

УДК 624.21.058

*КАРТОПОЛЬЦЕВ АНДРЕЙ ВЛАДИМИРОВИЧ, канд. техн. наук, доцент,
kaf_most@mail.ru*

*КОЛМАКОВ БОРИС ДМИТРИЕВИЧ, аспирант,
boriskolmakov@mail.ru*

*Томский государственный архитектурно-строительный университет,
634003, г. Томск, пл. Соляная, 2*

К ВОПРОСУ О КОЛЕБАНИИ СИСТЕМЫ «АВТОМОБИЛЬ + ПРОЛЕТНОЕ СТРОЕНИЕ» ПРИ СОВПАДЕНИИ ЦЕНТРОВ МАСС И ЖЕСТКОСТИ

Рассмотрены вопросы изменения динамических характеристик пролетных строений сталежелезобетонных мостов с учетом дефектов проезжей части. По уравнениям свободных и вынужденных колебаний для сталежелезобетонной балки получена зависимость прогиба балки пролетного строения от жесткости подвески и веса автомобиля при условии совпадения жесткостей и масс автомобиля и балки пролетного строения на уровне центра жесткости системы. Для достижения поставленных задач была произведена обработка экспериментальных данных исследования мостов.

Ключевые слова: железобетонная плита; металлические балки; сталежелезобетонный мост; динамический прогиб; момент инерции; частота вынужденных колебаний.

*ANDREI V. KARTOPOLTSEV, PhD, A/Professor,
kaf_most@mail.ru*

*BORIS D. KOLMAKOV, Research Assistant,
boriskolmakov@mail.ru*

*Tomsk State University of Architecture and Building,
2, Solyanaya Sq., 634003, Tomsk, Russia*

VEHICLE/SPAN SYSTEM OSCILLATION AT COINCIDENT CENTRE OF MASS AND STIFFNESS

The paper deals with the dynamic characteristics of composite bridge span structures with regard for the pavement defects. The dependence between the composite beam deflection and the stiffness of the vehicle suspension and its weight is determined using the equations of free and forced oscillations. The dependence is obtained provided that the centre of mass and stiffness coincide in the centre of the system stiffness.

Keywords: concrete slab; metal beams; composite bridge; dynamic deflection; moment of inertia; forced oscillation frequency.

При выявлении меры участия железобетонной плиты проезжей части в передаче колебательного процесса от подвижной нагрузки на стальные балки сталежелезобетонных пролетных строений появилась острая необходимость в выявлении зависимости между центрами масс и жесткости в системе «автомобиль + пролетное строение». Изменение напряженно-деформированного состояния балок пролетных строений при воздействии подвижной нагрузки нахо-

дится в зависимости от величины динамической жесткости системы, а также жесткости отдельно автомобиля и пролетного строения (рис. 1).

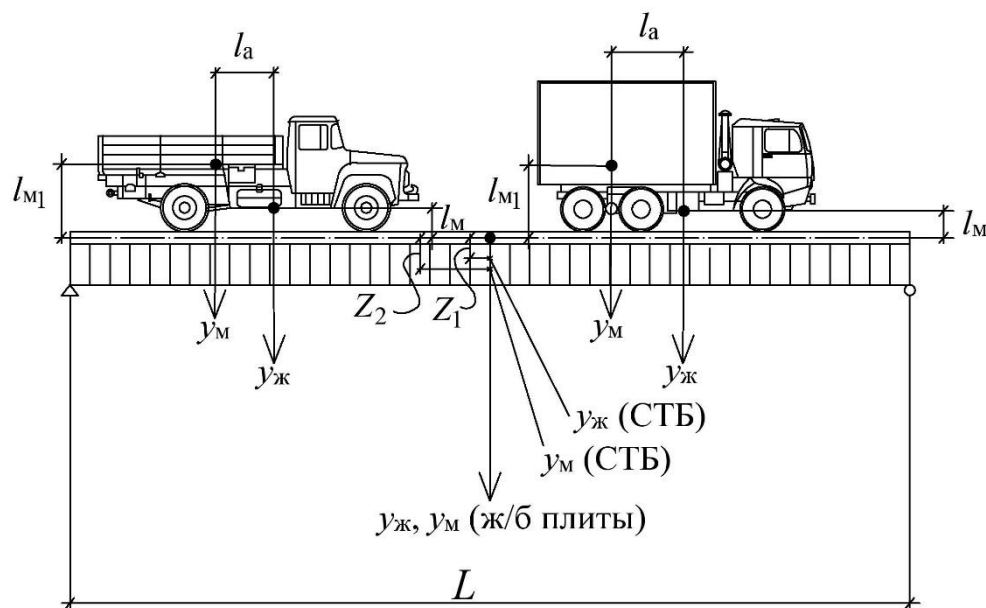


Рис. 1. Условная расчетная схема расположения центра масс и жесткости в системе «автомобиль + пролетное строения»:

$y_{ж}$, $y_{м}$ – центр жесткости, масс соответственно

Рассматриваются следующие расчетные схемы:

- центры масс и жесткости автомобиля совпадают (А);
- центры масс и жесткости автомобиля совпадают с аналогичными центрами железобетонной плиты (Б);
- центр масс автомобиля совпадает с центром масс сталежелезобетонного сечения балки (В);
- центр жесткости автомобиля совпадает с аналогичным центром сталежелезобетонного сечения балки (Г).

Для сталежелезобетонной балки уравнение свободных колебаний системы запишется в виде

$$(k_a - m_a \cdot \omega_a^2)A_a + (k_{пр} - m_{пр} \cdot \omega_б^2)A_{пр} = 0, \quad (1)$$

где m_a , $m_{пр}$ – сосредоточенная масса соответственно автомобиля и балок пролетного строения; ω_a , $\omega_б$ – частота собственных колебаний соответственно автомобиля и балок пролетного строения; A_a , $A_{пр}$ – амплитуда собственных колебаний соответственно автомобиля и балок пролетного строения; k_a , $k_{пр}$ – коэффициент жесткости подвесок автомобиля и балок пролетного строения.

В случае бесконечного числа степеней при $n = 1$ уравнение (1) принимает вид

$$-\left[\left(m_a \cdot \omega_a^2 \cdot A_a + m_{\text{пр}} \cdot \omega_6^2 \cdot A_{\text{пр}} \right) \right] + \left(k_a \cdot A_a + k_6 \cdot A_{\text{пр}} \right) = 0. \quad (2)$$

После упрощения выражение (2) имеет вид

$$\left. \begin{aligned} & \left(k_a - m_a \cdot \omega_a^2 \right) A_a + \left(k_6 - m_{\text{пр}} \cdot \omega_6^2 \right) A_{\text{пр}} = 0 \\ \text{или} & \\ & -\left[\left(I_a \cdot \omega_a^2 \cdot \bar{A}_a + I_{\text{пр}} \cdot \omega_{\text{пр}}^2 \cdot \bar{A}_{\text{пр}} \right) \right] + k_a \cdot \bar{A}_a + k_{\text{пр}} \cdot \bar{A}_{\text{пр}} = 0 \end{aligned} \right\}, \quad (3)$$

где $I_a, I_{\text{пр}}$ – момент инерции относительно собственной оси автомобиля, балки пролетного строения; $\bar{A}_a, \bar{A}_{\text{пр}}$ – амплитуда вынужденных колебаний автомобиля, балок пролетного строения.

В упрощенном виде уравнение (3) принимает вид

$$\left(k_a - I_a \cdot \omega_a^2 \right) \bar{A}_a + \left(k_{\text{пр}} - I_{\text{пр}} \cdot \omega_{\text{пр}}^2 \right) \bar{A}_{\text{пр}} = 0. \quad (4)$$

Аналогично запишем уравнение вынужденных колебаний системы:

$$\left(k_a - I_a \cdot \bar{\omega}_a^2 \right) \bar{A}_a + \left(k_{\text{пр}} - I_{\text{пр}} \cdot \bar{\omega}_{\text{пр}}^2 \right) \bar{A}_{\text{пр}} = 0, \quad (5)$$

где $\bar{\omega}_a, \bar{\omega}_{\text{пр}}$ – частота вынужденных колебаний соответственно автомобиля, балок пролетного строения.

Известно, что жесткость автомобиля в системе (k_a) является функцией жесткости его подвесок [1]. Если принять $C_{\text{ш}}$ – жесткость всех подвесок автомобиля, то

$$C_{\text{ш}} = \frac{\bar{\omega}^2 \cdot W}{7,25g}, \quad (6)$$

где $\bar{\omega}$ – частота вынужденных колебаний массы автомобиля; W – сила трения в подвесках, равная

$$W = W_n + \frac{W_y}{i_p}, \quad i_p = 1, \quad (7)$$

W_n, W_y – сила трения в рессорах, подвесках.

Используя известную зависимость из теории подобия в динамических задачах, считаем справедливым выражение [2]

$$i_p = \frac{f_a}{f}, \quad (8)$$

где i_p – передаточное число; f_a – перемещение подвески; f – прогиб балки пролетного строения.

При $i_p = 1$ $f_a = f$. Тогда, пренебрегая величиной деформирования амортизаторов подвесок движущегося транспорта, независимо от количества осей, неровностей по проезжей части моста в виде выбоин, справедливы отношения:

$$\text{при } \frac{t_0}{T} \leq 0,25-0,4 \quad T = \frac{2\pi}{\bar{\omega}}, \quad (9)$$

где T – период вынужденных колебаний автомобиля; $\bar{\omega}$ – частота вынужденных колебаний; t_0 – время проезда выбоин.

В случае равенства жесткости рессор или амортизаторов статическому прогибу балок ($y_{ст}$) максимальная амплитуда колебания балок будет равна или соответствовать глубине дефекта (выбоины). При равенстве $W = m \cdot g$ формула (6) переписывается в виде

$$C_{ш} = \frac{\bar{\omega}^2 \cdot m}{7,25}. \quad (10)$$

При $i_p = 1$ сила трения в подвеске будет равна весу автомобиля, т. е. $W = P_{вр}$. Тогда

$$C_{ш} = \frac{\bar{\omega}^2 \cdot P_{вр}}{7,25 \cdot g}. \quad (11)$$

Из формулы (8) прогиб балки $f = y_{ст} = \frac{P_{вр}}{C_{ш}}$. Равенство (8) выполняется в том случае, когда $\bar{\omega}$ соответствует периоду собственных колебаний, определяемому из равенства

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{C}}, \quad (12)$$

где M – приведенная масса пролетного строения к ее центру тяжести; C – жесткость пролетного строения на уровне центра тяжести массы.

$$C = 48 \frac{E_s I_{стб}}{L^3} \text{ или } C = 4\pi^2 \frac{M}{T^2};$$

$$M = \frac{0,5 \cdot P_{пост+вр} \cdot L}{9,81}. \quad (13)$$

Обработка экспериментальных данных испытания мостов показала определенное соответствие частоты $\bar{\omega}$ периоду колебаний T при $V_i = V_{кр}$, равном [3]

$$V_{кр} = \frac{2\pi}{T \left(\frac{2}{D} + \frac{T}{L} \right)}, \quad (14)$$

где D – диаметр колеса автомобиля; L – расчетный пролет балки.

В то же время другим условием для выражения (13) является значение периода вынужденных колебаний автомобиля, определяемое из выражения

$$EI_g = 4\pi^2 \frac{M_{вр}}{T_a^2}, \quad (15)$$

где EI_g – жесткость автомобиля на уровне его центра тяжести; $M_{вр}$ – масса автомобиля.

Отсюда
$$T_a = 2\pi \sqrt{\frac{M_{\text{вп}}}{EI_g}}. \quad (16)$$

Рассматривая железобетонную плиту проезжей части сталежелезобетонного пролетного строения как передаточный слой колебаний от автомобиля к стальным балкам, для выполнения равенства (13) необходимо найти совпадения жесткостей и масс автомобиля и балки пролетного строения на уровне центра жесткости системы, а именно:

$$EI_g = \frac{48E_s I_{stb}}{L^3}. \quad (17)$$

Равенство (17) позволяет определить коэффициент жесткости системы (k), а также момент инерции балки (I_{stb}) и автомобиля (I_g). При совпадении центров масс и жесткости из формул (14) и (15) определим k , равный

$$k = \frac{0,85 \cdot E_s I_{stb}}{48L^3}. \quad (18)$$

На основании условий гипотезы В.С. Мартышкина и Е.С. Сорокина [4] считаем, что полное перемещение балки пролетного строения от нагрузки в виде системы при совпадении центров масс и жесткости справедливо условие

$$y_{\text{max}} = y_{\text{дин}} = y_{\text{ст}} \cdot \beta, \quad (19)$$

где $y_{\text{ст}}$ – максимальное вертикальное перемещение балки от статического действия нагрузки в виде системы «автомобиль + пролетное строение»

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\bar{\omega}}{\omega}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{\Psi}{2\pi}\right)^2}}, \quad (20)$$

где Ψ – коэффициент внутреннего сопротивления, для стальных мостов принимается равным 0,17 (по С.А. Бернштейну и С.А. Ильясевичу); $\bar{\omega}$ – частота вынужденных колебаний системы; ω – частота собственных колебаний системы, равная

$$\omega = \frac{i}{2\pi} \sqrt{\frac{E_s I_{stb} \cdot i^2 \cdot \pi^2}{L^2} - m \cdot V^2} / (m_0 + m), \quad (21)$$

где m_0 – масса 1 п. м. балки $\cong \frac{P}{g}$; m – масса автомобиля; V – скорость движения; $i = 1$ – форма колебания; $E_s I_{stb}$ – жесткость балки.

Выражение (20) имеет положительное решение при условии

$$V^2 \leq \frac{E_s I_{stb} \cdot i^2 \cdot \pi^2}{m \cdot L^2}.$$

Рассмотренная в формуле (20) частота собственных колебаний системы ω определяется как сумма частот автомобиля и балок пролетного строения, $\omega = \omega_a + \omega_b$. Также она может быть выражена следующей формулой:

$$\omega^2 = \frac{C_{\text{подв}}^{\text{п.з}}}{M_0}, \quad (22)$$

где $C_{\text{подв}}^{\text{п.з}}$ – приведенная жесткость соответственно передней, задней оси; M_0 – масса, приходящаяся на соответствующую ось из условия распределения.

Из работы [1] известно, что

$$\varepsilon_i = \frac{\rho_n^2}{a \cdot b},$$

где ρ_n^2 – радиус инерции автомобиля поперек оси, проходящей через центр тяжести; ε_i – коэффициент распределения массы автомобиля; a, b – расстояния от центра тяжести автомобиля до передней (a), задней (b) оси.

Считается, что при $\varepsilon = 1$ колебания автомобиля сосредотачиваются в точке, где происходит совпадение центра масс и жесткости. При совпадении центра масс и жесткости в сталежелезобетонном сечении балки коэффициент распределения массы между железобетонной плитой и стальной балкой относительно радиуса инерции ρ в процессе колебаний от подвижной динамической нагрузки с плитой проезжей части на стальные балки будет пропорционален частоте колебаний и равные соответственно [2]

$$\varepsilon_m = \sqrt[4]{\rho^2 \frac{m}{E_b I_b}}, \quad (23)$$

где m – масса системы; $E_b I_b$ – жесткость железобетонной плиты проезжей части.

Затухание колебаний происходит одновременно в системе по закону пропорциональности распределения масс и характеризуется коэффициентом Бернштейна – Ильясевича λ , равным

$$\lambda = \frac{4\pi \cdot \varepsilon_i \cdot \bar{\omega}_a^2}{\omega_b}, \quad (24)$$

где $\bar{\omega}_a$ – частота вынужденных колебаний автомобиля; ω_b – частота собственных колебаний железобетонной плиты.

При $\varepsilon_i = 1$ выполняется условие независимости колебания передней и задней частей автомобиля. При $\varepsilon_i = 0,8-1,2$ колебания поддрессоренной массы под передней и задней подвеской являются практически несвязанными. При $\varepsilon_i = 0,7-1,4$ считается, что колебание осуществляется только массой (M_3) задней поддрессоренной части автомобиля, равной

$$M_3 = m_a \frac{a \cdot b - \rho^2}{(a + b)^2}, \quad (25)$$

где m_a – общая поддрессоренная масса автомобиля.

В этом случае жесткость подвесок поддрессоренной части автомобиля характеризуется вертикальным перемещением около центра массы поддрессоренной части автомобиля пропорционального коэффициенту распределения ε_m аналогично ε_i :

$$\varepsilon_m = \frac{\rho^2}{a \cdot b}. \quad (26)$$

Приравняв выражение $\varepsilon_m = \varepsilon_i$, получим

$$\rho = \sqrt{\frac{a \cdot b \cdot m}{E_b I_b}}, \quad (27)$$

где ρ – радиус инерции автомобиля относительно оси, проходящей через центр жесткости системы.

Значение частоты колебаний от передней и задней поддрессоренной части автомобиля, передаваемой от железобетонной плиты на металлические балки, будет

$$\omega_n^2 = \frac{Z_0^1(y_i)}{M_n}; \quad \omega_3^2 = \frac{Z_0^3(y_i)}{M_3}, \quad (28)$$

где M_n, M_3 – масса, приходящаяся на переднюю и заднюю подвески соответственно; $Z_0^1(y_i), Z_0^3(y_i)$ – жесткость (перемещение) подвесок – передней и задней соответственно.

Из работы [5] в общем виде известна зависимость между жесткостью балки пролетного строения и периодом колебаний в виде $T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{EI}}$, тогда выражение для T примем в виде

$$E_s I_{stb} = 4\pi^2 \frac{M}{T^2}, \quad (29)$$

где M – приведенная масса пролетного строения.

Аналогично считаем справедливым условие

$$\frac{EI_{ст}}{EI_g} = \frac{y_{ст}}{y_{дин}}, \quad (30)$$

где $EI_{ст}$ – статическая жесткость; EI_g – динамическая жесткость; $y_{ст}, y_{дин}$ – статический и динамический прогиб [3].

В выражении (30) величину динамического прогиба сталежелезобетонной балки в случае соосной передачи колебания от автомобиля через железобетонную плиту проезжей части на стальные балки с достаточной достоверностью можно определить по формуле

$$y_{дин} = y_{max} = y_{ст} \cdot g \left[\frac{1 + (2\psi \cdot \beta)^2}{(1 - \beta^2)^2 + (2\psi \cdot \beta)^2} \right]^{1/2}, \quad (31)$$

где β определяется из выражения (20); $\psi \cong 0,17$; $g = 9,81 \text{ м/с}^2$; $y_{\text{ст}}$ – статический прогиб балки пролетного строения от веса системы, равный

$$y_{\text{ст}} = \frac{\sum P_i \cdot L^4}{6,38E \cdot h_{\text{ст}}^3}, \quad (32)$$

где $h_{\text{ст}}$ – высота стальной балки; $\sum P_i = P_{\text{авт}} + P^{(I+II)n}$.

Выражения (17), (22) – (24) соответствуют условиям [4]:

$$\left. \begin{aligned} y_{\text{дин}} = y_{\text{max}} = 1,95y_{\text{ст}} \\ k_g = 0,4k \cdot \bar{\omega} \end{aligned} \right\}, \quad (33)$$

где k – коэффициент жесткости пролетного строения при совпадении центров

масс и жесткости; $\bar{\omega} = \sqrt{\frac{EI_g}{m_g}}$ – частота вынужденных колебаний автомобиля;

m_g – динамическая масса системы; $\bar{\omega} \cong 2/3\omega$; $\omega = 7,4 \frac{k_g}{h}$; k_g – коэффициент динамической жесткости системы.

Тогда масса железобетонной плиты пролетного строения, участвующая в передаче колебаний на стальные балки, определяется из выражения

$$m_6 = \frac{2,76 \cdot E_s I_{\text{стб}}}{L^3}. \quad (34)$$

Затухание колебаний, передающееся от железобетонной плиты проезжей части на стальные балки сталежелезобетонного пролетного строения, характеризуется известным из работы [6] параметром затухания, равным

$$S = \frac{2k_g}{y_{\text{max}}}. \quad (35)$$

Подтверждение приведенных исследований рассмотрим на примере: автомобиль двухосный $P_{\text{вр}} = 25 \text{ тс}$ воздействует на балку пролетного строения гармонической нагрузкой $\frac{25 \text{ тс}}{g} = 2,5 \text{ тс}$ и с амплитудой вертикального перемещения $0,04 \text{ м}$; частота собственных колебаний балки принята 10 Гц . Автомобиль имеет две подвески и четыре амортизатора. Принимается: $C_{\text{ш1}}$; $C_{\text{ш2}}$; $C_{\text{ш3}}$; $C_{\text{ш4}}$ – жесткость каждого амортизатора. Определить жесткость пружин амортизаторов каждого колеса подвески при условии совпадения центра масс и жесткости автомобиля ($P_{\text{вр}}$) и пролетного строения ($P_{\text{пост}}$) позволит условие: вертикальное давление не должно превышать $2,5 \text{ тс}$.

Согласно (1), (5) передаточное число равно $TR = \frac{2,5}{25} = 0,1$; $\frac{1}{TR} = 10$.

При $\beta^2 \geq \sqrt{2}$ значение $\beta^2 \geq 1,41$. Тогда $\frac{1}{TR} = \beta - 1$. Следовательно, $\beta = 9$.

Используя функции Арганда [3] в виде $\beta^2 = \frac{\bar{\omega}^2}{\omega^2}$, получаем $\omega = 10$ Гц и $\beta = 9$ Гц при совпадении центров масс и жесткости. $\omega = 30$ Гц – частота вынужденных колебаний автомобиля.

$$\text{Общая жесткость подвесок } C_{\text{ш}} = \frac{\bar{\omega}^2 \cdot P_{\text{вр}}}{9 \cdot g} = 250 \text{ тс/м.}$$

Тогда $C_{\text{ш1}} = \frac{250}{4} = 62,5$ тс/м. Перемещение амортизатора $y_{\text{ш}} = \frac{2,5}{62,5} = 0,04$ м, что соответствует гармоническому нагружению силой, равной 2,5 тс.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Щупляков, В.С. Колебания и нагруженность трансмиссии автомобиля / В.С. Щупляков. – М. : Трансорт, 1974. – С. 323.
2. Справочник проектировщика. Металлические конструкции / под ред. М.П. Мельникова. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Стройиздат, 1980. – С.775.
3. Картопольцев, В.М. Влияние дефектов проезжей части на изменение динамических характеристик пролетных строений мостов / В.М. Картопольцев, А.В. Картопольцев, Б.Д. Колмаков // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. – 2015. – № 6. – С. 156–164.
4. Справочник проектировщика промышленных, жилых и общественных зданий и сооружений. Металлические конструкции промышленных зданий и сооружений / под ред. Н.П. Мельникова. – М. : Гос. изд-во лит-ры по строительству, архитектуре и строительным материалам, 1962. – С. 625.
5. Кузнецов, Г.К. Динамические характеристики пролетного строения и отдельных балок его составляющих / Г.К. Кузнецов // Теоретические и экспериментальные исследования мостов и строительных конструкций : сб. научных трудов. – Омск, 1970. – № 3. – С. 57–64.
6. Клаф, Р. Динамика сооружений / Р. Клаф, Дж. Пензиен. – М. : Стройиздат, 1979. – С. 320.

REFERENCES

1. Shhuplyakov V.S. Kolebaniya i nagruzhennost' transmissii avtomobilya [Vibrations and loading of vehicle transmission]. Moscow: Transort Publ., 1974. 323 p. (rus)
2. Mel'nikov M.P. Spravochnik proektirovshchika. Metallicheskie konstruksii [Designer manual. Metal structures]. Moscow: Sroyizdat Publ., 1980. 775 p. (rus)
3. Kartopol'tsev V.M., Kartopol'tsev A.V., Kolmakov B.D. Vliyanie defektov proezzhei chasti na izmenenie dinamicheskikh kharakteristik proletnykh stroenii mostov [Effect of trafficway defects on dynamic properties of bridge spans]. *Vestnik of Tomsk State University of Architecture and Building*. 2015. No. 6. Pp. 156–164. (rus)
4. Mel'nikov M.P. Spravochnik proektirovshchika. Metallicheskie konstruksii [Designer manual. Metal structures]. Moscow: Sroyizdat Publ., 1962. 625 p. (rus)
5. Kuznecov G.K. Dinamicheskie kharakteristiki proletnogo stroeniya i otdel'nykh balok ego sostavlyayushchikh [Dynamic properties of bridge span and its beams]. *Teoreticheskie i jeksperimental'nye issledovaniya mostov i stroitelnyh konstrukcij. Sbornik nauchnyh trudov*. Omsk, 1970. No. 3. Pp. 57–64. (rus)
6. Clough R.W., Penzien J. Dinamika sooruzhenii [Dynamics of structures]. Sroyizdat Publ., 1979. 320 p. (transl. from Engl)