11. *Ляхович Л.С., Акимов П.А., Тухфатуллин Б.А.* О задачах поиска минимума и максимума в строительной механике // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2017. V. 13. I. 2. P. 103–124.
12. *Lyakhovich L.S., Malinovsky A.P., Tukhfatullin B.A.* Criteria for Optimal Strengthening of Bar Flange with I-type Cross-section with Stability Constraints on the Value of the First Natural Frequency // Procedia Engineering. 2016. V. 153. P. 427–433.
13. *Ляхович Л.С.* Особые свойства оптимальных систем и основные направления их реализации в методах расчета сооружений. Томск : Издательство Томского государственного архитектурно-строительного университета, 2009. 372 с.
14. *Ляхович Л.С., Перельмутер А.В.* Некоторые вопросы оптимального проектирования строительных конструкций // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2014. V. 10. I. 2. P. 14–23.
15. *Aslami M., Akimov P.A.* Analytical solution for beams with multipoint boundary conditions on two-parameter elastic foundations // Archives of Civil and Mechanical Engineering. 2016. V. 16. I. 4. P. 668–677.
16. *Khasawneh F.A., Segalman D.* Exact and numerically stable expressions for Euler-Bernoulli and Timoshenko beam modes // Applied Acoustics. 2019. V. 151. P. 215–228.
17. *Peradze J.* On the approximate solution of a Kirchhoff type static beam equation // Transactions of A. Razmadze Mathematical Institute. 2016. V. 170. I. 2. P. 266–271.
18. *Reali A., Gomez H.* An isogeometric collocation approach for Bernoulli–Euler beams and Kirchhoff plates // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2015. V. 284. P. 623–636.

19. Wang D., Liu W., Zhang H. Superconvergent isogeometric free vibration analysis of Euler–Bernoulli beams and Kirchhoff plates with new higher order mass matrices // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2015. V. 286. P. 230–267.
20. Ludeker J.K., Kriegesmann B. Fail-safe optimization of beam structures // *Journal of Computational Design and Engineering*. 2019. V. 6. I. 3. P. 260–268.
21. Quinteiro G.F. Beam optimization: improving methodology // *Annals of Nuclear Energy*. 2004. V. 31. I. 4. P. 399–411.
22. Lyakhovich L.S., Akimov P.A., Tukhfatullin B.A. Optimal solutions for creation of rods with piecewise constant cross-sections with stability constraints or constraints for value of the first natural frequency. Part 1: theoretical foundations // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2019. V. 15. I. 4. P. 88–100.
23. Lyakhovich L.S., Akimov P.A., Tukhfatullin B.A. Optimal solutions for creation of rods with piecewise constant cross-sections with stability constraints or constraints for value of the first natural frequency. Part 2: numerical examples // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2019. V. 15. I. 4. P. 101–110.

REFERENCES

1. Boslovyak P.V., Emelyanova G.A. Optimization mathematical modeling of the weight of metal structure of suspended belt conveyor linear section. *IFAC-PapersOnLine*. 2018. V. 51. No. 30. Pp. 616–619.
2. Hansel W., Treptow A., Becker W., Freisleben B. A heuristic and a genetic topology optimization algorithm for weight-minimal laminate structures. *Composite Structures*. 2002. V. 58. No. 2. Pp. 287–294.
3. Jonsson B., Barsoum Z., Sperle J.-O. Weight optimization and fatigue design of a welded bogie beam structure in a construction equipment. *Engineering Failure Analysis*. 2012. V. 19. Pp. 63–76.
4. Navarrina F., Muinos I., Colominas I., Casteleiro M. Topology optimization of structures: A minimum weight approach with stress constraints. *Advances in Engineering Software*. 2005. V. 36. No. 9. Pp. 599–606.
5. Park C.H., Saouab A., Breard J., Han W.S., Vautrin A., Lee W.I. An integrated optimisation for the weight, the structural performance and the cost of composite structures. *Composites Science and Technology*. 2009. V. 69. No. 7–8. Pp. 1101–1107.
6. Praveen V., Dayan G.M., Kumar A.S. A multi-objective design optimization technique for weight and cost minimization of hybrid laminated composite structure by modified non-dominated sorting genetic algorithm. *Materials Today: Proceedings*. 2018. V. 5. No. 12. Pp. 25798–25806.
7. Winklberger M., Heftberger P., Sattler M., Schagerl M. Fatigue strength and weight optimization of threaded connections in tie-rods for aircraft structures. *Procedia Engineering*. 2018. V. 213. Pp. 374–382.
8. Lagrange J.-L. Sur la figure des colonnes. *Miscellanea Taurinensia*. 1770-1773. V. 5, P. 123.
9. Clausen T. Über die form architektonischer Säulen. *Bull. cl. physico-math. Acad. St.-Petersburg*, 1851. V. 9. Pp. 371–380.
10. Nikolai E.L. Zadacha Lagranzha o naivygodneishem ochertanii kolonny [The Lagrange problem of the best shape of the column]. *Izvestiya Sankt-Peterburgskogo politekhnicheskogo instituta*. 1907. No. 8. (rus)
11. Lyakhovich L.S., Akimov P.A., Tukhfatullin B.A. O zadachakh poiska minimuma i maksimuma v stroitel'noi mekhanike [About hill-climbing problems in structural mechanics]. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2017. V. 13. No. 2. Pp. 103–124. (rus)
12. Lyakhovich L.S., Malinovsky A.P., Tukhfatullin B.A. Criteria for optimal strengthening of bar flange with I-type cross-section with stability constraints on the value of the first natural frequency. *Procedia Engineering*. 2016. V. 153. Pp. 427–433.
13. Lyakhovich L.S. Osobyie svoystva optimal'nykh sistem i osnovnye napravleniya ikh realizatsii v metodakh rascheta sooruzhenii [Specific properties of optimum systems using methods of structural analysis]. Tomsk: TSUAB, 2009. 372 p. (rus)

14. Lyakhovich L.S., Perelmuter A.V. Nekotorye voprosy optimal'nogo proektirovaniya stroitel'nykh konstruksii [Optimum building design]. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2014. V. 10. No. 2. Pp. 14–23. (rus)
15. Aslami M., Akimov P.A. Analytical solution for beams with multipoint boundary conditions on two-parameter elastic foundations. *Archives of Civil and Mechanical Engineering*. 2016. V. 16. No. 4. Pp. 668–677.
16. Khasawneh F.A., Segalman D. Exact and numerically stable expressions for Euler-Bernoulli and Timoshenko beam modes. *Applied Acoustics*. 2019. V. 151. Pp. 215–228.
17. Peradze J. On the approximate solution of a Kirchhoff type static beam equation. *Transactions of A. Razmadze Mathematical Institute*. 2016. V. 170. No. 2. Pp. 266–271.
18. Reali A., Gomez H. An isogeometric collocation approach for Bernoulli–Euler beams and Kirchhoff plates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2015. V. 284. Pp. 623–636.
19. Wang D., Liu W., Zhang H. Superconvergent isogeometric free vibration analysis of Euler–Bernoulli beams and Kirchhoff plates with new higher order mass matrices. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2015. V. 286. Pp. 230–267.
20. Ludeker J.K., Kriegesmann B. Fail-safe optimization of beam structures. *Journal of Computational Design and Engineering*. 2019. V. 6. No. 3. Pp. 260–268.
21. Quinteiro G.F. Beam optimization: improving methodology. *Annals of Nuclear Energy*. 2004. V. 31. No. 4. Pp. 399–411.
22. Lyakhovich L.S., Akimov P.A., Tukhfatullin B.A. Optimal solutions for creation of rods with piecewise constant cross-sections with stability constraints or constraints for value of the first natural frequency. Part 1: theoretical foundations. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2019. V. 15. No. 4. Pp. 88–100.
23. Lyakhovich L.S., Akimov P.A., Tukhfatullin B.A. Optimal solutions for creation of rods with piecewise constant cross-sections with stability constraints or constraints for value of the first natural frequency. Part 2: Numerical examples. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2019. V. 15. No. 4. Pp. 101–110.

Сведения об авторах

Ляхович Леонид Семенович, докт. техн. наук, профессор, академик Российской академии архитектуры и строительных наук, Томский государственный архитектурно-строительный университет, 634003, г. Томск, пл. Соляная, 2, lls@tsuab.ru

Акимов Павел Алексеевич, докт. техн. наук, профессор, академик Российской академии архитектуры и строительных наук, Томский государственный архитектурно-строительный университет, 634003, г. Томск, пл. Соляная, 2; главный ученый секретарь президиума Российской академии архитектуры и строительных наук, 107031, г. Москва, ул. Большая Дмитровка, 24, стр. 1, akimov@raasn.ru

Тухфатуллин Борис Ахатович, канд. техн. наук, доцент, Томский государственный архитектурно-строительный университет, 634003, г. Томск, пл. Соляная, 2, bat9203@gmail.com

Authors Details

Leonid S. Lyakhovich, DSc, Professor, Academy Fellow of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Department of Structural Mechanics, Tomsk State University of Architecture and Building, 2, Solyanaya Sq., 634003, Tomsk, Russia, lls@tsuab.ru

Pavel A. Akimov, DSc, Professor, Chief Academic Secretary, Academy Fellow of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Professor, Department of Structural Mechanics, Tomsk State University of Architecture and Building; 2, Solyanaya Sq., 634003, Tomsk, Russia, akimov@raasn.ru

Boris A. Tukhfatullin, PhD, A/Professor, Department of Structural Mechanics, Tomsk State University of Architecture and Building, 2, Solyanaya Sq., 634003, Tomsk, Russia, bat9203@gmail.com