

УДК 624.045.04

DOI: 10.31675/1607-1859-2020-22-5-111-121

*Г.И. ГРЕБЕНЮК¹, В.И. МАКСАК¹, Е.В. ЯНЬКОВ²,**¹Томский государственный архитектурно-строительный университет,**²Новосибирский государственный**архитектурно-строительный университет (Сибстрин)*

РАСЧЁТ И ОПТИМИЗАЦИЯ КОЛОНН СТУПЕНЧАТОЙ ЖЁСТКОСТИ В УСЛОВИЯХ ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНОГО ИЗГИБА

Рассматривается задача расчёта и оптимизации колонн ступенчатой жёсткости, входящих в состав стержневого каркаса промышленного здания. В качестве исследуемого объекта выбран двухпролётный поперечник одноэтажного промышленного здания. Разработана методика квазистатического расчёта наиболее нагруженной средней колонны поперечника. Расчёт проводился приближенным методом по предельной нагрузке. Критический «эйлеровский» параметр сжимающей продольной нагрузки определялся на основе составления дифференциальных уравнений изгиба при бифуркационной форме потери устойчивости на участках колонны. Задача оптимизации параметров сечений колонны на участках ставилась и решалась как задача нелинейного математического программирования. Рассмотрен пример оптимизации средней колонны поперечника с использованием разработанной методики расчёта при составлении системы ограничений в формируемой задаче оптимизации.

Ключевые слова: поперечник каркаса; ступенчатая колонна; предельная нагрузка; критический параметр; участки интегрирования; оптимизация сечений рам.

Для цитирования: Гребенюк Г.И., Максак В.И., Яньков Е.В. Расчёт и оптимизация колонн ступенчатой жёсткости в условиях продольно-поперечного изгиба // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. 2020. Т. 22. № 5. С. 111–121.

DOI: 10.31675/1607-1859-2020-22-5-111-121

*G.I. GREBENYUK¹, V.I. MAKSAK¹, E.V. YANKOV²,**¹Tomsk State University of Architecture and Building,**²Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering*

STIFFNESS ANALYSIS AND OPTIMIZATION OF STEPPED COLUMNS UNDER COMBINED BENDING AND COMPRESSION

The paper presents the stiffness analysis and optimization of stepped columns constituting the core frame of the industrial building. The two-span cross section of a one-storey industrial building is investigated herein. The quasi-static calculation is performed using the limited load approximation method for the cross-section of the most loaded middle column. The critical Euler characteristic of the compressive longitudinal load is determined by the differential bending equations at the bifurcation instability in the column sections. The parameter optimization of the column cross-section is achieved through the nonlinear mathematical programming. The optimization of medium column cross-section is considered using the proposed calculation when setting a set of constraints for the optimization task.

Keywords: cross-section; stepped column; ultimate load; critical parameter; optimization; frame section.

For citation: Grebenyuk G.I., Maksak V.I., Yankov E.V. Raschet i optimizatsiya kolonn stupenchatoi zhestkosti v usloviyakh prodol'no-poperechnogo izgiba [Stiffness analysis and optimization of stepped columns under combined bending and compression]. Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta – Journal of Construction and Architecture. 2020. V. 22. No. 5. Pp. 111–121.

DOI: 10.31675/1607-1859-2020-22-5-111-121

Введение

Колонны ступенчатой жёсткости широко используются в строительной практике, прежде всего в составе каркасов промышленных зданий. При расчёте каркаса часто ограничиваются квазистатическим расчётом в линейной постановке на заданную нагрузку и бифуркационным расчётом на устойчивость каркаса с перемещением нагрузки в узлы.

Вопросам потери устойчивости как отдельных сжатых стержней, так и стержневых систем посвящено множество работ: раздел в учебной литературе [1–4 и др.]; монографии и статьи [5–10]; разделы в нормативной и справочной литературе. При этом, как правило, используется линейно упругая модель материала, а проектные расчёты ведутся по расчётным нагрузкам и расчётным сопротивлениям.

Значительно меньше внимания в учебной и научной литературе уделено вопросом оптимизации стержней (в том числе колонн ступенчатой жёсткости в условиях продольных и продольно-поперечных изгибов). Здесь можно отметить работы [11–20], в том числе такие, в которых в числе ограничений в задаче оптимизации используют ограничения по частотам колебаний и устойчивости [13, 18–20].

В настоящей работе на примере поперечника стержневого каркаса одноэтажного двухпролётного промышленного здания, представленного на рис. 1, предлагаются методики расчёта и оптимизации наиболее нагруженных средних ступенчатых колонн каркаса в условиях продольно-поперечного изгиба.

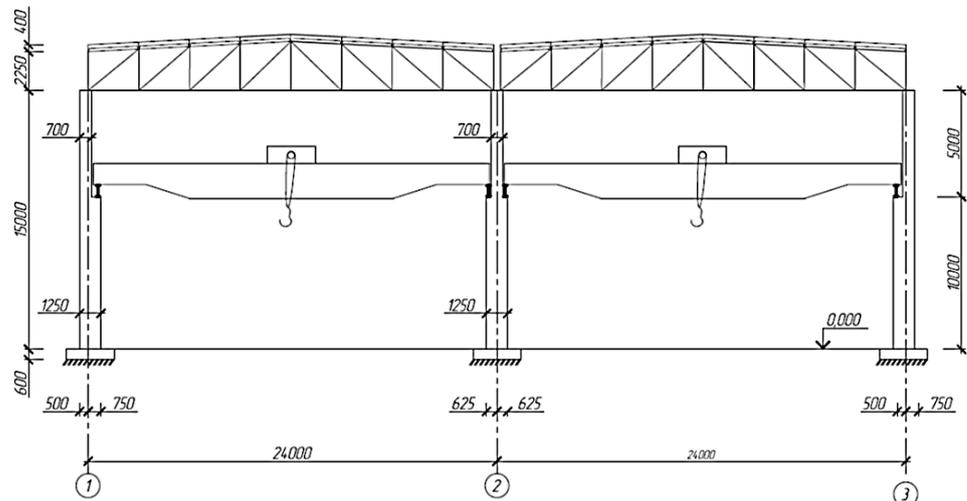


Рис. 1

1. Основные допущения при расчёте. Методика расчёта средней колонны ступенчатой жёсткости

К основным допущениям при расчёте отнесены:

- расчёт полного каркаса заменяется расчётом поперечника;
- все колонны каркаса имеют одинаковую изгибную жёсткость;
- продольными деформациями ригелей поперечника (на рис. 1 это разрезные фермы с шарнирным опиранием на колонны) можно пренебречь;
- нагрузки на поперечник (собственный вес, вес покрытия, ветровая, снеговая и крановая) передаются в узлах колонн;
- изгибающие моменты и горизонтальные усилия от крановой нагрузки, передающиеся на колонны каркаса, не учитываются.

На рис. 2 приведена расчётная схема поперечника, составленная с учётом сделанных допущений. Параметры q_1 , q_2 поперечной ветровой нагрузки и параметр F продольной нагрузки на колонны рассчитывались с использованием нормативных источников при шаге колонн в продольном направлении здания, равном 6 м.

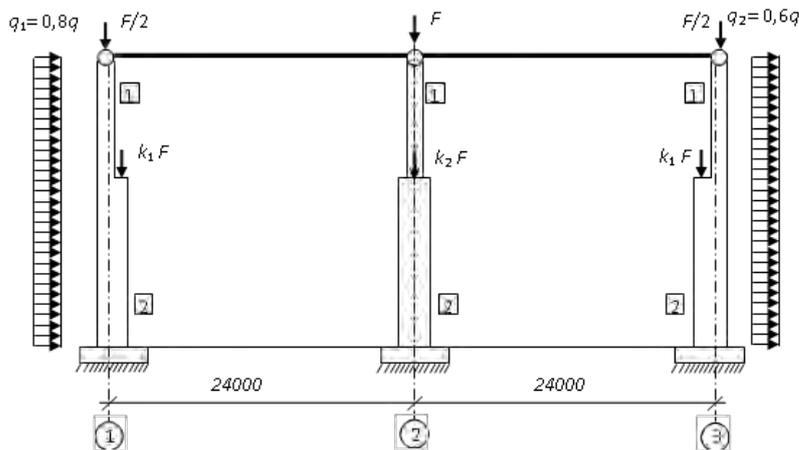


Рис. 2

1.1. Линейный расчёт средней ступенчатой колонны в составе статически неопределимой рамы

Расчёт в линейной постановке проводится по недеформированной схеме. Расчётная схема поперечника (рис. 2) представляет собой двухпролётную, дважды статически неопределимую раму, в состав которой входят три вертикальных стержня ступенчатой жёсткости (колонны) и два горизонтальных элемента (ригели), соединяющих колонны в верхних узлах.

При определении усилий в стойках от вертикальных нагрузок система является статически определимой. Продольные силы в стойках можно найти методом сечений. Для средней стойки они равны:

$$N_1 = F = 760 \text{ кН}, \quad N_2 = F(1 + K_2) = 1180 \text{ кН}, \quad K_2 = 0,55.$$

Для расчёта на действие ветровой нагрузки был использован метод сил. Основная система метода сил была образована путем отбрасывания продольных связей элементов ригелей (рис. 3). При этом система распадается на три независимые части, удобные для расчётов.

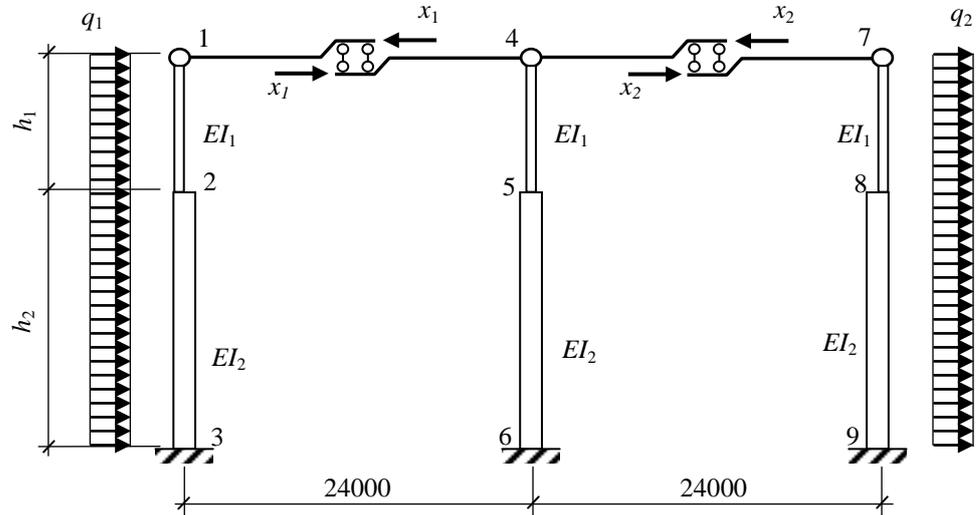


Рис. 3

Для определения неизвестных составлена система канонических уравнений метода сил:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \Delta_{1F} &= 0, \\ \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \Delta_{2F} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Коэффициенты при неизвестных и свободных членах системы (1) определены на основе сопряжения единичных и грузовых эпюр, представленных на рис. 4.

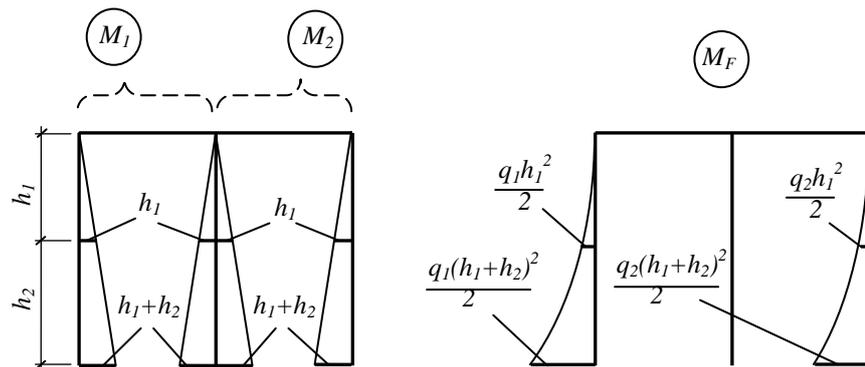


Рис. 4

После вычисления коэффициентов и свободных членов канонических уравнений и решения системы (1) получены выражения для неизвестных:

$$x_2 = \frac{-0,4qC}{3d}, \quad x_1 = \frac{qC}{3d}, \quad (2)$$

где
$$C = \frac{1}{12} \left[\frac{1,5h_1^4}{EJ_1} + \frac{h_2}{EJ_2} \left[h_1^3 + 4(h_1 + 0,5h_2)^3 + (h_1 + h_2)^3 \right] \right], \quad (3)$$

$$d = \frac{1}{3} \left[\frac{h_1^3}{EJ_1} + \frac{h_2}{EJ_2} \left[3h_1^2 + h_2^2 + 3h_1h_2 \right] \right]. \quad (4)$$

Выражения (2) позволяют найти суммарную горизонтальную нагрузку на среднюю колонну в узле 4:

$$p = x_1 - x_2 = \frac{1,4qC}{3d}. \quad (5)$$

Усилия от поперечной ветровой нагрузки в сечениях 5, 6 средней колонны равны соответственно:

$$M_{5П} = Ph_1, \quad M_{6П} = P(h_1 + h_2).$$

Горизонтальные перемещения узлов 4, 5 от поперечной нагрузки можно найти по методу Мора, сопрягая эпюру моментов в средней стойке с соответствующими единичными эпюрами в основной системе метода сил:

$$U_{П4} = \frac{P}{3} \left(\frac{h_1^3}{EJ_1} + \frac{h_2}{EJ_2} (3h_1^2 + h_2^2 + 3h_1h_2) \right), \quad (6)$$

$$U_{П5} = \frac{Ph_2}{6EJ_2} (2h_2^2 + 3h_1h_2). \quad (7)$$

1.2. Расчёт средней колонны в условиях продольно-поперечного изгиба

В данном случае расчёт необходимо проводить по нагрузке. Согласно такому подходу, при расчётах на прочность и жёсткость параметры нагружения на среднюю колонну увеличивают до предельного уровня:

$$P_{\text{lim}} = Pk_H, \quad F_{\text{lim}} = Fk_H, \quad (8)$$

где $k_H > 1$ – коэффициент запаса по нагрузке.

Используя приближенный метод расчёта при продольно-поперечном изгибе [1], необходимо корректировать величины усилий и перемещений, полученные при линейном расчёте на предельную нагрузку, умножая их на коэффициент

$$k_{\Pi} = \frac{1}{1 - \frac{Fk_H}{F_{cr\text{Э}}}}, \quad (9)$$

где $F_{cr\text{Э}}$ – критическое значение параметра продольной нагрузки в постановке Эйлера при потере устойчивости в плоскости изгиба. Далее, при составлении условий прочности и жёсткости полученные предельные значения пара-

метров состояния делятся на коэффициент k_H и сравниваются с допускаемыми значениями.

Например, при проверке прочности по максимальным нормальным напряжениям условие прочности записывается в виде

$$\max_x \left| \frac{N(x)}{A} + \frac{M_{\Pi}(x)}{W} + \frac{N(x)U_{\Pi}(x)k_H}{W \left(1 - \frac{Fk_H}{F_{crЭ}} \right)} \right| \leq R, \quad (10)$$

где A , W – площадь и момент сопротивления рассматриваемого сечения средней колонны; x – координата сечения вдоль продольной оси.

При определении $F_{crЭ}$ использовался алгоритм определения критического параметра продольной нагрузки для стержней ступенчатой жёсткости с линейно упругой связью в верхнем сечении, разработанный с участием одного из авторов настоящей работы [17]. Чтобы воспользоваться данным алгоритмом, необходимо определить жёсткость C_4 упругоподатливой связи в узле 4 (рис. 5), моделирующей влияние двух крайних колонн. Перемещения верхних сечений крайних колонн от единичного силового воздействия определялись по методу Мора путём сопряжения половины эпюры M_1 (см. рис. 4) самой на себя с учётом изгибных и жесткостей EJ_1 , EJ_2 участков:

$$\frac{1}{2} \delta_{11} = \frac{1}{3} \left(\frac{h_1^3}{EJ_1} + \frac{h_2}{EJ_2} (3h_1^2 + h_2^2 + 3h_1h_2) \right) = d.$$

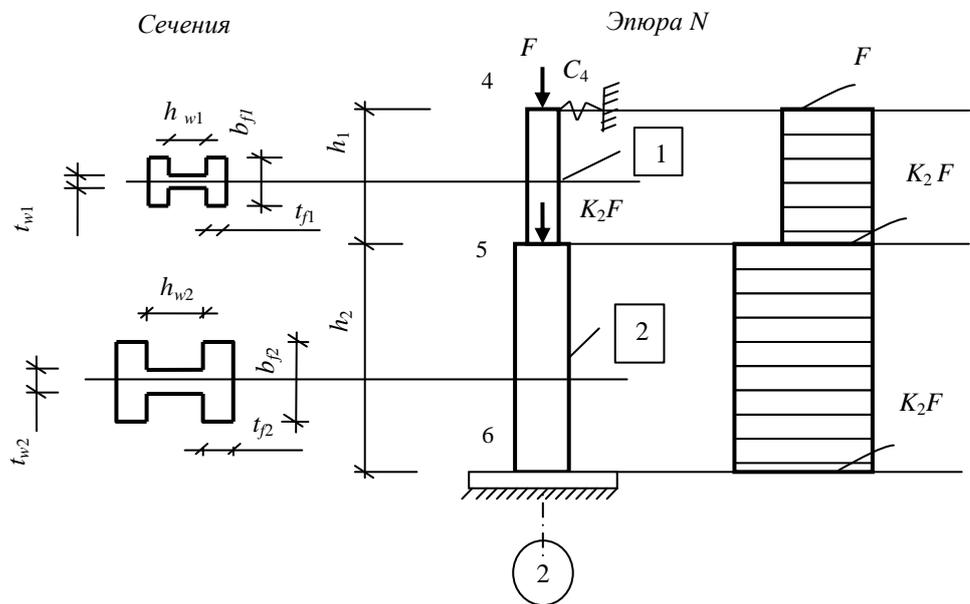


Рис. 5

Величина жёсткости обратно пропорциональна податливости колонны $C_1 = 1/d$, а для двух крайних колонн, моделирующих упругую связь средней колонны:

$$C_4 = C_1 + C_7 = 2/d. \quad (11)$$

2. Постановка и решение задачи оптимизации средней колонны

Задача оптимизации средней колонны поставлена в форме задачи нелинейного математического программирования:

Требуется найти

$$\min F(X), \quad X \in E^n \quad (12)$$

с соблюдением ограничений вида

$$g_j(X, P(X)) \leq 0, \quad j = 1, \dots, m; \quad (13)$$

$$X_{i,\min} \leq X_i \leq X_{i,\max}. \quad (14)$$

В выражениях (12) – (14): $F(X)$ – целевая функция; X_i , $i = 1, \dots, n$ – варьируемые параметры; $P(X)$ – вектор параметров состояния колонны.

В качестве целевой функции принят объём материала колонны (сталь 3). Варьируемыми параметрами являются размеры двутавровых сечений колонны на участках $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ (рис. 5):

$$X_1 = b_{f1}; \quad X_2 = t_{f1}; \quad X_3 = h_{w1}; \quad X_4 = b_{w1}; \quad X_5 = b_{f2};$$

$$X_6 = t_{f2}; \quad X_7 = h_{w2}; \quad X_8 = t_{w2}.$$

В состав ограничений (13) входят: ограничения по прочности вида (10); ограничения по жёсткости вида

$$U_4 = \frac{U_{П4}}{1 - \frac{Fk_H}{F_{cr}}} \leq \frac{H_4}{400}, \quad (15)$$

где $U_{П4}$ – поперечное перемещение узла 4 от нормативной ветровой нагрузки; $H_4 = h_1 + h_2$.

Кроме того, в состав ограничений введены параметрические ограничения (14), а также конструктивные ограничения на соотношения размеров полк и стенок сварных двутавров на следующих участках:

$$\frac{X_1}{X_2} \leq 30; \quad \frac{X_3}{X_4} \leq 80; \quad \frac{X_5}{X_6} \leq 30; \quad \frac{X_7}{X_8} \leq 80. \quad (16)$$

При принятых варьируемых параметрах выражение для целевой функции имеет вид

$$F(X) = (2X_1X_2 + X_3X_4)h_1 + (2X_5X_6 + X_7X_8)h_2. \quad (17)$$

Для удобства при решении и обработке результатов поставленной задачи оптимизации все ограничения преобразовывались к безразмерному виду

$$\overline{g_j}(X, P(X)) - 1 \leq 0, \quad j = 1, \dots, m + 2n + 4. \quad (18)$$

Сформированная условно-экстремальная задача оптимизации ступенчатой колонны решалась на основе метода подвижного внешнего штрафа [15] и с использованием программного модуля для решения сформированных задач оптимизации [16]. Ограничения по прочности и жёсткости строились на основе разработанной методики расчёта колонны по нагрузке в условиях продольно-поперечного изгиба. В таблице приведены результаты оптимизации по объёму материала средней, наиболее нагруженной колонны поперечника.

Результаты оптимизации колонны с учётом и без учета ограничения по жёсткости

Вид параметра	Значения параметров в оптимальном проекте	
	без учёта ограничения по жёсткости	с учётом ограничения по жёсткости
$F(X^*)$, (м ³)	0,131	0,214
X_1^* , (м)	0,181	0,15
X_2^* , (м)	0,0078	0,0059
X_3^* , (м)	0,464	0,625
X_4^* , (м)	0,0058	0,0079
X_5^* , (м)	0,15	0,20
X_6^* , (м)	0,008	0,0122
X_7^* , (м)	0,80	1,03
X_8^* , (м)	0,01	0,0128
$ \sigma_{\max}^1$, (МПа)	200,5	169,4
$ \sigma_{\max}^2$, (МПа)	188,8	101,9
v_4 , (м)	0,828	0,0375
$F_{cr\varnothing}$, (кН)	999	2661

Анализируя результаты оптимизации, приведённые в таблице, отметим следующее:

- включение ограничений по жёсткости в данной задаче значительно увеличивает расход материала (на 63 %);
- без учёта ограничения по жёсткости активными были ограничения по прочности, а с его учётом активным становилось ограничение на перемещение верхнего узла 4 средней колонны;
- без учёта ограничения по жёсткости часть параметрических ограничений размеров сечений вышла на нижнюю границу;

- значительная толщина стенки сечений колонн получена вследствие активности конструктивных ограничений на соотношение высоты и толщины;
- при отсутствии ограничения на перемещение значение продольной нагрузки (780 кН) становится ближе к критической «эйлеровой» нагрузке в оптимальном решении, при этом значительно возрастают приближённое значение прогиба колонны (0,828 м) и вклад продольной нагрузки в ограничения по прочности.

Выводы

1. Разработана инженерная методика расчёта по нагрузке колонн ступенчатой жёсткости, деформируемых в составе каркаса промышленного здания в условиях продольно-поперечного изгиба.
2. Поставлена и решена задача оптимизации сечений средней, наиболее нагруженной колонны каркаса промышленного здания с использованием разработанной инженерной методики расчёта колонн на этапе формирования ограничений задачи оптимизации.
3. Выявлено наиболее существенное влияние на оптимальный проект ограничений на перемещения узлов колонн (они становятся наиболее активными при сближении параметра продольной нагрузки с его критическим значением по Эйлеру в плоскости изгиба).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Соппротивление материалов. 5-е изд. Москва : Высшая школа, 2007. 500 с.
2. Дарков А.В., Шапошников Н.Н. Строительная механика. Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2004. 656 с.
3. Смирнов А.Ф., Александров А.В., Лащеников Б.Я., Шапошников Н.Н. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений. Москва : Стройиздат, 1984. 416 с.
4. Потапов В.Д., Александров А.В., Косицин С.Б., Долотказин Д.Б. Строительная механика. Книга 1. Статика упругих систем. Москва : Высшая школа, 2007. 512 с.
5. Катюшин В.В. Здания с каркасами из стальных рам переменного сечения. Москва : Стройиздат, 2005. 656 с.
6. Краснов Л.А. Справочник для решения задач по сопротивлению материалов. Новосибирск : Изд-во СГУПС, 2004. 118 с.
7. Перельмуттер А.В., Сливкер В.И. Расчётные модели сооружений и возможности их анализа. Киев : ВПП «Компас», 2001. 448 с.
8. Ляхович Л.С. Разделение критических сил и собственных частот упругих систем. Томск : Изд-во ТГАСУ, 2004. 140 с.
9. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. Москва : Наука, 1964. 336 с.
10. Прочность, устойчивость, колебания : справочник. Т. 3 / под общ. ред. И.А. Биргера, Я.Г. Пановко). Москва : Машиностроение, 1968. 567 с.
11. Гребенюк Г.И., Попов Б.Н., Яньков Е.В. Основы расчёта и оптимизации конструкций с использованием метода конечных элементов. Новосибирск : НИСИ, 1992. 96 с.
12. Лазарев И.Б. Основы оптимального проектирования конструкций. Задачи и методы. Новосибирск : Изд-во СГУПС, 1995. 296 с.
13. Ляхович Л.С., Малиновский А.П. Оптимизация несущей способности систем по устойчивости и частоте колебаний // Пространственные конструкции в Красноярском крае. 1979. № 12. С. 103–113.
14. Ляхович Л.С. Особые свойства оптимальных систем и основные направления их реализации в методах расчёта сооружений. Томск : Изд-во ТГАСУ, 2009. 372 с.

15. Гребенюк Г.И., Безделев В.В. Метод подвижного внешнего штрафа в задачах оптимального проектирования конструкций. Омск : ОмПИ, 1983. С. 34–40.
16. Безделев В.В., Гребенюк Г.И., Попов Б.Н. Комплекс программ расчёта и оптимизации конструкций «РИОСК» // Проблемы оптимизации и надёжности в строительной механике : тезисы Всесоюзной конференции. Вильнюс : Москласс, 1983. С. 14–15.
17. Grebeniuk G.I., Liuft N.A., Nikolskii A.V. Calculation for stability of centrally compressed rods of steered stiffness in existence linearly deformable connections // IOP Conference Materials, Science and Engineering. Constructions, buildings and structures. 2019. V. 687. 3.
18. Khot N.S. Nonlinear Analysis of Optimized Structures with Constraints on System Stability // AIAA Journal. 1983. V. 21. № 8. P. 1181–1185.
19. Khot N.S., Venkaya V.B., Berke L. Optimum structure design with stability constraints // Journal for numerical methods in engineering. 1976. V. 10. P. 1097–1114.
20. Kinsalass J. Optimum Design of Structures with Buckling Constraints // Journal of Solids and Structures. 1973. V. 9. P. 863–878.

REFERENCES

1. Aleksandrov A.V., Potapov V.D., Derzhavin B.P. Soprotivlenie materialov [Strength of materials], 5th ed. Moscow: Vysshaya shkola, 2007. 500 p. (rus)
2. Darkov A.V., Shaposhnikov N.N. Stroitel'naya mexanika [Construction engineering]. Saint-Petersburg; Moscow; Krasnodar: Lan, 2004. 656 p. (rus)
3. Smirnov A.F., Aleksandrov A.V., Lashhenikov B.Ya., Shaposhnikov N.N. Stroitel'naya mexanika. Dinamika i ustojchivost' sooruzhenij [Construction mechanics. Dynamics and stability of structures]. Moscow: Stroiizdat, 1984. 416 p. (rus)
4. Potapov V.D., Aleksandrov A.V., Kosicin S.B., Dolotkazin D.B. Stroitel'naya mexanika. Kniga 1. Statika uprugix sistem [Construction mechanics. Book 1. Statics of elastic systems]. Moscow: Vysshaya shkola, 2007. 512 p. (rus)
5. Katyushin V.V. Zdaniya s karkasami iz stalnykh ram peremennogo secheniya [Buildings with steel frames of variable cross-section]. Moscow: Stroiizdat, 2005. 656 p. (rus)
6. Krasnov L.A. Spravochnik dlya resheniya zadach po soprotivleniyu materialov [Material resistance handbook]. Novosibirsk: SGUPS, 2004. 118 p. (rus)
7. Perel'mutter A.V., Slivker V.I. Raschetnye modeli sooruzhenij i vozmozhnosti ix analiza [Models of structural analysis and their capabilities]. Kiev: Kompas, 2001. 448 p. (rus)
8. Lyahovich L.S. Razdelenie kriticheskix sil i sobstvennyx chastot uprugix sistem [Separation of critical forces and eigen-frequency of elastic systems]. Tomsk: TSUAB, 2004. 140 p. (rus)
9. Panovko Ya.G., Gubanov I.I. Ustojchivost i kolebaniya uprugix sistem [Stability and vibrations of elastic systems]. Moscow: Nauka, 1964. 336 p. (rus)
10. Birger I.A., Panovko Ya.G. (Eds) Prochnost, ustojchivost, kolebaniya. Spravochnik, t. 3 [Strength, stability, oscillations: a guide], vol. 3. Moscow: Mashinostroenie, 1968. 567 p. (rus)
11. Grebenyuk G.I., Popov B.N., Yan'kov E.V. Osnovy rascheta i optimizacii konstrukcij s ispol'zovaniem metoda konechnykh elementov [Basics of structural analysis and optimization using the finite element method]. Novosibirsk: NISI, 1992. 96 p. (rus)
12. Lazarev I.B. Osnovy optimal'nogo proektirovaniya konstrukcij. Zadachi i metody [Basics of optimum design of structures. Tasks and methods]. Novosibirsk: SGUPS, 1995. 296 p. (rus)
13. Lyahovich L.S., Malinovskij A.P. Optimizaciya nesushhej sposobnosti ustojchivosti i chastote kolebanij [Load-bearing capacity and oscillation frequency optimisation]. In: Prostranstvennye konstrukcii v Krasnoyarskom krae [Spatial structures in the Krasnoyarsk region]. 1979, No. 12, Pp. 103–113. (rus)
14. Lyahovich L.S. Osobyie svoystva optimal'nykh sistem i osnovnye napravleniya ikh realizatsii v metodakh rascheta sooruzhenij [Specific properties of optimum systems and their implementation in structural analysis]. Tomsk: TSUAB, 2009. 372 p. (rus)
15. Grebenyuk G.I., Bezdelev V.V. Metod podvizhnogo vneshnego shtrafa v zadachax optimal'nogo proektirovaniya konstrukcij [Penalty methods in optimal design of structures]. Омск: ОмПИ, 1983, Pp. 34–40. (rus)
16. Bezdelev V.V., Grebenyuk G.I., Popov B.N. Kompleks programm rascheta i optimizatsii konstruktсии "RIOSK" [Program complex "RIOSK" for structural and optimization analysis]. In: Problemy op-

- timizatsii i nadezhnosti v stroitel'noi mekhanike: tezisy Vsesoyuznoi konferentsii "Problemy` optimizatsii i nadezhnosti v stroitel'noj mexanike" (Proc. All-Russ. Conf. 'Problems of Optimization and Reliability in Structural Analysis'). Vilnius: Mosklass. 1983, Pp. 14–15. (rus)
17. Grebeniuk G.J., Liuft N.A., Nikolskii A.V. Calculation for stability of centrally compressed rods of steered stiffness in existence linearly deformable connections. *IOP Conference Materials, Science and Engineering. Constructions, Buildings and Structures*. 2019. V. 687.
 18. Khot N.S. Nonlinear analysis of optimized structures with constraints on system stability. *AIAA Journal*. 1983. V. 21. No. 8. Pp. 1181–1185.
 19. Khot N.S., Venkaya V.B., Berke L. Optimum structure design with stability constraints. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1976. V. 10. Pp. 1097–1114.
 20. Kinsalass J. Optimum design of structures with buckling constraints. *International Journal of Solids and Structures*. 1973. V. 9. Pp. 863–878.

Сведения об авторах

Гребенюк Григорий Иванович, докт. техн. наук, профессор, Томский государственный архитектурно-строительный университет, 634003, г. Томск, пл. Соляная, 2, greb@sibstrin.ru

Максак Владислав Иванович, докт. техн. наук, профессор, Томский государственный архитектурно-строительный университет, 634003, г. Томск, пл. Соляная, 2, mksak@mail.ru

Янков Евгений Владимирович, канд. техн. наук, доцент, Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет, 630008, г. Новосибирск, ул. Ленинградская, 113, e.yankov@sibstrin.ru

Author Details

Grigori I. Grebenyuk, DSc, Professor, Tomsk State University of Architecture and Building, 2, Solyanaya Sq., 634003, Tomsk, Russia, greb@sibstrin.ru

Vladislav I. Maksak, DSc, Professor, Tomsk State University of Architecture and Building, 2, Solyanaya Sq., 634003, Tomsk, Russia, mksak@mail.ru

Evgenii V. Yan'kov, PhD, A/Professor, Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering, 113, Leningradskaya Str., 630008, Novosibirsk, Russia, e.yankov@sibstrin.ru