

УДК 539.3

*БАРАШКОВ ВЛАДИМИР НИКОЛАЕВИЧ, докт. физ.-мат. наук,
ст. научный сотрудник, профессор,
v.n.bar@mail.ru*

*Томский государственный архитектурно-строительный университет,
634003, г. Томск, пл. Соляная, 2,*

*ГЕРАСИМОВ АЛЕКСАНДР ВЛАДИМИРОВИЧ, докт. физ.-мат. наук,
профессор, заведующий отделом,
ger@niipmm.tsu.ru*

*Научно-исследовательский институт прикладной математики
и механики Томского государственного университета,
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36*

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ ПРИ ДЕЙСТВИИ ДИНАМИЧЕСКОЙ И СТАТИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ

Рассматриваются вопросы расчёта напряжённо-деформированного состояния осесимметричных оболочечных упругопластических составных конструкций при действии динамической и статической нагрузки. При интенсивном нагружении изучаемые процессы деформирования протекают с проявлением физической и геометрической нелинейности. Поэтому реализация задач проводится на основе использования численных методов. Рассмотрен подход к проблеме с позиций системного анализа, когда для одной и той же конструкции создаётся не одна модель, а семейство моделей различного уровня сложности и алгоритмов для их реализации. Сопоставление результатов позволяет сделать достаточно обоснованные оценки границ применимости и точности различных моделей, а также разработать экономичную схему расчёта напряжённо-деформированного состояния.

Ключевые слова: теория упругости и пластичности; составные осесимметричные пространственные конструкции; статическая и динамическая задача; перемещения; деформации; напряжения; вариационно-разностный метод; метод конечных разностей.

VLADIMIR N. BARASHKOV, DSc, Professor,

v.n.bar@mail.ru

Tomsk State University of Architecture and Building,

2, Solyanaya Sq., 634003, Tomsk, Russia,

ALEKSANDER V. GERASIMOV, DSc, Professor,

ger@niipmm.tsu.ru

National Research Tomsk State University,

36, Lenin Ave., 634050, Tomsk, Russia

STRESS-STRAIN STATE OF ELASTOPLASTIC ROTATIONAL SHELLS UNDER DYNAMIC AND STATIC LOADS

The paper presents the analysis of stress-strain state of axisymmetric elastoplastic rotational shells under the dynamic and static loads. Under the intensive loading, the deformation pro-

cesses occur with the manifestation of the physical and geometric nonlinearity. Therefore, the task implementation is based on the use of numerical methods. The problem approach is based on the systems analysis, which implies the creation of several models of different complexity and implementation algorithms rather than one model for one structure. A comparison of the obtained results allows estimating the limits of applicability and accuracy of the different models and developing the efficient analysis of the stress-strain state.

Keywords: theory of elasticity and plasticity; composite axisymmetric spatial structures; static and dynamic problems; displacement; deformation; stress; variable difference method; finite difference method.

Рассматриваются вопросы расчёта напряжённо-деформированного состояния (НДС) осесимметричных оболочечных упругопластических составных конструкций при действии динамической и статической нагрузки. Поскольку интенсивность нагрузок принимается достаточно высокой, процессы деформирования протекают с проявлением физической и геометрической нелинейностей, реализация соответствующих математических моделей проводится с использованием численных методов.

Традиционно оценки получаемых численными методами результатов выполняются в рамках реализуемых ими моделей сопоставлением с решением тестовых задач, путём исследования внутренней сходимости алгоритма при изменении размеров конечно-разностных сеток, по степени выполнения граничных условий и т. д. Как правило, этим обосновывается достоверность результатов.

В работе на примере решения конкретной задачи о НДС конструкции с применением физического и математического моделирования рассмотрен подход к проблеме с позиций системного анализа, когда для одной и той же конструкции создаётся не одна, а целый ряд моделей различного уровня сложности. Сопоставление получаемых с их использованием результатов позволяет без привлечения ограниченных экспериментальных данных сделать достаточно обоснованные оценки границ применимости и точности различных моделей, а также разработать наиболее экономичную схему расчёта.

Для конструкции в виде оболочки вращения при внутреннем давлении рассматривается семейство моделей различного уровня сложности:

- 1) по теории оболочек в динамической постановке;
- 2) с позиций пространственной теории упругости и пластичности с привлечением соотношений деформационной теории пластичности А.А. Ильюшина в статической постановке;
- 3) согласно теории течения, следующего диаграмме идеального упругопластического тела, по методу Уилкинса [1] в пространственной динамической постановке.

1. Модель, выраженная динамическими уравнениями моментной теории оболочек

С позиций моментной теории оболочек определение НДС конструкции проводится с помощью известных двух уравнений осесимметричного движения оболочки вращения, записанных с учётом гипотез Кирхгоффа – Лява [2]:

$$\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial N_1}{\partial s} + (N_2 - N_1) \frac{\sin \alpha}{R} - \frac{1}{R_1} \left[\frac{\partial M_1}{\partial s} + (M_2 - M_1) \frac{\sin \alpha}{R} \right] + q_1(s, t);$$

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 M_1}{\partial s^2} + \frac{\partial}{\partial s} \left[(M_2 - M_1) \frac{\sin \alpha}{R} \right] + \frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} + q_3(s, t) - \left[\frac{\partial M_1}{\partial s} + (M_2 - M_1) \frac{\sin \alpha}{R} \right] \frac{\sin \alpha}{R}. \quad (1)$$

Здесь ρ – плотность материала оболочки; h – толщина; u, w – перемещения вдоль меридиана s и нормали к срединной поверхности, причём положительное направление нормали принято в сторону оси вращения; N_1, N_2 – усилия, приходящиеся на единицу длины координатной линии; M_1, M_2 – моменты, приходящиеся на единицу длины координатной линии; R – текущий радиус; R_1, R_2 – главные радиусы кривизны срединной поверхности; α – угол, составляемый касательной к меридиану с осью вращения, причём $\alpha > 0$, если при движении вдоль оси радиус $R(s)$ убывает; t – физическое время; q_1, q_3 – составляющие внешней нагрузки соответственно вдоль меридиана и нормали к срединной поверхности.

Записав в уравнениях (1) усилия и моменты через деформации и кривизны с использованием соотношений деформационной теории пластичности, представляем дифференциальные уравнения через перемещения. Ниже принимается, что скорость приложения и длительность действия нагрузки таковы, что можно пренебречь силами инерции в срединной поверхности оболочки в меридиональном направлении, но нельзя не учитывать инерцию элемента оболочки вдоль нормали к срединной поверхности. Поэтому в первом из уравнений движения левой частью можно пренебречь, и оно становится квазистатическим, содержащим время как параметр, входящий в нагрузку $q_1(s, t)$. Второе уравнение остаётся неизменным. Далее дифференциальные уравнения (1) решаются методом конечных разностей.

2. Модель, выраженная уравнениями пространственной теории упругости и пластичности

Описанная выше модель позволяет получить оценки напряжённого состояния оболочечной конструкции в виде усилий и моментов, при этом конкретный закон распределения напряжений по толщине связан с используемыми гипотезами теории оболочек. Известно, что гипотеза прямых нормалей приводит к увеличению жёсткости конструкции.

В свободной от этого недостатка пространственной постановке решение задачи об упругопластическом НДС осесимметричной конструкции при статическом действии нагрузки проводится вариационно-разностным методом (ВРМ). Метод базируется на вариационном принципе Лагранжа:

$$\delta \mathcal{E} = 0,$$

где \mathcal{E} – квадратичный функционал полной потенциальной энергии системы «деформируемое тело – нагрузка», который представляет собой алгебраическую сумму потенциальной энергии деформации и работы объёмных и поверхностных сил на вызванных ими перемещениях. Функционал записывается с использованием соотношений деформационной теории пластичности. Реше-

ние задачи заключается в нахождении осевых u и радиальных w перемещений, доставляющих минимум функционалу энергии \mathcal{E} .

Расчётная область в силу осевой симметрии, представляющая собой половину осевого сечения конструкции, покрывается конечно-разностной сеткой, которая разбивает область на ячейки. После аппроксимации дифференциальных операторов разностями, а интегралов – суммами решение сводится к определению минимума функции энергии \mathcal{E} многих переменных – компонент вектора перемещения, определённых в узлах сетки.

Аппроксимация производных от искомым перемещений проводится с помощью соотношений, которые в случае осесимметричного деформирования приводятся к выражениям [3, 4]:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_j \approx -\frac{\sum_{i=1}^n (u_{i+1} + u_i)(z_{i+1} - z_i)}{\sum_{i=1}^n (z_{i+1} + z_i)(r_{i+1} - r_i)}, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_j \approx \frac{\sum_{i=1}^n (u_{i+1} + u_i)(r_{i+1} - r_i)}{\sum_{i=1}^n (z_{i+1} + z_i)(r_{i+1} - r_i)},$$

где n – число вершин ячейки (в рассматриваемом случае $n = 4$); i – номер вершины; j – номер самой ячейки. Аналогично записываются выражения для производных $(\partial w/\partial r)_j, (\partial w/\partial z)_j$.

Минимизация функции полной потенциальной энергии системы \mathcal{E} проводится с использованием в каждом узле конечно-разностной сетки с номером k необходимого условия экстремума функции многих переменных в положении равновесия

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial u_k} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial w_k} = 0.$$

Получающаяся система линейных алгебраических уравнений относительно искомым перемещений реализуется прямым методом Гаусса.

3. Пространственная динамическая модель

В описанной выше модели, основанной на моментной теории оболочек (для краткости назовём её оболочечной моделью), учитывается, хотя и не в полном объёме, волновой характер деформирования конструкции. В пространственной схеме, реализуемой вариационно-разностным методом, более детальные оценки НДС получаются без учёта волновых эффектов. Объединение достоинств этих моделей, когда в пространственной постановке учитывается волновой характер деформирования, возможно в рамках метода расчёта упругопластических течений [1]. В соответствии с этим методом деформирование рассматривается в лагранжевой сетке, движущейся вместе со средой, в то время как зависимые переменные в этом методе соответствуют эйлеровой системе координат. Для расчёта течения при пластической деформации используется процедура приведения компонент девиатора напряжений на круг текучести. Метод широко используется при расчёте высокоскоростных процессов, как правило, длительностью не более десятков микросекунд. Это связано с тем, что условия устойчивости вычислительного алгоритма накладывают достаточно

жёсткие ограничения на величину шага по времени и для относительно длительных процессов требуется большой объём вычислений.

4. Результаты расчёта оболочечной конструкции

Пример расчёта оболочечной конструкции при действии нестационарного внутреннего давления приведён для случая, когда оболочка без днищ длиной l состоит из двух состыкованных секций: цилиндрической и конической. Длина каждой составляет $l/2 = 0,45$ м; радиус цилиндрической части $R = 0,26$ м; радиус меньшего основания конической секции $R_k = 0,12$ м; толщина оболочки постоянна $h = 0,004$ м. Материал моделируется упругопластическим телом с линейным упрочнением. Модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; модуль упрочнения в конкретных случаях менялся от величины $E/10$ до 0, в последнем случае, по существу, рассматривается идеальное упругопластическое тело; деформация начала текучести $\varepsilon_T = 0,002$; коэффициент Пуассона $\nu = 0,35$; плотность $\rho = 7860$ кг/м³.

Сопоставление результатов расчётов проводится по величинам, получающимся во всех трёх описанных моделях. К таким величинам, в частности, можно отнести радиальные перемещения – прогиб w . На рис. 1, где представлена расчётная схема оболочечной конструкции, приведены зависимости этих перемещений от осевой координаты z и (в случае исследования нестационарного переходного процесса) для различных моментов времени t .

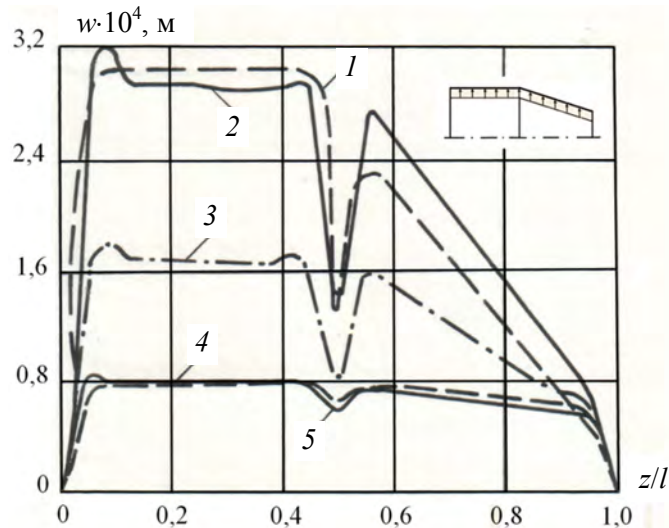


Рис. 1. Радиальные перемещения при внутреннем давлении 3 МПа:

1 – оболочечная модель, 168 мкс; 2 – пространственная модель, 168 мкс; 3 – статическая пространственная модель; 4 – оболочечная модель, 84 мкс; 5 – пространственная модель, 84 мкс

Внутреннее давление нарастало по линейному закону до момента времени 100 мкс и далее оставалось постоянным при решении задачи в динамике.

ческой постановке. Статическая задача решалась при амплитудном значении этого давления, равном 3 МПа. Этот уровень нагрузки соответствует упругой области работы материала. Кривая 1 отвечает результатам, полученным по оболочечной модели, момент времени 168 мкс, пространственная динамическая модель даёт эпюру перемещений 2.

Эти перемещения являются максимальными за всё время переходного процесса, далее начинается уменьшение прогибов и колебания около некоторого равновесного положения. Это положение хорошо определяется статическим решением, полученным по пространственной модели вариационно-разностным методом (кривая 3). Кривые 4 и 5 показывают соответственно величины перемещений по оболочечной и пространственной динамическим моделям и отвечают моменту времени 84 мкс.

Как и следовало ожидать, в области относительно небольших упругих деформаций все три модели дают достаточно хорошо согласующиеся между собой результаты. Однако это не всегда реализуется в более сложных расчётных случаях. Так, на рис. 2 приведены радиальные перемещения для всех моделей, когда давление с максимальной величиной 9 МПа приводит к существенным пластическим деформациям.

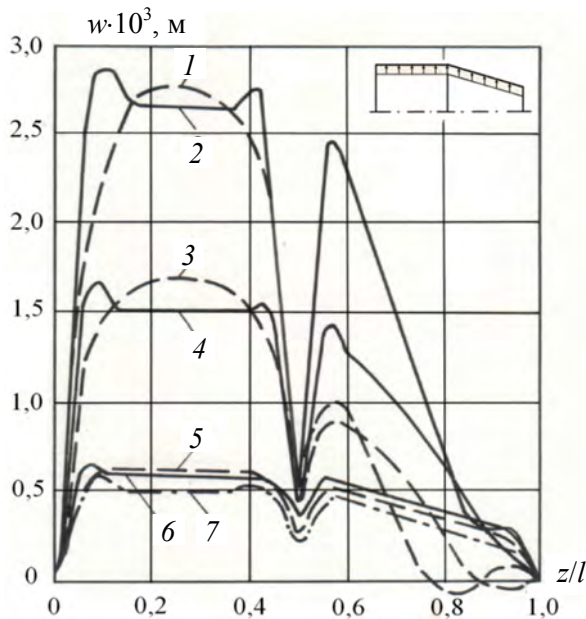


Рис. 2. Радиальные перемещения при внутреннем давлении 9 МПа: 1, 2 – оболочечная и пространственная модели, 295 мкс; 3, 4 – 211 мкс; 5, 6 – 127 мкс; 7 – статическая пространственная модель

Попутно можно отметить, что если при статическом решении величина модуля упрочнения влияет как на скорость сходимости метода упругих решения, так и на окончательные результаты расчёта НДС, то в динамической постановке это влияние практически не сказывается, по крайней мере в рассмотренном примере.

Из приведённых результатов следует, что хотя каждая из представленных моделей апробирована и проверена на достаточно большом круге разнообразных задач и в этом смысле приводит к достоверным результатам, сами по себе модели могут давать большой разброс.

Учёт динамичности действия нагрузки оказывается более важным моментом, нежели учёт пространственного характера НДС конструкции. Так, при хорошем качественном согласовании количественные различия в результатах по оболочечной и пространственной динамическим моделям относительно невелики. Разумеется, этот вывод справедлив для тонкостенных конструкций.

Как уже отмечалось, оболочечная модель может дать лишь приближённое представление о характере распределения параметров НДС по толщине конструкции. Причём этот характер в значительной мере определяется заложенными в модель гипотезами теории оболочек. Пространственные же модели дают возможность определять параметры НДС в любой точке конструкции. Характерный в этом смысле пример приведён на рис. 3, где тёмным цветом выделены ячейки конечно-разностной сетки, материал в которых работает за пределами упругости.

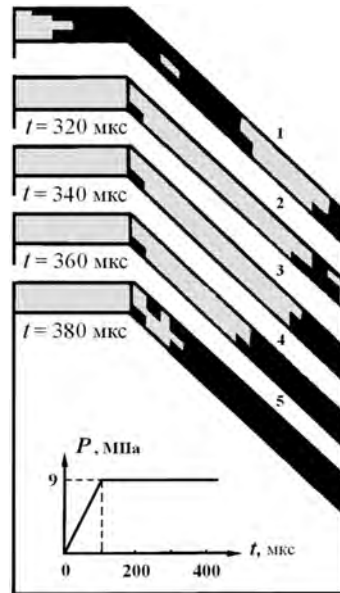


Рис. 3. Распределение зон упругопластических деформаций в конструкции при внутреннем давлении 9 МПа:

1 – статическая пространственная модель; 2–5 – динамическая пространственная модель; тёмным цветом выделены зоны конструкции, в которых материал работает за пределами упругости

Влияние нестационарности нагружения на параметры НДС в этом примере оказывается довольно значительным. В остальных частях конструкции, не показанных на рисунке, возникающие деформации не превышают деформацию начала текучести.

Таким образом, на примере решения конкретной задачи определения упругопластического НДС оболочечной конструкции при внутреннем давле-

нии рассмотрен подход с позиций системного анализа. Результатом такого подхода является экономичная схема, в которой используются 1-я и 3-я модели конструкции.

Итак, расчёт сложной конструкции можно проводить следующим образом. На первом этапе с помощью относительно простой оболочечной модели получаются оценки НДС и выделяются зоны, где значения параметров по тем или иным критериям близки к предельно допустимым значениям. После этого с помощью пространственной динамической модели можно детально оценить параметры НДС конструкции в выделенной зоне. Причём полученная на первом этапе информация может служить для постановки в интегральном виде граничных условий для выделенной расчётной области. При таком подходе объём вычислительных работ резко уменьшается по сравнению с вариантом, когда конструкция полностью рассчитывается по пространственной модели, т. к. использование простой оболочечной модели позволяет сузить область, требующую анализа на основе более полной пространственной модели.

Что касается решения задачи в статической постановке, оно может, с одной стороны, давать оценки влияния динамичности приложения нагрузки, с другой – служить эталоном, к которому должно стремиться решение динамической задачи при уменьшении скорости приложения нагрузки. Таким образом, одним из главных достоинств работы является наличие не одной модели оболочечной конструкции, реализованной и проверенной на достоверность внутренней сходимостью, а нескольких моделей.

Авторы благодарят профессора Б.А. Люкшина за обсуждение результатов статьи.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Уилкинс, М.Л. Расчет упругопластических течений / М.Л. Уилкинс // Вычислительные методы в гидродинамике : сб. статей / М.Л. Уилкинс. – М. : Мир, 1967. – С. 212–263.
2. Вольмир, А.С. Устойчивость упругих систем / А.С. Вольмир. – М. : Физматгиз, 1963. – 880 с.
3. Нох, В.Ф. СЭЛ – совместный эйлерово-лагранжев метод для расчета нестационарных двумерных задач / В.Ф. Нох // Вычислительные методы в гидродинамике : сб. статей. – М. : Мир, 1967. – С. 128–184.
4. Барашков, В.Н. Расчет напряженно-деформированного состояния толстых плит вариационно-разностным методом при действии разнонаправленных внешних нагрузок / В.Н. Барашков // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. – 2016. – № 4. – С. 67–80.

REFERENCES

1. Wilkins M.L. Calculation of elastic-plastic flows. Computational methods in fluid dynamics: Sat. articles. Moscow : Mir Publ., 1967. Pp. 212–263. (transl. from Engl.)
2. Volmir A.S. Ustoichivost' uprugikh sistem [Stability of elastic systems]. Moscow: Fizmatgiz Publ., 1963. 880 p. (rus)
3. Noh V.F. SEL – simultaneous Euler-Lagrangian method for calculation of nonstationary two-dimensional problems. Computational methods in fluid dynamics: Sat. articles. Moscow: Mir Publ., 1967. Pp. 128–184. (transl. from Engl.)
4. Barashkov V.N. Raschet napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya tolstykh plit variatsionno-raznostnym metodom pri deistvii raznonapravlennykh vneshnikh nagruzok [Stress-strain state analysis of thick plates under multidirectional external loads using variable differential method]. *Vestnik TSUAB*. 2016. No. 4. Pp. 67–80. (rus)