

# СТРОИТЕЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ, ЗДАНИЯ И СООРУЖЕНИЯ

УДК 624.04

DOI: 10.31675/1607-1859-2021-23-1-96-104

*Д.Н. ПЕСЦОВ,*

*Томский государственный архитектурно-строительный университет*

## **ПРИМЕНЕНИЕ ЖОРДАНОВЫХ ИСКЛЮЧЕНИЙ ДЛЯ АНАЛИЗА СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ ПРИ ИЗМЕНЕНИЯХ В РАСЧЕТНОЙ СХЕМЕ**

В статье рассматривается использование жордановых исключений для решения системы разрешающих уравнений при расчете стержневых систем. Применение жордановых исключений позволяет проводить анализ стержневой системы (определять значения усилий в поперечных сечениях стержней и перемещения узлов системы) в случае внесения изменений в расчетную схему системы без необходимости формирования и решения новой системы разрешающих уравнений при каждом таком изменении. Под изменениями в расчетной схеме понимается введение либо удаление опорных или внутренних связей, изменение жесткостных характеристик элементов статически неопределимых систем и т. д. Применение жордановых исключений рассматривается на примере простой статически неопределимой балки, являющейся частным случаем стержневой системы.

**Ключевые слова:** жордановы исключения; расчетная схема; усилия; стержневая система.

**Для цитирования:** Песцов Д.Н. Применение жордановых исключений для анализа стержневых систем при изменениях в расчетной схеме // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. 2021. Т. 23. № 1. С. 96–104.

DOI: 10.31675/1607-1859-2021-23-1-96-104

*D.N. PESTSOV,*

*Tomsk State University of Architecture and Building*

## **JORDAN ELIMINATION METHOD IN BAR SYSTEM ANALYSIS WITH CHANGES IN DESIGN MODEL**

The article discusses the use of the Jordan elimination method for solving the system of resolvent equations when analyzing the bar systems. The use of the Jordan elimination method makes it possible to determine the forces in cross-sections of bars and displacements of the system units in the case of changes in the design model of the system without the solution of new resolvent equations at each change. Changes in the design model indicate the introduction or removal of the support or internal connections, changes in the stiffness parameters of ele-

ments of statically indeterminate systems, and others. The Jordan elimination method is used for a simple statically indeterminate beam, which is a special case of the bar system.

**Keywords:** Jordan elimination method; design model; bar system analysis; forces.

**For citation:** Pestsov D.N. Primenenie zhordanovykh isklyuchenii dlya analiza sterzhnevyykh sistem pri izmeneniyakh v raschetnoi skheme [Jordan eliminations in bar system analysis with changes in design model]. Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta – Journal of Construction and Architecture. 2021. V. 23. No. 1. Pp. 96–104.

DOI: 10.31675/1607-1859-2021-23-1-96-104

При внесении изменений в расчетную схему стержневых систем (введение либо удаление опорных или внутренних связей, изменение жесткостных характеристик элементов статически неопределимых систем и т. д.) происходит изменение усилий в сечениях стержней. Для вычисления новых значений усилий при каждом таком изменении обычно необходимо формировать новую систему линейных алгебраических уравнений и производить их полный перерасчет. В задачах оптимизации, когда может проводиться большое количество последовательных изменений в расчетных схемах, для стержневых систем, имеющих большое количество элементов, такой путь является затратным в части времени.

В настоящей статье предложен метод перерасчета усилий в элементах стержневых систем без необходимости формирования новой системы разрешающих уравнений и их полного перерасчета в случае изменения в расчетной схеме.

Метод основан на применении жордановых исключений для решения системы разрешающих уравнений. Как было показано в работе [1], один шаг жордановых исключений по системе разрешающих уравнений смешанного метода означает введение одной связи, если элемент системы уравнений имеет смысл перемещений, либо удаления связи, если элемент системы имеет смысл реакции во введенной связи [2–4].

Применение метода рассмотрим на примере простой статически неопределимой балки, изображенной на рис. 1, *a*, которая является частным случаем стержневой системы. Примем:  $EJ = 1$  кН м<sup>2</sup>,  $EA = 50$  кН.

Формирование системы разрешающих уравнений метода конечных элементов можно вести по основной системе, изображенной на рис 1, *б* (схема перемещений показана на рис. 1, *в*). Для этого случая нужно использовать два типа конечных элементов: стержень с жестким защемлением по обоим концам (рис. 2, *a*) и стержень с жестким защемлением слева и шарнирным окончанием справа (рис. 2, *б*).

Для анализа системы предлагается использовать другую основную систему, изображенную на рис 1, *г* (схема перемещений показана на рис. 1, *д*). В этом случае используется только один конечный элемент: стержень с жестким защемлением по обоим концам (рис. 3, *a*, *б*).

В этом случае система разрешающих уравнений будет иметь немного большую размерность, но зато такой подход дает больше возможностей для анализа (покажем далее).

Сформируем систему разрешающих уравнений.

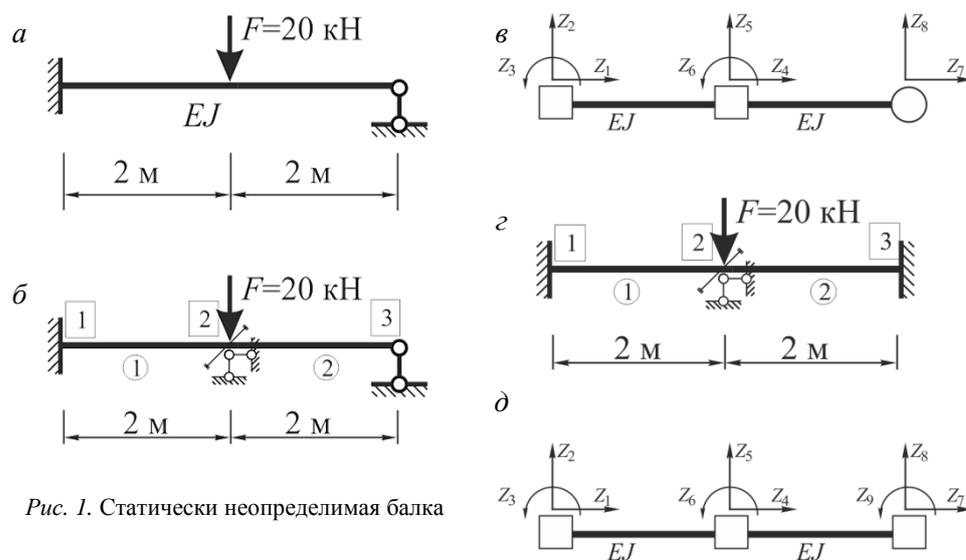


Рис. 1. Статически неопределимая балка

Для стержня 1 (рис. 3, а):

$$l_1 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(2 - 0)^2 + (0 - 0)^2} = 2 \text{ м};$$

$$\cos \alpha_1 = \frac{x_2 - x_1}{l_1} = \frac{2 - 0}{2} = 1; \quad \sin \alpha_1 = \frac{y_2 - y_1}{l_1} = \frac{0 - 0}{2} = 0.$$

Сформируем матрицу жесткости стержня 1 в местной системе координат:

$$[k_1^*] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l_1} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ}{l_1^3} & \frac{6EJ}{l_1^2} & 0 & -\frac{12EJ}{l_1^3} & \frac{6EJ}{l_1^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{l_1^2} & \frac{4EJ}{l_1} & 0 & -\frac{6EJ}{l_1^2} & \frac{2EJ}{l_1} \\ -\frac{EA}{l_1} & 0 & 0 & \frac{EA}{l_1} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EJ}{l_1^3} & -\frac{6EJ}{l_1^2} & 0 & \frac{12EJ}{l_1^3} & -\frac{6EJ}{l_1^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{l_1^2} & \frac{2EJ}{l_1} & 0 & -\frac{6EJ}{l_1^2} & \frac{4EJ}{l_1} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{50}{2} & 0 & 0 & -\frac{50}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 \cdot 1}{8} & \frac{6 \cdot 1}{4} & 0 & -\frac{12 \cdot 1}{8} & \frac{6 \cdot 1}{4} \\ 0 & \frac{6 \cdot 1}{4} & \frac{4 \cdot 1}{2} & 0 & -\frac{6 \cdot 1}{4} & \frac{2 \cdot 1}{2} \\ -\frac{50}{2} & 0 & 0 & \frac{50}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12 \cdot 1}{8} & -\frac{6 \cdot 1}{4} & 0 & \frac{12 \cdot 1}{8} & -\frac{6 \cdot 1}{4} \\ 0 & \frac{6 \cdot 1}{4} & \frac{2 \cdot 1}{2} & 0 & -\frac{6 \cdot 1}{4} & \frac{4 \cdot 1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 & -25 & 0 & 0 \\ 0 & 1,5 & 1,5 & 0 & -1,5 & 1,5 \\ 0 & 1,5 & 2 & 0 & -1,5 & 1 \\ -25 & 0 & 0 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & -1,5 & -1,5 & 0 & 1,5 & -1,5 \\ 0 & 1,5 & 1 & 0 & -1,5 & 2 \end{pmatrix}.$$

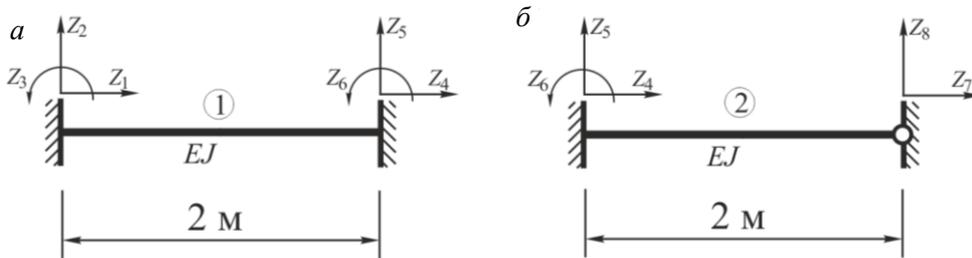


Рис. 2. Два типа конечных элементов

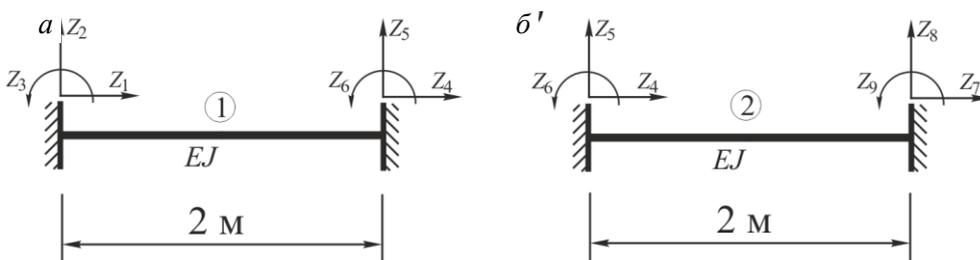


Рис. 3. Стержень с жестким защемлением

Матрица направляющих косинусов:

$$[C_1] = \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица жесткости стержня 1 в общей системе координат

$$[k_1] = [k_1^*][C_1] = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 & -25 & 0 & 0 \\ 0 & 1,5 & 1,5 & 0 & -1,5 & 1,5 \\ 0 & 1,5 & 2 & 0 & -1,5 & 1 \\ -25 & 0 & 0 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & -1,5 & -1,5 & 0 & 1,5 & -1,5 \\ 0 & 1,5 & 1 & 0 & -1,5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Для стержня 2 (рис. 3, б)

$$l_2 = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} = \sqrt{(2-0)^2 + (0-0)^2} = 2 \text{ м};$$

$$\cos\alpha_2 = \frac{x_3 - x_2}{l_2} = \frac{2-0}{2} = 1; \quad \sin\alpha_2 = \frac{y_3 - y_2}{l_2} = \frac{0-0}{2} = 0.$$

Сформируем матрицу жесткости стержня 2. Очевидно, что при одинаковых длине, косинусах и синусах, а также жесткостных характеристиках матрица жесткости второго стержня в общей системе координат будет такой же, как и для первого стержня:

$$[k_2] = [k_2^*][C_2] = \begin{matrix} & Z_4 & Z_5 & Z_6 & Z_7 & Z_8 & Z_9 \\ \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 & -25 & 0 & 0 \\ 0 & 1,5 & 1,5 & 0 & -1,5 & 1,5 \\ 0 & 1,5 & 2 & 0 & -1,5 & 1 \\ -25 & 0 & 0 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & -1,5 & -1,5 & 0 & 1,5 & -1,5 \\ 0 & 1,5 & 1 & 0 & -1,5 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Матрица жесткости всей системы и нагрузка, приложенная к ней, показаны в табл. 1.

Данная матрица соответствует системе, изображенной на рис. 1, з, т. е. системе, имеющей по три связи в каждом из трех узлов.

Для удаления лишних связей необходимо сделать пять шагов жордановых исключений в табл. 1 с разрешающими элементами, соответствующими: горизонтальным связям  $Z_4$  и  $Z_7$ , вертикальной связи  $Z_5$ , моментным связям  $Z_6$  и  $Z_9$ .

Разрешающие элементы всегда находятся на главной диагонали.

Проведя соответствующие вычисления, получим табл. 2.

Таблица 1

	$Z_1$	$Z_2$	$Z_3$	$Z_4$	$Z_5$	$Z_6$	$Z_7$	$Z_8$	$Z_9$	$F$
$Z_1$	20	0	0	-20	0	0	0	0	0	0
$Z_2$	0	1,5	1,5	0	-1,5	1,5	0	0	0	0
$Z_3$	0	1,5	2	0	-1,5	1	0	0	0	0
$Z_4$	-20	0	0	40	0	0	-20	0	0	0
$Z_5$	0	-1,5	-1,5	0	3	0	0	-1,5	1,5	20
$Z_6$	0	1,5	1	0	0	4	0	-1,5	1	0
$Z_7$	0	0	0	-20	0	0	20	0	0	0
$Z_8$	0	0	0	0	-1,5	-1,5	0	1,5	-1,5	0
$Z_9$	0	0	0	0	1,5	1	0	-1,5	2	0

Таблица 2

	$Z_1$	$Z_2$	$Z_3$	$Z_4$	$Z_5$	$Z_6$	$Z_7$	$Z_8$	$Z_9$	$F$
$Z_1$	0	0	0	-1	0	0	-1	0	0	0
$Z_2$	0	0,05	0,19	0	-0,69	0,28	0	-0,05	0,38	13,75
$Z_3$	0	0,19	0,75	0	-0,75	0,13	0	-0,19	0,5	15
$Z_4$	1	0	0	0,05	0	0	0,05	0	0	0
$Z_5$	0	-0,69	0,75	0	0,58	0,13	0	0,32	-0,5	-11,67
$Z_6$	0	-0,28	-0,13	0	0,13	0,31	0	0,29	-0,25	-2,5
$Z_7$	1	0	0	0,05	0	0	0,1	0	0	0
$Z_8$	0	-0,05	-0,19	0	-0,31	-0,28	0	0,05	-0,38	6,25
$Z_9$	0	-0,38	-0,5	0	-0,5	-0,25	0	0,38	1	10

Как видно из полученных данных, элементы таблицы, находящиеся на пересечении столбца  $F$  и строк  $Z_2, Z_3, Z_8$ , соответствуют значениям реакций для балки длиной 4 м, имеющей жесткое защемление слева, шарнирное опирание справа и нагруженной посередине сосредоточенной силой  $F$  (рис. 4).

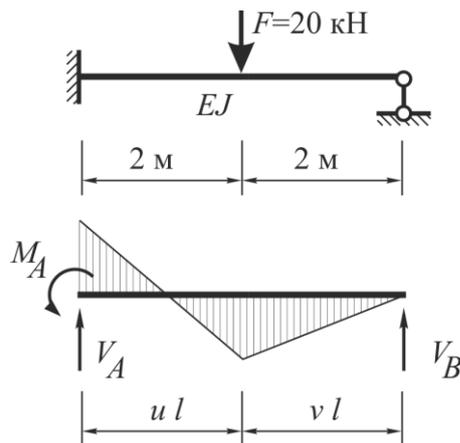


Рис. 4. Балка с жестким защемлением слева и шарнирным опиранием справа

$$M_A = \frac{F \cdot l}{2} v (1 - v^2) = \frac{20 \cdot 4}{2} 0,5 (1 - 0,5^2) = 15 = \text{элемент}(Z_3, F);$$

$$V_A = \frac{F \cdot u}{2} (3 - v^2) = \frac{20 \cdot 0,5}{2} (3 - 0,5^2) = 13,75 = \text{элемент}(Z_2, F);$$

$$V_B = \frac{F \cdot u^2}{2} (3 - u) = \frac{20 \cdot 0,5^2}{2} (3 - 0,5) = 6,25 = \text{элемент}(Z_8, F).$$

В остальных ячейках столбца  $F$  находятся значения перемещений по направлениям соответствующих связей.

Если в табл. 2 сделать шаг жордановых исключений с разрешающим элементом  $Z_9$ , то это будет равносильно введению моментной связи  $Z_9$ .

Элементы табл. 3, находящиеся на пересечении столбца  $F$  и строк  $Z_2, Z_3, Z_8, Z_9$ , соответствуют значениям реакций для балки длиной 4 м, имеющей жесткие защемления по краям и нагруженной посередине сосредоточенной силой  $F$  (рис. 5).

Таблица 3

	$Z_1$	$Z_2$	$Z_3$	$Z_4$	$Z_5$	$Z_6$	$Z_7$	$Z_8$	$Z_9$	$F$
$Z_1$	0	0	0	-1	0	0	-1	0	0	0
$Z_2$	0	0,19	0,38	0	-0,5	0,38	0	-0,19	0,38	10
$Z_3$	0	0,38	1	0	-0,5	0,25	0	-0,38	0,5	10
$Z_4$	1	0	0	0,05	0	0	0,05	0	0	0
$Z_5$	0	0,5	0,5	0	0,33	0	0	0,5	-0,5	-6,67
$Z_6$	0	-0,38	-0,25	0	0	0,25	0	0,38	-0,25	0
$Z_7$	1	0	0	0,05	0	0	0,1	0	0	0
$Z_8$	0	-0,19	-0,38	0	-0,5	-0,38	0	0,19	-0,38	10
$Z_9$	0	0,38	0,5	0	0,5	0,25	0	-0,38	1	-10

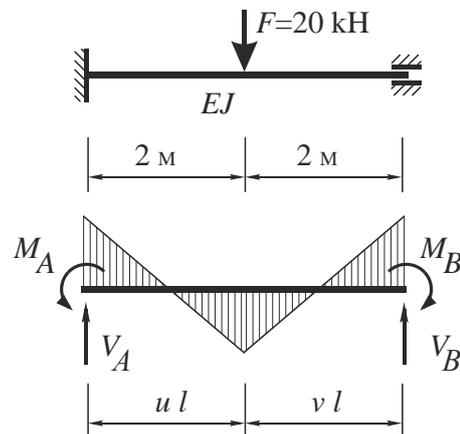


Рис. 5. Балка с жесткими защемлениями по краям

$$M_A = u v^2 F l = 0,5 \cdot 0,5^2 \cdot 20 \cdot 4 = 10 = \text{элемент}(F, Z_3);$$

$$M_B = u^2 v F l = 0,5^2 \cdot 0,5 \cdot 20 \cdot 4 = 10 = \text{элемент}(F, Z_9);$$

знак « $\leftrightarrow$ », т. к. не совпадает направление;

$$V_A = v^2(1 + 2u)F = 0,5^2(1 + 2 \cdot 0,5)20 = 10 = \text{элемент}(F, Z_2);$$

$$V_B = u^2(1 + 2v)F = 0,5^2(1 + 2 \cdot 0,5)20 = 10 = \text{элемент}(F, Z_8).$$

Три шага жордановых исключений в табл. 3 с разрешающими элементами  $Z_7$ ,  $Z_1$  и  $Z_3$  равносильны введению горизонтальной связи  $Z_7$  и удалению горизонтальной связи  $Z_1$  и моментной связи  $Z_3$ .

При этом видно, что на пересечении строки и столбца  $Z_1$  находится число, равное 0, это означает, что данная связь не может быть удалена, т. к. является абсолютно необходимой для системы на рис. 5. Вначале нужно сделать шаг с элементом  $Z_7$  и ввести горизонтальную связь  $Z_7$  и только после этого можно будет удалить горизонтальную связь  $Z_1$ .

Элементы табл. 4, находящиеся на пересечении столбца  $F$  и строк  $Z_2$ ,  $Z_8$ ,  $Z_9$ , соответствуют значениям реакций для балки длиной 4 м, имеющей жесткое защемление справа, шарнирное закрепление слева и нагруженной посередине сосредоточенной силой  $F$  (рис. 6).

Таблица 4

	$Z_1$	$Z_2$	$Z_3$	$Z_4$	$Z_5$	$Z_6$	$Z_7$	$Z_8$	$Z_9$	$F$
$Z_1$	0,1	0	0	0,05	0	0	1	0	0	0
$Z_2$	0	0,05	0,38	0	-0,31	0,28	0	-0,05	0,19	6,25
$Z_3$	0	-0,38	1	0	0,5	-0,25	0	0,38	-0,5	-10
$Z_4$	0,05	0	0	0,05	0	0	1	0	0	0
$Z_5$	0	0,31	0,5	0	0,58	-0,13	0	0,69	-0,75	-11,67
$Z_6$	0	-0,28	-0,25	0	-0,13	0,31	0	0,28	-0,13	2,5
$Z_7$	-1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
$Z_8$	0	-0,05	-0,38	0	-0,69	-0,28	0	0,05	-0,19	13,75
$Z_9$	0	0,19	0,5	0	0,75	0,13	0	-0,19	0,75	-15

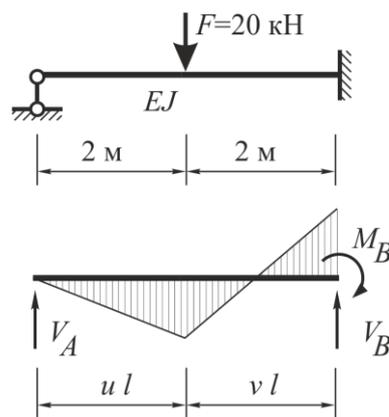


Рис. 6. Балка с шарнирным закреплением слева и жестким защемлением справа

$$M_B = \frac{F \cdot l}{2} v(1-v^2) = \frac{20 \cdot 4}{2} 0,5(1-0,5^2) = 15 = \text{элемент}(Z_9, F);$$

$$V_A = \frac{F \cdot u^2}{2} (3-u) = \frac{20 \cdot 0,5^2}{2} (3-0,5) = 6,25 = \text{элемент}(Z_8, F);$$

$$V_B = \frac{F \cdot u}{2} (3-v^2) = \frac{20 \cdot 0,5}{2} (3-0,5^2) = 13,75 = \text{элемент}(Z_2, F).$$

Описанные выше действия показывают, что применение жордановых исключений при расчете стержневых систем позволяет вводить или удалять как внешние, так и внутренние связи без необходимости формирования и решения новой системы разрешающих уравнений при каждом изменении в расчетной схеме стержневой системы. Также алгоритм позволяет определять абсолютно необходимые связи и запрещать их удаление.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Те А.Б. Механическая интерпретация жордановых исключений в задачах расчета статически неопределимых систем // Исследования по строительной механике и строительным конструкциям. Томск : Изд-во Том. ун-та, 1988. С. 144–150.
2. Пестцов Д.Н., Те А.Б. Анализ шарнирно-стержневых систем при изменениях в расчетной схеме // Проблемы теории расчета сооружений. Томск : ТГАСУ, 1998. С. 2–4.
3. Пестцов Д.Н. Статический анализ шарнирно-стержневых систем при изменениях в расчетной схеме // Сборник трудов молодых ученых НГАСУ, 1999. № 2. С. 21–29.
4. Пестцов Д.Н. Учет односторонней работы связей при внесении изменений в расчетную схему фермы // Проблемы оптимального проектирования сооружений : сб. докладов III Всероссийского семинара : в 2 т. Новосибирск : НГАСУ, 2000. Т. 2. С. 123–124.

#### REFERENCES

1. Te A.B. Mekhanicheskaya interpretatsiya Zhordanovykh isklyuchenii v zadachakh rascheta staticheski neopredelimykh sistem [Mechanical interpretation of Jordan elimination in calculating statically indeterminate systems]. Issledovaniya po stroitel'noi mekhanike i stroitel'nym konstruksiyam. Tomsk, 1988. Pp. 144–150. (rus)
2. Pestsov D.N., Te A.B. Analiz sharnirno-sterzhnevyykh sistem pri izmeneniyakh v raschetnoi skheme [Analysis of hinge-rod systems with changes in design model]. In: Problemy teorii rascheta sooruzhenii [Design theory of buildings]. Tomsk: TSUAB, 1998. Pp. 2–4. (rus)
3. Pestsov D.N. Statcheskii analiz sharnirno-sterzhnevyykh sistem pri izmeneniyakh v raschetnoi skheme [Static analysis of hinge-rod systems with changes in design model]. In: Sbornik trudov molodykh uchennykh NGASU (Coll. Papers of Young Scientists NGASU). 1999. No. 2. Pp. 21–29. (rus)
4. Pestsov D.N. Uchet odnostoronnei raboty svyazei pri vnesenii izmenenii v raschetnuyu skhemu fermy [Unilateral operation of connections at changes in truss design model]. In: Problemy optimal'nogo proektirovaniya sooruzhenii: sb. dokladov III-go Vserossiiskogo seminar: v 2-kh tomakh (Proc. 3rd All-Russ. Seminar 'Problems of Optimum Structural Engineering'), in 2 vol., Novosibirsk, 2000. V. 2. Pp. 123–124. (rus)

#### Сведения об авторе

Пестцов Дмитрий Николаевич, канд. техн. наук, Томский государственный архитектурно-строительный университет, 634003, г. Томск, пл. Соляная, 2, DmitryPestsov@rambler.ru

#### Author Details

Dmitry N. Pestsov, PhD, Tomsk State University of Architecture and Building, 2, Solyanaya Sq., 634003, Tomsk, Russia, DmitryPestsov@rambler.ru