

СТРОИТЕЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ, ЗДАНИЯ И СООРУЖЕНИЯ

УДК 624.042.2

*ЛЯХОВИЧ ЛЕОНИД СЕМЕНОВИЧ, докт. техн. наук, профессор,
lls@tsuab.ru, lsl@sibmail.com*

*ТУХФАТУЛЛИН БОРИС АХАТОВИЧ, канд. техн. наук, доцент,
bat9203@gmail.com*

*ПУТЕЕВА ЛАРИСА ЕВГЕНЬЕВНА, канд. техн. наук,
ple@sibmail.com*

*ГРИГОРЬЕВ АНТОН ИГОРЕВИЧ, аспирант,
tag917@mail.ru*

*Томский государственный архитектурно-строительный университет,
634003, г. Томск, пл. Соляная, 2*

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДОВ ОПТИМИЗАЦИИ В ЗАДАЧАХ УСИЛЕНИЯ КОНСТРУКЦИЙ

В статье обсуждается проблема использования методов оптимизации при усилении конструкций; при этом параметры усиливаемой системы переводятся в ограничения, а в число варьируемых включаются параметры усиления. Для решения поставленной задачи используются критерии, позволяющие оценивать близость решения по усилению полка стержня двутаврового сечения дополнительными полосами переменной ширины при ограничениях на величину критической силы или первой собственной частоты колебаний. Приведены примеры, подтверждающие возможность комплексного использования методов оптимизации и сформулированных ранее критериев в задачах усиления стержней двутаврового сечения при наложенных ограничениях. Показано, что оптимальное решение может служить основой для формирования конструктивно приемлемых решений.

Ключевые слова: оптимизация; системы минимальной материалоемкости; усиление конструкций; устойчивость; частота собственных колебаний; формы потери устойчивости; формы собственных колебаний; напряжения; изгиб; функция цели; ограничения.

LEONID S. LYAKHOVICH, DSc, Professor,

lls@tsuab.ru, lsl@sibmail.com

BORIS A. TUKHFATULLIN, PhD, A/Professor,

bat9203@gmail.com

LARISA E. PUTEEVA, PhD,

ple@sibmail.com

*ANTON I. GRIGORIEV, Research Assistant,
mag917@mail.ru
Tomsk University of Architecture and Building,
2, Solyanaya Sq., 634003, Tomsk, Russia*

OPTIMIZATION METHODS IN STRUCTURE STRENGTHENING

The paper presents the problem of optimization methods used for structural strengthening. The parameters of structure to be strengthen are converted into restrictions, while variable parameters include strengthening ones. Criteria are suggested in this work allow the minimum materials consumption of the H-beam strengthening under the restrictions of the critical load or the first eigenfrequency. The examples of a complex use of optimizing methods and criteria are given in this paper.

Keywords: optimization; minimum materials consumption; structural strengthening; stability; buckling mode, eigenfrequency; stress; flexure; objective function; constraints.

Несмотря на большое количество публикаций по проблемам оптимизации конструкций и сооружений (например, [1, 2, 6] и др.), в реальном проектировании эти методы используются крайне ограниченно.

В частности, это объясняется тем, что существует точка зрения, которая относит методы оптимизации к чисто теоретическим изысканиям, имеющим очень ограниченное практическое значение. Действительно, во многих случаях оптимальные проекты оказываются технологически трудно реализуемыми. Однако по мере развития методов оптимизации, изучения свойств оптимальных систем появляются возможности сближения методов оптимального и реального проектирования. Во многих случаях роль оптимального проекта при реальном проектировании может рассматриваться, например, в двух аспектах ([2, 4, 5] и др.).

Во-первых, оптимальный проект может рассматриваться как идеализированный объект в смысле предельного. Эта функция оптимального проекта позволяет оценивать реальное конструкторское решение по критерию его близости к предельному (например, по материалоемкости, несущей способности, динамическим характеристикам и т. д.).

Во-вторых, оптимальный проект может использоваться как ориентир при реальном проектировании. При таком подходе реальное проектирование рассматривается как поэтапный процесс отхода от идеального объекта с целью выполнения требований, не учтенных в оптимальном проекте. Возможно и другое построение процесса проектирования – как движение от начального варианта в направлении идеального объекта. При этом на каждом этапе реального проектирования появляется возможность оценки изменения показателя оптимальности объекта по сравнению как с начальным, так и с идеализированным решением.

Отмеченные выше возможности применения методов оптимизации сооружений могут быть полезны и в проектах усиления конструкций.

При использовании методов оптимизации в задачах усиления параметры усиливаемой системы переводятся в ограничения, а в число варьируемых включаются параметры усиления.

Также могут использоваться частные критерии, оценивающие близость полученного решения усиления к оптимальному [2], в том числе и те, которые сформулированы для задач усиления [3].

Покажем на примерах реальность использования в задачах усиления конструкций отмеченных возможностей методов оптимизации и критериев, оценивающих близость полученных решений к оптимальному.

В работе [3] сформулированы критерии, позволяющие оценивать близость решения по усилению полки стержня двутаврового сечения дополнительными полосами переменной ширины (рис. 1) при ограничениях на величину критической силы или первой собственной частоты. На рис. 1 обозначены: b_1 – высота усиленного сечения; b_{21} – постоянная по длине стержня ширина полки усиливаемого стержня; $b_{22}(x)$ – ширина дополнительной полосы, изменяющаяся по длине стержня; δ_{p1} , δ_{p2} – соответственно толщина полки усиливаемого стержня и толщина дополнительной полосы; δ_{st} – толщина стенки.

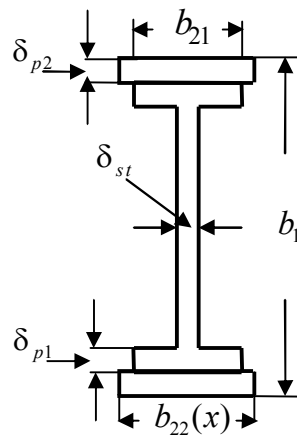


Рис. 1

При оптимальном усилении полки двутавра дополнительной полосой варьируемым параметром является только ширина дополнительной полосы $b_{22}(x)$, а остальные параметры сечения сохраняются постоянными. В этом случае функция цели записывается в виде

$$V = 2 \int_0^{\ell} \delta_{p2} b_{22}(x) dx. \quad (1)$$

Если решается задача устойчивости, то ограничение имеет вид

$$P \leq P_{кр}. \quad (2)$$

В формуле (2) P – действующая сила; $P_{кр}$ – критическая сила для усиленной системы.

Критерий, оценивающий близость решения по усилению к минимально материалоемкому, сформулирован в работе [3]:

$$\bar{\sigma}_{1pt}(x) = \sqrt{\sigma_{1p}^2(x) \frac{b_1}{2\delta_{p2}} - \sigma_{1pt}^2(x) \left(\frac{b_1}{2\delta_{p2}} - 1 \right)} = \text{const}. \quad (3)$$

В формуле (3) $\sigma_{1p}(x)$, $\sigma_{1pt}(x)$ – напряжения, возникающие по эпюре моментов при потере устойчивости в крайних волокнах усиленного стержня

и крайних волокнах исходного двутаврового сечения соответственно, $\bar{\sigma}_{1pt}(x)$ – приведенное напряжение.

Таким образом, в работе [3] показано, что при усилении полка стержня двутаврового сечения дополнительными листами постоянной толщины и варьированием по длине стержня их шириной $b_{22}(x)$, при ограничении по устойчивости, минимальная материалоемкость достигается, когда стержень становится бруском равного сопротивления по отношению к приведенным напряжениям $\bar{\sigma}_{1pt}(x)$, возникающим при потере устойчивости.

При решении задачи об оптимальном усилении, при ограничении на величину первой собственной частоты, функция цели записывается в виде (1), а ограничение в виде

$$\omega_0 \leq \omega_1. \quad (4)$$

В ограничении (4) ω_0 – заданная величина, а ω_1 – значение первой частоты собственных колебаний усиленной системы.

Критерий, оценивающий близость решения по усилению к минимально материалоемкому, для этого случая также сформулирован в работе [3]:

$$\bar{\sigma}_{1\omega t}(x) = \sqrt{\sigma_{1\omega}^2(x) \frac{b_1}{2\delta_{p2}} - \sigma_{1\omega t}^2(x) \left(\frac{b_1}{2\delta_{p2}} - 1 \right) - 3E \cdot \omega_0^2 (v_\omega(x))^2 \rho} = \text{const}. \quad (5)$$

В (5) $\sigma_{1\omega}(x)$, $\sigma_{1\omega t}(x)$ – напряжения, возникающие по эпюре моментов при собственных колебаниях по первой форме соответственно в крайних волокнах усиленного стержня и крайних волокнах исходного двутаврового сечения; $\bar{\sigma}_{1\omega t}$ – приведенное напряжение; E – модуль упругости; v_ω – ординаты соответствующей формы собственных колебаний; ρ – удельная масса материала стержня.

Итак, в работе [3] показано, что при усилении полка стержня двутаврового сечения дополнительными листами постоянной толщины и варьированием по длине стержня их шириной $b_{22}(x)$, при ограничении на величину первой собственной частоты минимальная материалоемкость достигается, когда стержень становится бруском равного сопротивления по отношению к приведенным напряжениям $\bar{\sigma}_{1\omega t}(x)$, возникающим при колебаниях по соответствующей собственной форме.

Так как формы потери устойчивости и собственных колебаний, а следовательно, и возникающие при этом напряжения определены с точностью до постоянного множителя, то нормирование приведенных напряжений можно выполнить, отыскивая сечение, в котором $\bar{\sigma}_{1pt}(x)$ в задаче устойчивости или $\bar{\sigma}_{1\omega t}(x)$ в задаче колебаний имеет наибольшую величину, и на него делаются приведенные напряжения в остальных сечениях. Таким образом, при таком нормировании приведенных напряжений критерии (3) и (5) характери-

зуют близость решения к оптимальному близостью величин $\bar{\sigma}_{1pt}(x)$ или $\bar{\sigma}_{1\omega t}(x)$ к единице.

Приведем конкретные примеры, подтверждающие возможность комплексного использования методов оптимизации и критериев (3) и (5) в задачах усиления стержней двутаврового сечения при ограничениях на величину критической силы или первой собственной частоты.

Пример 1. Рассматривается стержень двутаврового сечения (рис. 1). Размеры сечения $b_1 = 0,12$ м, $b_{21} = 0,06$ м, $\delta_{st} = 0,01$ м, $\delta_{p1} = 0,01$ м. Пролет стержня $\ell = 9$ м, модуль упругости материала стержня $E = 206\,000$ МПа. Условия закрепления стержня приведены на рис. 2, а. Стержень сжимается силой P .

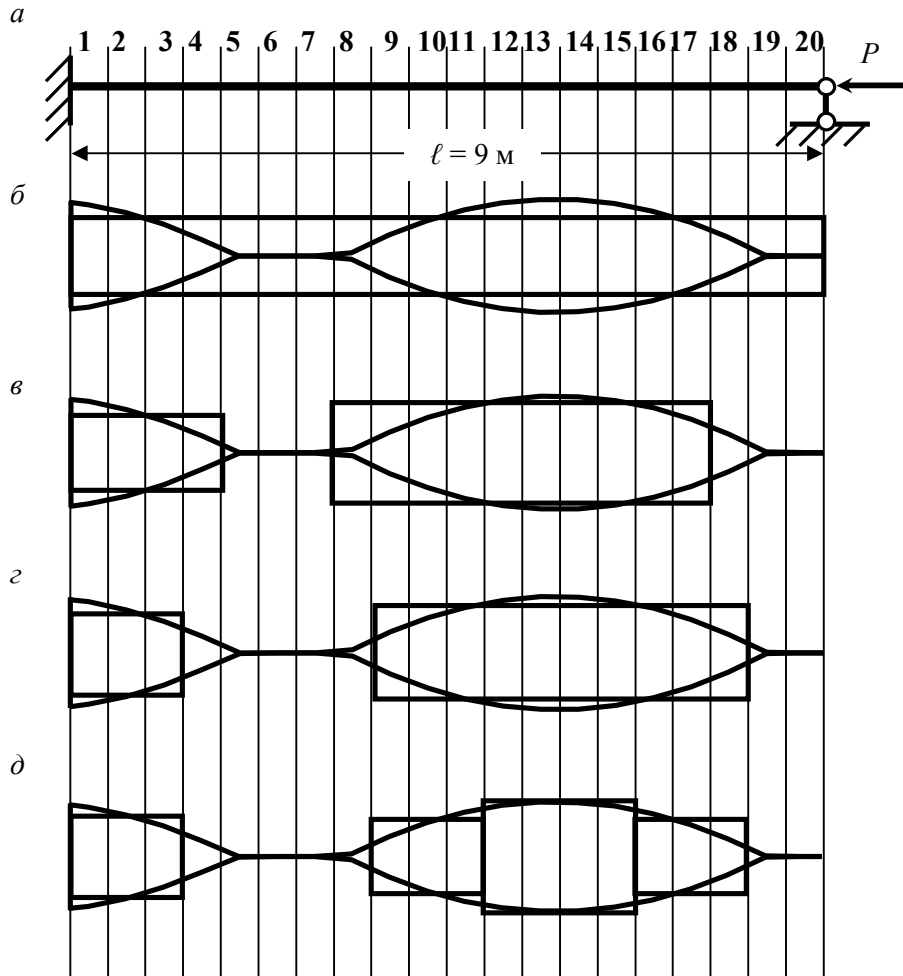


Рис. 2

Расчет стержня на устойчивость и оптимизацию усиления выполнялся на основе дискретной модели из $n = 20$ равных участков длиной $\Delta\ell = \ell / n$ каж-

дый. Поэтому функция цели (1) и размеры ширины дополнительных полос принимают конечномерную форму

$$V = 2\delta_{p2}\Delta\ell \sum_{i=1}^{20} b_{22}[i]. \quad (6)$$

Толщина дополнительных листов принята $\delta_{p2} = 0,01$ м. Требуется определить закон изменения ширины дополнительных полос по длине стержня $b_{22}(x)$ таким образом, чтобы для усиленного стержня $P_{кр} = 500$ кН и при этом материалоемкость усиления была бы минимальной. Оптимизация реализуется методом случайного поиска. Результаты представлены в табл. 1.

Таблица 1

№ сечения	$b_{22}[i]$	$\bar{\sigma}_{1p_i}(x)$
1	2	3
1	0,082082	0,9999
2	0,069373	0,9998
3	0,050829	0,9999
4	0,026503	0,9997
5	0,000256	0,9264
6	0,000047	0,2585
7	0,000054	0,4414
8	0,005052	0,9984
9	0,033650	0,9996
10	0,056475	0,9999
11	0,073538	0,9998
12	0,084757	1,0000
13	0,090213	0,9999
14	0,089837	1,0000
15	0,083684	0,9998
16	0,071707	0,9999
17	0,053906	0,9999
18	0,030354	0,9996
19	0,001195	0,9952
20	0,000048	0,3518

Во втором столбце табл. 1 приведены по сечениям размеры ширины дополнительной полосы $b_{22}[i]$ (рис. 2, б). Объем материала полос усиления со-

ставляет $V = 2\delta_{p2}\Delta\ell \sum_{i=1}^{20} b_{22}[i] = 0,008132$ м³.

На этом же рисунке показан вариант усиления полосой постоянной ширины по всей длине стержня. Размеры ширины этой полосы приведены в столбце 2 табл. 2. В третьем столбце табл. 1 показаны значения приведенных напряжений $\bar{\sigma}_{1pt}(x)$ (3). Как отмечалось выше, близость решения к минимально материалоёмкому оценивается близостью приведенных напряжений к единице. Во всех сечениях, кроме четырех (5, 6, 7 и 20), величины $\bar{\sigma}_{1pt}(x)$ отличаются от единицы на доли процентов. В сечениях 5, 6, 7 и 20 ширина дополнительной полосы очень мала, т. е. отмеченные сечения не нуждаются в усилении. Таким образом, полученное решение по усилению двутавра достаточно близко к минимально материалоёмкому.

Таблица 2

№ сечения	Ширина дополнительной полосы $b_{22}[i]$				
	2	3	4	5	6
1	0,062609	0,058045	0,067012	0,067814	0,082082
2	0,062609	0,058045	0,067012	0,067814	0,069373
3	0,062609	0,058045	0,067012	0,067814	0,050829
4	0,062609	0,058045	0,000000	0,000000	0,026503
5	0,062609	0,000000	0,000000	0,000000	0,000256
6	0,062609	0,000000	0,000000	0,000000	0,000047
7	0,062609	0,000000	0,000000	0,000000	0,000054
8	0,062609	0,075278	0,000000	0,000000	0,005052
9	0,062609	0,075278	0,075311	0,063733	0,033650
10	0,062609	0,075278	0,075311	0,063733	0,056475
11	0,062609	0,075278	0,075311	0,063733	0,073538
12	0,062609	0,075278	0,075311	0,093109	0,084757
13	0,062609	0,075278	0,075311	0,093109	0,090213
14	0,062609	0,075278	0,075311	0,093109	0,089837
15	0,062609	0,075278	0,075311	0,093109	0,083684
16	0,062609	0,075278	0,075311	0,057096	0,071707
17	0,062609	0,075278	0,075311	0,057096	0,053906
18	0,062609	0,000000	0,075311	0,057096	0,030354
19	0,062609	0,000000	0,000000	0,000000	0,001195
20	0,062609	0,000000	0,000000	0,000000	0,000048
V	0,011270	0,008865	0,008587	0,008446	0,008132
e	0%	27,13%	31,24%	33,44%	38,58%

Очевидно, что в реальном проекте в большинстве случаев полученное решение непосредственно применять нецелесообразно. Его прямое использование приведет к значительным отходам материала. Однако полученное решение может служить основой для создания более технологичных проектов

и одновременно выполнять функцию оценки близости технологически приемлемого решения к минимально материалоемкому.

Рассмотрим четыре наиболее технологичных варианта усиления. Для всех вариантов критическая сила усиленной системы удовлетворяет ограничению (2) в виде равенства $P_{кр} = 500$ кН. Результаты приведены в табл. 2.

В первом варианте (столбец 2 табл. 2) принято усиление каждой полки одной полосой постоянной ширины по всей длине балки. Объем материала полос усиления составляет $0,011270$ м³. Минимально материалоемкий вариант (столбец 2 табл. 1 и столбец 6 табл. 2) легче на 38,58 %.

Объем материала полос усиления по каждому варианту (V) и результаты экономии материала по сравнению с первым вариантом в процентах (e) приведены в двух последних строках табл. 2 соответственно.

Во втором варианте стержень разделяется на четыре части. В первую часть входят участки 1, 2, 3 и 4 дискретной модели. Ширина усиливающей полосы этой части стержня $b_{22}[1] = b_{22}[2] = b_{22}[3] = b_{22}[4] = \bar{b}_{22}[1]$. Судя по минимально материалоемкому варианту, эта часть стержня требует значительного усиления. Во вторую часть входят участки 5, 6 и 7 дискретной модели. Ширина усиливающей полосы этой части стержня $b_{22}[5] = b_{22}[6] = b_{22}[7] = \bar{b}_{22}[2]$. Судя по минимально материалоемкому варианту, эта часть стержня требует незначительного усиления.

В третью часть входят участки дискретной модели с 8 по 17 включительно. Ширина усиливающей полосы этой части стержня $b_{22}[8] = b_{22}[9] = b_{22}[10] = b_{22}[11] = b_{22}[12] = b_{22}[13] = b_{22}[14] = b_{22}[15] = b_{22}[16] = \bar{b}_{22}[3]$.

Судя по минимально материалоемкому варианту, эта часть стержня требует значительного усиления.

В четвертую часть входят участки дискретной модели 18, 19, 20. Ширина усиливающей полосы этой части стержня $b_{22}[18] = b_{22}[19] = b_{22}[20] = \bar{b}_{22}[4]$. Судя по минимально материалоемкому варианту, эта часть стержня требует незначительного усиления. Для рассматриваемого варианта требуется отыскать такие значения варьируемых параметров $\bar{b}_{22}[1]$, $\bar{b}_{22}[2]$, $\bar{b}_{22}[3]$, $\bar{b}_{22}[4]$, при которых бы выполнялось условие $P_{кр} = 500$ кН, а объем материала усиливающих полос был минимальным.

Оптимизация выполнялась методом случайного поиска. *Варьируемые параметры* $\bar{b}_{22}[k]$. При этом вводилось дополнительное ограничение. Если в процессе поиска какое-нибудь значение $\bar{b}_{22}[k]$ оказывалось меньше, чем 0,03 м, то принималось $\bar{b}_{22}[k] = 0$. Результаты приведены в третьем столбце табл. 2. Объем материала полос усиления составил $0,008865$ м³, что на 27,13 % меньше, чем в первом варианте. На рис. 2, в показаны ширина усиливающей полосы данного и минимально материалоемкого вариантов.

В третьем варианте стержень также разделяется на четыре части. В первую часть входят участки 1, 2 и 3 дискретной модели. Ширина усиливающей полосы этой части стержня $b_{22}[1] = b_{22}[2] = b_{22}[3] = \bar{b}_{22}[1]$. Судя по минимально материалоемкому варианту, эта часть стержня требует значительного усиления. Во вторую часть входят участки 4, 5, 6, 7 и 8 дискретной модели. Ширина усиливающей полосы этой части стержня $b_{22}[4] = b_{22}[5] = b_{22}[6] = b_{22}[7] = b_{22}[8] = \bar{b}_{22}[2]$. Судя по минимально материалоемкому варианту, эта часть стержня требует незначительного усиления. В третью часть входят участки дискретной модели с 9 по 18 включительно. Ширина усиливающей полосы этой части стержня $b_{22}[9] = b_{22}[10] = b_{22}[11] = b_{22}[12] = b_{22}[13] = b_{22}[14] = b_{22}[15] = b_{22}[16] = b_{22}[17] = b_{22}[18] = \bar{b}_{22}[3]$. Судя по минимально материалоемкому варианту, эта часть стержня требует значительного усиления. В четвертую часть входят два участка дискретной модели 19 и 20. Ширина усиливающей полосы этой части стержня $b_{22}[19] = b_{22}[20] = \bar{b}_{22}[4]$. Судя по минимально материалоемкому варианту, эта часть стержня требует незначительного усиления. Для рассматриваемого варианта постановка задачи такая же, как и в предыдущем.

Результаты приведены в четвертом столбце табл. 2. Объем материала полос усиления составил $0,008587 \text{ м}^3$, что на 31,24 % меньше, чем в первом варианте. На рис. 2, ε показаны ширина усиливающей полосы данного и минимально материалоемкого вариантов.

В четвертом варианте стержень разделяется на шесть частей. В первую часть входят участки 1, 2 и 3 дискретной модели. Ширина усиливающей полосы этой части стержня $b_{22}[1] = b_{22}[2] = \bar{b}_{22}[1]$. Судя по минимально материалоемкому варианту, эта часть стержня требует значительного усиления. Во вторую часть входят участки 4, 5, 6, 7 и 8 дискретной модели. Ширина усиливающей полосы этой части стержня $b_{22}[4] = b_{22}[5] = b_{22}[6] = b_{22}[7] = b_{22}[8] = \bar{b}_{22}[2]$. Судя по минимально материалоемкому варианту, эта часть стержня требует незначительного усиления. В третью часть входят участки дискретной модели с 9 по 11 включительно. Ширина усиливающей полосы этой части стержня $b_{22}[9] = b_{22}[10] = b_{22}[11] = \bar{b}_{22}[3]$. Судя по минимально материалоемкому варианту, эта часть стержня требует значительного усиления. В четвертую часть входят четыре участка дискретной модели 12, 13, 14 и 15. Ширина усиливающей полосы этой части стержня $b_{22}[12] = b_{22}[13] = b_{22}[14] = b_{22}[15] = \bar{b}_{22}[4]$. Судя по минимально материалоемкому варианту, эта часть стержня требует усиления. В пятую часть входят три участка дискретной модели 16, 17, и 18. Ширина усиливающей полосы этой части стержня $b_{22}[16] = b_{22}[17] = b_{22}[18] = \bar{b}_{22}[5]$. Судя по минимально материалоемкому варианту, эта часть стержня требует усиления. В шестую часть входят два участка дискретной модели 19 и 20. Ширина усиливающей полосы

этой части стержня $b_{22}[19] = b_{22}[20] = \bar{b}_{22}[6]$. Судя по минимально материалоемкому варианту, эта часть стержня требует незначительного усиления.

Для рассматриваемого варианта постановка задачи такая же, как и в предыдущем. Результаты приведены в пятом столбце табл. 2. Объем материала полос усиления составил $0,008446 \text{ м}^3$, что на 33,44 % меньше, чем в первом варианте. На рис. 2, *д* показана ширина усиливающей полосы данного и минимально материалоемкого вариантов.

Данным примером иллюстрировалась возможность использования методов оптимизации в задачах усиления, а также критерия оценки близости полученного «предельно» оптимального решения к минимально материалоемкому при ограничениях на величину критической силы. В частности, показано, что «предельно» оптимальное решение может служить основой для формирования конструктивно приемлемых решений.

Приведем еще один пример, иллюстрирующий возможности методов оптимизации в задачах усиления при ограничениях на величину первой частоты собственных колебаний.

Пример 2. Рассматривается стержень двутаврового сечения (см. рис. 1). Размеры сечения $b_1 = 0,12 \text{ м}$, $b_2 = 0,06 \text{ м}$, $\delta_{st} = 0,01 \text{ м}$, $\delta_p = 0,01 \text{ м}$. Пролет стержня $\ell = 6 \text{ м}$, модуль упругости материала стержня $E = 206000 \text{ МПа}$. Условия закрепления стержня приведены на рис. 3, *а*. Стержень несет распределенную массу интенсивностью $m = 100 \text{ кг/м}$.

Расчет стержня на собственные колебания и оптимизацию усиления выполнялся на основе дискретной модели из $n = 20$ равных участков длиной $\Delta\ell = \ell/n$ каждый. Поэтому приведенные к узлам массы составят 30 кг в каждом узле. Удельная масса материала стержня $\rho = 7850 \text{ кг/м}^3$. Первая собственная частота рассматриваемого стержня составляет $\omega_1 = 24,25 \text{ с}^{-1}$. Рассмотрим случай, когда необходимо усилить стержень так, чтобы его первая собственная частота увеличилась до значения $\omega_0 = 35 \text{ с}^{-1}$. Усиливаются полки двутавра дополнительными листами (см. рис. 1). Пусть толщина дополнительных листов принята $\delta_{p2} = 0,01 \text{ м}$. Требуется определить закон изменения ширины дополнительных полос по длине стержня $b_{22}[i]$ таким образом, чтобы для усиленного стержня $\omega_1 = 35 \text{ с}^{-1}$ и при этом материалоемкость усиления была бы минимальной. Оптимизация усиления выполнена методом случайного поиска. Результаты представлены в табл. 3.

Во втором столбце табл. 3 приведены по сечениям размеры ширины дополнительной полосы $b_{22}[i]$ (рис. 3, *б*). Объем материала полос усиления составляет $0,005895 \text{ м}^3$. На этом же рисунке показан вариант усиления полосой постоянной ширины по всей длине стержня. Размеры этой полосы приведены в столбце 2 табл. 3.

В третьем столбце табл. 3 показаны значения приведенных напряжений $\bar{\sigma}_{10t}(x)$ (3). Как отмечалось выше, близость решения к минимально ма-

териалоёмкому оценивается близостью приведенных напряжений $\bar{\sigma}_{10t}(x)$ к единице. Во всех сечениях, кроме четырех (1, 2, 19 и 20), величины $\bar{\sigma}_{10t}(x)$ отличаются от единицы на доли процентов. В сечениях 1, 2, 19 и 20 ширина дополнительной полосы очень мала, т. е. отмеченные сечения не нуждаются в усилении.

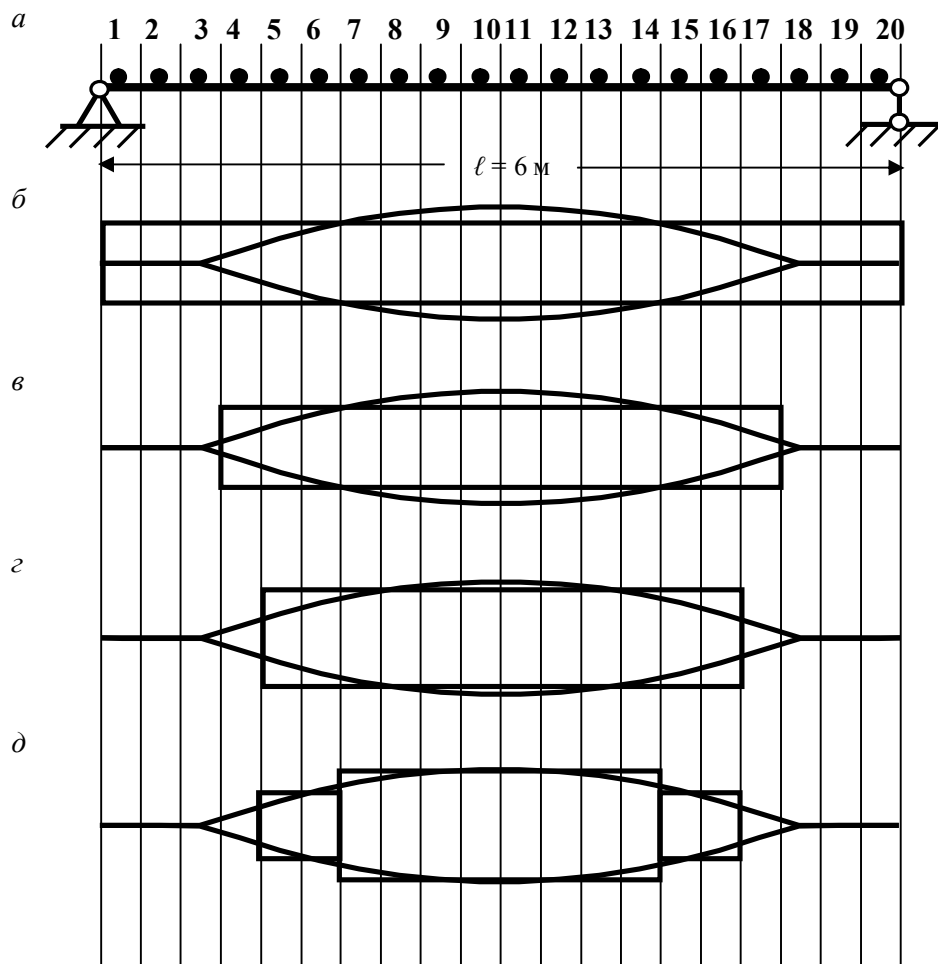


Рис. 3

Таким образом, полученное решение по усилению двутавра достаточно близко к минимально материалоёмкому. Как отмечалось в первом примере, в реальном проекте в большинстве случаев минимально материалоёмкое решение непосредственно применять нецелесообразно. Его прямое использование приведет к значительным отходам материала. Однако это решение может служить основой для создания более технологичных проектов и одновременно выполнять функцию оценки близости технологически приемлемого решения к минимально материалоёмкому.

Таблица 3

№ сечения	$b_{22}[i]$	$\bar{\sigma}_{10r}(x)$
1	2	3
1	0,000047	0,2392
2	0,000091	0,7111
3	0,008593	0,9990
4	0,029575	0,9997
5	0,047767	0,9998
6	0,062937	1,0000
7	0,075059	0,9998
8	0,084082	0,9999
9	0,090066	0,9999
10	0,093039	1,0000
11	0,093039	1,0000
12	0,090066	0,9999
13	0,084082	0,9999
14	0,075059	0,9998
15	0,062937	1,0000
16	0,047767	0,9998
17	0,029575	0,9997
18	0,008593	0,9990
19	0,000091	0,7111
20	0,000047	0,2392

Рассмотрим четыре более технологичных варианта усиления. Для всех вариантов критическая сила усиленной системы удовлетворяет ограничению (4) в виде равенства $\omega_1 = 35 \text{ с}^{-1}$. Результаты приведены в табл. 4.

Таблица 4

№ сечения	Ширина дополнительной полосы $b_{22}[i]$				
	2	3	4	5	6
1	0,067084	0,000000	0,000000	0,000000	0,000047
2	0,067084	0,000000	0,000000	0,000000	0,000091
3	0,067084	0,000000	0,000000	0,000000	0,008593
4	0,067084	0,000000	0,074821	0,049245	0,029575
5	0,067084	0,088489	0,074821	0,049245	0,047767
6	0,067084	0,088489	0,074821	0,049245	0,062937
7	0,067084	0,088489	0,074821	0,086919	0,075059
8	0,067084	0,088489	0,074821	0,086919	0,084082
9	0,067084	0,088489	0,074821	0,086919	0,090066
10	0,067084	0,088489	0,074821	0,086919	0,093039
11	0,067084	0,088489	0,074821	0,086919	0,093039
12	0,067084	0,088489	0,074821	0,086919	0,090066

Окончание табл. 4

№ сечения	Ширина дополнительной полосы $b_{22} [i]$				
	2	3	4	5	6
1					
13	0,067084	0,088489	0,074821	0,086919	0,084082
14	0,067084	0,088489	0,074821	0,086919	0,075059
15	0,067084	0,088489	0,074821	0,049245	0,062937
16	0,067084	0,088489	0,074821	0,049245	0,047767
17	0,067084	0,000000	0,074821	0,049245	0,029575
18	0,067084	0,000000	0,000000	0,000000	0,008593
19	0,067084	0,000000	0,000000	0,000000	0,000091
20	0,067084	0,000000	0,000000	0,000000	0,000047
V	0,0080502	0,006371	0,006285	0,0059448	0,005895
e	0%	26,35%	28,08%	35,41%	36,56%

В первом варианте (столбец 2 табл. 4, рис. 3, б) принято усиление каждой полки одной полосой постоянной ширины по всей длине балки. Объем материала полос усиления составляет 0,0080502 м³. Минимально материалоемкий вариант (столбец 2 табл. 3 и столбец 6 табл. 4) легче на 36,56 %.

Второй вариант представлен в столбце 3 табл. 4 и показан сравнительно с минимально материалоемким вариантом на рис. 3, в. Объем материала полос усиления составляет 0,006371 м³, что легче на 26,35 %, чем в первом варианте.

Третий вариант представлен в столбце 4 табл. 4 и показан сравнительно с минимально материалоемким вариантом на рис. 3, г. Объем материала полос усиления составляет 0,006285 м³, что легче на 28,08 %, чем в первом варианте.

Четвертый вариант представлен в столбце 5 табл. 4 и показан сравнительно с минимально материалоемким вариантом на рис. 3, д. Объем материала полос усиления составляет 0,0059448 м³, что легче на 35,41 %, чем в первом варианте.

Каждый из вариантов в обоих примерах рассматривался на основе постановки задач оптимизации (поиск значений варьируемых параметров, удовлетворяющих ограничениям и придающим функции цели минимальное значение).

Приведенные примеры иллюстрировали возможность использования методов оптимизации в задачах усиления, а также критериев оценки близости полученных «предельно» оптимальных решений к минимально материалоемкому при ограничениях на величину критической силы или первой собственной частоты. В частности, показано, что «предельно» оптимальное решение может служить основой для формирования конструктивно приемлемых решений.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Баничук, Н.В. Современные проблемы оптимизации конструкций / Н.В. Баничук // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1982. – № 2. – С. 110–124.

2. Ляхович, Л.С. Особые свойства оптимальных систем и основные направления их реализации в методах расчета сооружений / Л.С. Ляхович. – Томск : Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2009. – 372 с.
3. Ляхович, Л.С. Критерий минимальной материалоемкости при усилении стержней двутаврового поперечного сечения и ограничениях на величину критической силы или первой собственной частоты / Л.С. Ляхович, А.П. Малиновский // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. – 2015. – № 5. – С. 41–50.
4. Ляхович, Л.С. Некоторые вопросы оптимального проектирования строительных конструкций / Л.С. Ляхович, А.В. Перельмутер // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2014. – V. 10. – Is. 2. – P. 14–23.
5. Perelmuter, A. Some questions on optimal structural design of building structures / A. Perelmuter, L. Lyakhovich // Aktualne problemy konstrukcji metalowych. – Gdansk : Politechnika Gdanska, 2014. – P. 178–181.
6. Оптимизация механических систем : указатель отечественной и зарубежной литературы за 1970–1980 годы: в 2 кн. – Львов : Академия наук Украинской ССР, Львовская научная библиотека им. В. Стефаника, Институт прикладных проблем механики и математики, 1986. – Кн. 1. – 332 с.; Кн. 2. – 471 с.

REFERENCES

1. Banichuk N.V. Sovremennye problemy optimizatsii konstruktсии [Modern problems of structural optimization]. *Rigid Body Mechanics*. 1982. No 2. Pp. 110–124. (rus)
2. Lyakhovich L.S. Osobyie svoistva optimal'nykh sistem i osnovnye napravleniya ikh realizatsii v metodakh rascheta sooruzhenii : monografiya [Optimum system properties and main trends of their implementation in design technique. Monograph]. Tomsk : TSUAB Publ., 2009. 372 p. (rus)
3. Lyakhovich L.S. Kriterii minimal'noi materialoemkosti pri usilenii stержnei dvutavrovogo poperechnogo secheniya i ogranicheniyakh na velichinu kriticheskoi sily ili pervoi sobstvennoi chastoty [Minimum materials consumption at rebar H-shaped section strengthening and critical load and first eigenfrequency restrictions]. *Vestnik of Tomsk State University of Architecture and Building*. 2015. No 5. Pp. 41–50. (rus)
4. Lyakhovich L.S. Nekotorye voprosy optimal'nogo proektirovaniya stroitel'nykh konstruktсии [Some questions of optimal structural design]. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2014. V. 10, No. 2, Pp. 14–23. (rus)
5. Perelmuter, A. Some questions on optimal structural design of building structures. Aktualne problemy konstrukcji metalowych. Gdansk : Politechnika Gdanska, 2014. Pp. 178–181.
6. Optimizatsiya mekhanicheskikh sistem: ukazatel' otechestvennoi i zarubezhnoi literatury za 1970–1980 gody, v dvukh knigakh [Optimization of mechanical systems: Russian and foreign literature index for 1970-198 in two books]. L'vov : Akademija nauk Ukrainskoj SSR, L'vovskaja nauchnaja biblioteka im. V. Stefanika, institut prikladnyh problem mehaniki i matematiki, 1986. Book 1, 332 p.; Book 2, 471 p. (rus)