

УДК 539.375

DOI: 10.31675/1607-1859-2020-22-4-126-139

*Д.Д. ЯХЬЯЕВ,**Азербайджанский технический университет*

ИССЛЕДОВАНИЕ КЛЕПАНОЙ ПЕРФОРИРОВАННОЙ УПРУГОЙ ПАНЕЛИ С ВКЛЮЧЕНИЯМИ ИЗ ИНОРОДНОГО МАТЕРИАЛА

Рассматривается задача теории упругости для бесконечной изотропной упругой пластины толщиной h , ослабленной периодической системой круговых отверстий. Круговые отверстия заполнены включениями из инородного упругого материала, спаянными вдоль обвода. К панели симметрично относительно поверхности приклепаны поперечные ребра жесткости из другого упругого материала. Упругая перфорированная панель подвергается однородному растягивающему напряжению (растяжение на бесконечности). Действие приклепанных подкрепляющих ребер в расчетной схеме моделируется неизвестными сосредоточенными силами, приложенными в местах расположения точек крепления.

Ключевые слова: упругая перфорированная клепаная панель; инородные упругие включения; одноосное растяжение; сосредоточенные силы; поперечные ребра жесткости.

Для цитирования: Яхьяев Д.Д. Исследование клепаной перфорированной упругой панели с включениями из инородного материала // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. 2020. Т. 22. № 4. С. 126–139.

DOI: 10.31675/1607-1859-2020-22-4-126-139

*J.D. YAKHYAEV,**Azerbaijan Technical University*

ELASTIC RIVETED PERFORATED PLATE WITH FOREIGN INCLUSIONS

The paper focuses on the problem of the elasticity theory for an infinite isotropic elastic plate weakened by circular perforation. The perforated holes are filled with inclusions made of elastic material and sealed along the edges. Transverse stiffening ribs made of another elastic material are riveted to the panel symmetrically to the surface. The elastic perforated plate is subjected to uniform tensile stress (tension at infinity). The action of riveted reinforcing strengthening ribs is modeled by unknown concentrated forces applied to anchor points.

Keywords: elastic perforated riveted plate; foreign elastic inclusions; uniaxial tension; concentrated forces; transversal rib.

For citation: Yakhyayev J.D. Issledovanie klepanoi perforirovannoi uprugoi paneli s vklyucheniymi iz inorodnogo materiala [Elastic riveted perforated plate with foreign inclusions]. Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo arkhitekturo-stroitel'nogo universiteta – Journal of Construction and Architecture. 2020. V. 22. No. 4. Pp. 126–139.

DOI: 10.31675/1607-1859-2020-22-4-126-139

Введение

В промышленном и гражданском строительстве, транспортном машиностроении и других отраслях производства для уменьшения материалоемко-

сти конструкций и изделий, повышения их прочности и жесткости, эксплуатационной надежности широко используют подкрепление пластины упругими элементами [1–8]. Пластины могут быть перфорированными. В строительстве широко используют перфорированные балки и тонкостенные профили листовых тонкостенных конструкций. Для практики важен случай, когда в отверстия клепаной панели впаяны упругие шайбы из другого материала. Этот случай очень важен, т. к. к нему могут быть сведены задачи расчета на прочность клепаной перфорированной панели с трубками, проходящими через отверстия в панели и скрепленными с ней.

Представляет научный интерес оценка взаимодействия инородных упругих включений в клепаной перфорированной панели, исследование влияния расположения включений, ребер жесткости и точек крепления на напряженно-деформированное состояние панели.

Постановка задачи

В отверстия клепаной панели впаяны упругие шайбы из материала, отличного от материала панели. Рассматривается бесконечная изотропная упругая пластина толщиной h , ослабленная периодической системой круговых отверстий, имеющих радиус λ . Пусть центры этих отверстий находятся в точках

$$P_m = m\omega, \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad \omega = 2.$$

Круговые отверстия L_m ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) заполнены шайбами из инородного упругого материала, спаянными вдоль обвода. К панели симметрично относительно поверхности приклепаны поперечные ребра жесткости в точках $z = \pm mL \pm iny_0$ ($m = 2k - 1$; $k = 1, 2, \dots$; $n = 1, 2, \dots$) из другого упругого материала, площадь сечения которых A , модуль Юнга E_s . Выбор системы координат и обозначения поясняются на рис. 1. На бесконечности действует однородное растягивающее напряжение $\sigma_y^\infty = \sigma_0$ (растяжение до бесконечности). Действие приклепанных подкрепляющих ребер в расчетной схеме заменяется неизвестными сосредоточенными силами, приложенными в местах расположения точек крепления (рис. 1). Начало системы координат совмещаем с геометрическим центром отверстия L_0 в панели.

На основании симметрии граничных условий задачи и геометрии области D , занятой упругой средой, компоненты тензора напряжений в плоскости являются периодическими функциями с основным периодом ω .

При деформации пластины смежные точки контуров включений и плоскости будут иметь одинаковые перемещения, а усилия, действующие со стороны пластины на любую шайбу, будут равны по величине и противоположны по знаку усилиям, действующим на панель со стороны включения.

Так как решение для панели обладает свойством периодичности, достаточно рассмотреть условия сопряжения плоскости с включением лишь вдоль контура основного отверстия L_0 .

Комплексные потенциалы, описывающие напряженно-деформированное состояние включения, обозначим через $\Phi_b(z)$ и $\Psi_b(z)$, а потенциалы, относящиеся к панели, – через $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$.

Рассматриваемая задача сводится к отысканию двух пар функций $\Phi(z)$,

$\Psi(z)$ и $\Phi_b(z)$, $\Psi_b(z)$ комплексного переменного $z = x + iy$, аналитических в областях, занятых средой и шайбой и удовлетворяющих граничным условиям [9]:

$$\begin{aligned} & \Phi(\tau) + \overline{\Phi(\tau)} - [\bar{\tau}\Phi'(\tau) + \Psi(\tau)]e^{2i\theta} = \\ & = \Phi_b(\tau) + \overline{\Phi_b(\tau)} - [\bar{\tau}\Phi'_b(\tau) + \Psi_b(\tau)]e^{2i\theta}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & -\chi\overline{\Phi(\tau)} + \Phi(\tau) - [\bar{\tau}\Phi'(\tau) + \Psi(\tau)]e^{2i\theta} = \\ & = \frac{\mu}{\mu_b} \left\{ \chi_b\overline{\Phi_b(\tau)} + \Phi_b(\tau) - [\bar{\tau}\Phi'_b(\tau) + \Psi_b(\tau)]e^{2i\theta} \right\}. \end{aligned} \quad (2)$$

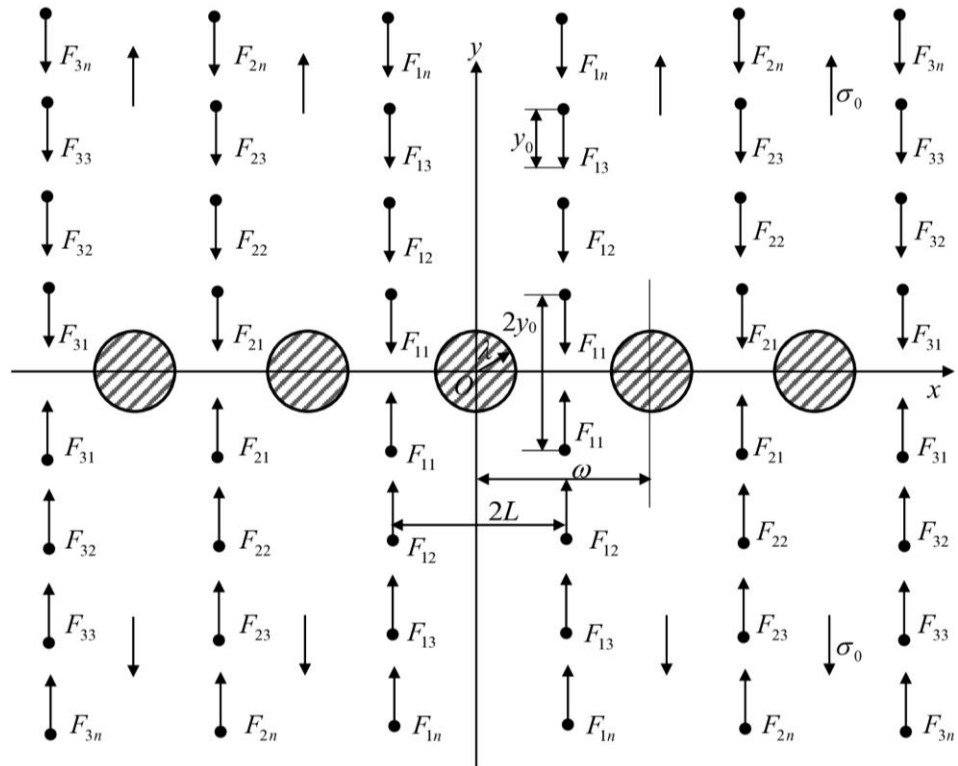


Рис. 1. Расчетная схема упругой клепаной перфорированной панели с инородными включениями

Условие (1) выражает, что силы, действующие с обеих сторон на элементы линии контакта, равны. Условие (2) выражает условие непрерывности перемещения на линии контакта. χ_b , μ_b и χ , μ – упругие постоянные материала шайбы и панели соответственно, $\tau = \lambda e^{i\theta} + m\omega$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

Решение краевой задачи

Обозначим левую часть краевого условия (1) через $f_1(\theta) - if_2(\theta)$:

$$\Phi(\tau) + \overline{\Phi(\tau)} - [\bar{\tau}\Phi'(\tau) + \Psi(\tau)]e^{2i\theta} = f_1 - if_2. \quad (3)$$

Пусть на контуре L_0 ($\tau = \lambda e^{i\theta}$) функция $f_1 - if_2$ разлагается в ряд Фурье. В силу симметрии ряд Фурье этой функции имеет вид

$$f_1 - if_2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{2k} e^{2ik\theta}, \quad \text{Im } A_{2k} = 0.$$

Комплексные потенциалы $\Phi_0(z)$ и $\Psi_0(z)$ аналитичны во внутренности круга $|\tau| = \lambda$ и могут быть представлены рядами [9]:

$$\Phi_b(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{2k} z^{2k}, \quad \Psi_b(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{2k} z^{2k}. \quad (4)$$

На основании краевого условия (3) и соотношения в виде ряда Фурье для определения потенциалов $\Phi_b(z)$ и $\Psi_b(z)$ имеем на контуре L_0 следующее граничное условие:

$$\Phi_b(\tau) + \overline{\Phi_b(\tau)} - [\bar{\tau}\Phi'_b(\tau) + \Psi_b(\tau)]e^{2i\theta} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{2k} e^{2ik\theta}. \quad (5)$$

Напомним, что коэффициенты A_{2k} пока нам неизвестны.

Подставив (4) и граничное условие (5) на контуре включения и применяя процедуру метода степенных рядов, находим:

$$a_0 = \frac{A_0}{2}, \quad a_{2k} = \frac{A_{-2k}}{\lambda^{2k}} \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (6)$$

$$c_{2k} = -(2k+1) \frac{A_{-2k-2}}{\lambda^{2k}} - \frac{A_{2k+2}}{\lambda^{2k}} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Потенциалы $\Phi_b(z)$ и $\Psi_b(z)$ позволяют, после некоторых преобразований, записать краевые условия на контуре L_0 ($\tau = \lambda e^{i\theta}$) для комплексных потенциалов $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ в следующем виде:

$$\Phi(\tau) + \overline{\Phi(\tau)} - [\bar{\tau}\Phi'(\tau) + \Psi(\tau)]e^{2i\theta} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{2k} e^{2ki\theta}, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & \Phi(\tau) - \chi \overline{\Phi(\tau)} - [\bar{\tau}\Phi'(\tau) + \Psi(\tau)]e^{2i\theta} = \\ & = \frac{\mu}{\mu_b} \left[A_0 \frac{(1-\chi_b)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{2k} e^{2ki\theta} - \chi_b \sum_{k=1}^{\infty} A_{2k} e^{-2ki\theta} \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Для определения неизвестных пока величин A_{2k} ($k = 0, \pm 1, \dots$) рассмотрим решение для панели.

Комплексные потенциалы $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ для упругой панели находим в виде

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \Phi_1(z), \quad \Psi(z) = \Psi_0(z) + \Psi_1(z). \quad (9)$$

Представления для функций $\Phi_0(z)$, $\Psi_0(z)$ и $\Phi_1(z)$, $\Psi_1(z)$ имеют вид

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{4} \sigma_0 - \frac{1}{2\pi(1+\chi)h} \sum_{m,n}' F_{mn} \left[\frac{1}{z - mL + iny_0} - \frac{1}{z - mL - iny_0} \right],$$

$$\Psi_0(z) = \frac{1}{2}\sigma_0 - \frac{i\chi}{2\pi(1+\chi)h} \sum_{m,n} 'F_{mn} \left[\frac{1}{z - mL + iny_0} - \frac{1}{z - mL - iny_0} \right] +$$

$$+ \frac{i}{2\pi(1+\chi)h} \sum_{m,n} 'F_{mn} \left[\frac{Lm - iny_0}{(z - mL - iny_0)^2} - \frac{mL + iny_0}{(z - mL + iny_0)^2} \right],$$

где F_{mn} – сосредоточенные силы, приложенные в точках $z = mL + iny_0$, $\chi = (3 - \nu)/(1 + \nu)$; ν – коэффициент Пуассона материала пластины.

$$\Phi_1(z) = \alpha_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \rho^{(2k)}(z)}{(2k+1)!},$$

$$\Psi_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \rho^{(2k)}(z)}{(2k+1)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} S^{(2k+1)}(z)}{(2k+1)!},$$

где

$$\rho(z) = \left(\frac{\pi}{\omega} \right)^2 \sin^{-2} \left(\frac{\pi}{\omega} z \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{\omega} \right)^2,$$

$$S(z) = \sum_{m,n} ' \left[\frac{P_m}{(z - P_m)^2} - \frac{2z}{P_m} - \frac{1}{P_m} \right].$$

Приведем теперь зависимости, которым должны удовлетворять коэффициенты представлений (9). Из условий симметрии напряженного состояния в плоскости относительно координатных осей с учетом формулы Колосова – Мусхелишвили следует, что

$$\Phi(-z) = \Phi(z), \quad \Phi(\bar{z}) = \overline{\Phi(z)},$$

$$\Psi(-z) = \Psi(z), \quad \Psi(\bar{z}) = \overline{\Psi(z)}.$$

Отсюда находим, что

$$\operatorname{Im} \alpha_{2k+2} = 0, \quad \operatorname{Im} \beta_{2k+2} = 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (10)$$

Можно убедиться, что приведенные представления определяют класс симметричных задач с периодическим распределением напряжений.

Из условия постоянства главного вектора всех сил, действующих на дугу, соединяющую две конгруэнтные точки в D , занятой средой, следует

$$\alpha_0 = \frac{\pi^2}{24} \beta_2 \lambda^2.$$

Неизвестные функции $\Phi_1(z)$, $\Psi_1(z)$ и постоянные α_{2k} , β_{2k} и A_{2k} должны быть определены из граничных условий (1), (3).

Для составления уравнений относительно коэффициентов α_{2k} , β_{2k} функций $\Phi_1(z)$, $\Psi_1(z)$ представим краевое условие (7) в следующем виде:

$$\Phi_1(\tau) + \overline{\Phi_1(\tau)} - [\bar{\tau} \Phi_1'(\tau) + \Psi_1(\tau)] e^{2i\theta} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{2k} e^{2ik\theta} + f_1^*(\theta) + i f_2^*(\theta), \quad (11)$$

где

$$f_1^*(\theta) + i f_2^*(\theta) = -\Phi_0(\tau) - \overline{\Phi_0(\tau)} + [\bar{\tau} \Phi_0'(\tau) + \Psi_0(\tau)] e^{2i\theta}. \quad (12)$$

Относительно функции $f_1^*(\theta) + if_2^*(\theta)$ будем считать, что она разлагается на контуре L_0 в ряд Фурье.

Подставив в левую часть краевого условия (11) вместо $\Phi_1(z)$, $\overline{\Phi_1(\tau)}$, $\Phi_1'(\tau)$ и $\Psi_1(z)$ их разложения в ряды Лорана в окрестности нулевой точки, а в правую часть (11) вместо $f_1^* + if_2^*$ ряд Фурье и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $e^{j\theta}$, получим две бесконечные системы алгебраических уравнений относительно коэффициентов α_{2k} , β_{2k} .

После некоторых преобразований приходим к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно α_{2k} :

$$\alpha_{2j+2} = \sum_{k=0}^{\infty} A_{j,k} \alpha_{2k+2} + b_j \quad (j = 0, 1, 2, \dots), \quad (13)$$

$$b_0 = A'_2 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+2} \cdot \lambda^{2k+4}}{2^{2k+4}} A'_{2k-2},$$

$$b_j = A'_{2j+2} - \frac{(2j+1)A'_0 g_{j+1} \lambda^{2j+2}}{k_1 2^{2j+2}} -$$

$$- \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2j+2k+3)! g_{j+k+2} \lambda^{2k+2j+4}}{(2j)!(2k+3)! 2^{2j+2k+4}} A'_{-2k-2}, \quad (14)$$

$$A'_0 = A_0 + M_0, \quad A'_2 = A_2 + M_2,$$

$$A'_{2k} = A_{2k} + M_{2k} \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots),$$

$$M_0 = -\frac{1}{2} \sigma_0 - \frac{1}{\pi(1+\chi)h} \sum' F_{mn} \left(\frac{2ny_0}{(mL)^2 + (ny_0)^2} \right),$$

$$M_2 = \frac{1}{2} \sigma_0 - \frac{1}{\pi(1+\chi)h} \sum' F_{mn} \left[\frac{\lambda^2 \sin 3\varphi_1}{\rho_1^3} + \frac{\chi \sin \varphi_1}{\rho_1} - \frac{\sin 3\varphi_1}{\rho_1} \right],$$

$$M_{2k} = \frac{1}{\pi(1+\chi)h} \sum' F_{mn} \left[\frac{\lambda^{2k} \sin(2k+1)\varphi_1}{\rho_1^{2k+1}} + \frac{(-2)(-3)\dots(-2k)\lambda^{2k} \sin(2k+1)\varphi_1}{(2k-1)!\rho_1^{2k+1}} - \right. \\ \left. - \frac{\chi \lambda^{2k-2} \sin(2k-1)\varphi_1}{\rho_1^{2k-1}} + \frac{(-2)(-3)\dots(1-2k)\lambda^{2k-2} \sin(2k+1)\varphi_1}{(2k-2)!\rho_1^{2k+1}} \right] \quad (k = 2, 3, \dots),$$

$$M_{-2k} = \frac{1}{\pi(1+\chi)h} \sum' F_{mn} \frac{\lambda^{2k} \sin(2k+1)\varphi_1}{\rho_1^{2k+1}}, \quad (k = 1, 2, \dots),$$

$$\rho_1 = \sqrt{(mL)^2 + (ny_0)^2}, \quad \varphi_1 = \arctg \frac{ny_0}{mL}.$$

$$g_j = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^4}, \quad k_1 = 1 - \frac{\pi^2}{12} \lambda^2, \quad k_2 = \frac{\pi^2}{24},$$

$$A_{j,k} = (2j+1) \gamma_{j,k} \lambda^{2k+2j+2},$$

$$\begin{aligned}\gamma_{j,k} = & -\frac{(2j+2k+2)!g_{j+k+1}}{(2j+1)!(2k+1)!2^{2j+2k+2}} + \frac{(2j+2k+4)!g_{j+k+2}\lambda^2}{(2j+2)!(2k+2)!2^{2j+2k+4}} + \\ & + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2j+2i+1)!(2k+2i+1)!g_{j+i+1}g_{k+i+1}\lambda^{4i+2}}{(2i+1)!(2j+1)!(2k+1)!(2i)!2^{2j+2k+4i+4}} + b_{j,k} \\ & b_{0,k} = 0, \quad b_{j,0} = 0, \\ & b_{j,k} = \frac{g_{j+1}g_{k+1}\lambda^2}{2^{2j+2k+4}} \left(1 + \frac{2k_2\lambda^2}{k_1}\right), \\ & (j = 1, 2, \dots), \quad (k = 1, 2, \dots).\end{aligned}$$

Постоянные β_{2k} определяются из следующих соотношений:

$$\beta_2 = \frac{1}{k_1} \left[-A'_0 + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+1} \cdot \lambda^{2k+2}}{2^{2k+2}} \alpha_{2k+2} \right], \quad (15)$$

$$\beta_{2j+4} = (2j+3)\alpha_{2j+2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2j+2k+3)!g_{j+k+2}\lambda^{2j+2k+2}}{(2j+2)!(2k+1)!2^{2j+2k+4}} \alpha_{2k+2} - A'_{-2j-2}.$$

Преобразуем граничное условие (8) к следующему виду:

$$\Phi(\tau) - \chi \overline{\Phi(\tau)} - [\tau \Phi'(\tau) + \Psi(\tau)] e^{2i\theta} = F(\theta) + \varphi_1^*(\theta) + i\varphi_2^*(\theta), \quad (16)$$

где
$$F(\theta) = \frac{\mu}{\mu_b} \left[A_0 \frac{(1-\chi_b)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{2k} e^{2ki\theta} - \chi_b \sum_{k=1}^{\infty} A_{2k} e^{-2ki\theta} \right], \quad (17)$$

$$\varphi_1^*(\theta) + i\varphi_2^*(\theta) = -\chi \overline{\Phi_0(\tau)} + \Phi_0(\tau) - [\tau \Phi'_0(\tau) + \Psi_0(\tau)] e^{2i\theta}. \quad (18)$$

Поступая с функциями (17), (18) и с граничными условиями (16), как это было сделано соответственно с функциями (12) и краевым условием (11), получим для определения коэффициентов α_{2k} бесконечную линейную алгебраическую систему

$$\alpha_{2j+2} = \sum_{k=0}^{\infty} A_{j,k} \alpha_{2k+2} + b_j \quad (j = 0, 1, 2, \dots), \quad (19)$$

$$-\chi b_0 = A'_2 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+2} \cdot \lambda^{2k+4}}{2^{2k+4}} A'_{-2k-2}, \quad (20)$$

$$-\chi b_j = A'_{2j+2} - \frac{(2j+1)A'_0 g_{j+1} \lambda^{2j+2}}{k_1 2^{2j+2}} -$$

$$- \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2j+2k+3)!g_{j+k+2}\lambda^{2k+2j+4}}{(2j)!(2k+3)!2^{2j+2k+4}} A'_{-2k-2},$$

$$A'_0 = -A_0 \frac{(\chi_b - 1)\mu}{2\mu_b} + M'_0, \quad A'_{2k} = \frac{\mu}{\mu_b} A_{2k} + M'_{2k},$$

$$A'_{-2k} = -\chi_b \frac{\mu}{\mu_b} A_{-2k} + M'_{-2k},$$

$$\begin{aligned}
k_1 &= 1 - (1 - \chi) \frac{\pi^2}{12} \lambda^2, \quad k_2 = \frac{\pi^2}{24}, \\
-\chi A_{j,k} &= (2j+1) \gamma_{j,k} \lambda^{2j+2k+2}, \\
\gamma_{0,0} &= \frac{3}{8} g_2 \lambda^2 - \chi \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(2i+1) g_{i+1}^2 \lambda^{4i+2}}{2^{4i+4}}, \\
\gamma_{j,k} &= -\frac{(2j+2k+2)! g_{j+k+1}}{(2j+1)!(2k+1)! 2^{2j+2k+2}} + \frac{(2j+2k+4)! g_{j+k+2} \lambda^2}{(2j+2)!(2k+2)! 2^{2j+2k+4}} + \\
&\quad - \chi \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2j+2i+1)!(2k+2i+1)! g_{j+i+1} g_{k+i+1} \lambda^{4i+2}}{(2i+1)!(2j+1)!(2k+1)!(2i)! 2^{2j+2k+4i+4}} + b_{j,k}, \\
b_{0,k} &= 0, \quad b_{j,0} = 0, \\
b_{j,k} &= \frac{g_{j+1} g_{k+1} \lambda^2}{2^{2j+2k+4}} \left(1 + \frac{(1-\chi)^2 k_2 \lambda^2}{k_1} \right), \\
(j &= 1, 2, \dots), \quad (k = 1, 2, \dots).
\end{aligned}$$

Величины M'_{2k} определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}
M'_0 &= M_0 + \frac{(\chi+1)}{4} \sigma_0, \\
M'_2 &= M_2, \quad M'_{2k} = M_{2k} \quad (k = 1, 2, \dots), \\
M'_{-2} &= M_{-2} - \frac{\lambda^2}{\pi h} \sum_{m,n} ' F_{mn} \frac{\sin 3\varphi_1}{\rho_1^3}, \\
M'_{-2k} &= M_{-2k} - \frac{\lambda^2}{\pi h} \sum_{m,n} ' F_{mn} \frac{\sin(2k+1)\varphi_1}{\rho_1^{2k+1}}.
\end{aligned}$$

Обозначим решение системы (19), (20) через α_{2k}^* .

Равенства

$$\alpha_{2k+2} = \alpha_{2k+2}^* \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (21)$$

определяют усилия взаимодействия между панелью и включением.

Запишем системы, определяющие коэффициенты α_{2k} и α_{2k}^* в следующем виде:

$$\alpha_{2j+2} = \sum_{k=0}^{\infty} A_{j,k} \alpha_{2k+2} + b_j, \quad (22)$$

$$\alpha_{2j+2}^* = \sum_{k=0}^{\infty} A_{j,k}^* \alpha_{2k+2} + b_j^*. \quad (23)$$

Умножая систему (23) на $-\chi \mu_b / \chi_{b\mu}$ и складывая с (22), с учетом равенств (21) получим

$$\alpha_{2j+2} \left(1 - \frac{\chi \mu_b}{\chi_b \mu} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[A_{j,k} - \frac{\chi \mu_b}{\chi_b \mu} A_{j,k}^* \right] \alpha_{2k+2} + b_j - \frac{\chi \mu_b}{\chi_b \mu} b_j^*. \quad (24)$$

Чтобы исключить из (24) коэффициенты α_{2k+2} , воспользуемся следующим приемом. Краевое условие (16) приведем к виду (11):

$$\Phi_1(\tau) + \overline{\Phi_1(\tau)} - [\bar{\tau} \Phi_1'(\tau) + \Psi_1(\tau)] e^{2i\theta} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{2k}^* e^{2ik\theta} + (1 + \chi) \overline{\Phi_1(\tau)}. \quad (25)$$

Подставив теперь вместо левой части в (25) ее выражения из (11), а вместо функции $\overline{\Phi_1(\tau)}$ в правой части ее ряд Фурье и приравняв затем коэффициенты при одинаковых степенях $e^{i\theta}$ в левой и правой частях соотношения (25), находим:

$$A_{2j+2} = \frac{1 + \chi}{1 - \mu/\mu_b} \alpha_{2k+2}, \quad (26)$$

$$A_{-2j} = \frac{1 + \chi}{1 + \chi_b \mu/\mu_b} \sum_{k=0}^{\infty} r_{j,k} \lambda^{2j+2k+2} \alpha_{2k+2} + \frac{1}{1 + \chi_b \mu/\mu_b} (M'_{-2j} - M_{-2j}), \quad (27)$$

$$A_0 = \left[1 - \frac{\mu(1 - \chi_b)}{2\mu_b} \right] = M'_0 - M_0 + (1 + \chi) \alpha_0 + (1 + \chi) \sum_{k=0}^{\infty} r_{0,k} \lambda^{2k+2} \alpha_{2k+2}. \quad (28)$$

Формулы (26) позволяют исключить из (24) коэффициенты α_{2k+2} . В результате получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно A_{2k} :

$$A_{2j+2} = \sum_{k=0}^{\infty} d_{j,k} A_{2k+1} + T_j \quad (j = 0, 1, \dots), \quad (29)$$

$$d_{j,k} = (2j+1) \lambda^{2j+2k+2} S_{j,k} / \gamma, \quad (30)$$

$$S_{j,k} = \frac{1 - \mu/\mu_b}{1 + \chi} \left(\gamma_{j,k} + \frac{\mu_b}{\chi_b \mu} \gamma_{j,k}^* + D_{j,k} \right),$$

$$D_{j,k} = \lambda^2 \frac{g_{j+1} g_{k+1}}{\lambda^{2j+2k+4}} r(\mu/\mu_b),$$

$$\eta(\mu/\mu_b) = \frac{(\chi_b - 1)}{\chi_b} \frac{1}{1 + (\chi - 1) k_2 \lambda^2} - \frac{2}{1 - 2k_2 \lambda^2},$$

$$1 - (1 - 2k_2 \lambda^2) \left[\frac{\chi - 1}{\chi + 1} - \frac{\mu}{\mu_b} \frac{\chi_b - 1}{\chi + 1} \right],$$

$$T_0^* = \left(1 + \frac{\mu_b}{\chi_b \mu} \right) \frac{\sigma_0}{2}, \quad T_j = (T_j^* + k_j) / \gamma,$$

$$k_0 = M_2 + \frac{\mu_b}{\chi_b \mu} M'_2 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+2} \lambda^{2k+4}}{2^{2k+4}} \left(M_{-2k-2} + \frac{\mu_b}{\omega \chi_b \mu} M'_{-2k-2} \right),$$

$$\begin{aligned}
T_j^* &= \frac{\sigma_0}{4} \frac{(2j+1)g_{j+1}\lambda^{2j+2}}{2^{2j+2}} \eta(\mu/\mu_b), \\
\eta_1(\mu/\mu_b) &= \frac{(1+\mu_b/\chi_b\mu) \left[\frac{\mu}{\mu_b}(\chi_b-1) - (\chi-1) \right]}{1 + (\chi-1)k_2\lambda^2 + \frac{\mu}{2\mu_b}(\chi_b-1)(1-2k_2\lambda^2)}, \\
k_j &= \frac{(2j+1)g_{j+1}\lambda^{2j+2}}{2^{2j+2}} \left\{ \frac{1 + (\chi-1)k_2\lambda^2}{e} \left[\frac{1}{(1-2k_2\lambda^2)} + \frac{1-\chi_b}{2\chi_b[1 + (\chi-1)k_2\lambda^2]} \right] - 1 \right\} M_0 - \\
&\quad - \frac{(2j+1)g_{j+1}\lambda^{2j+2}}{2^{2j+2}} \left\{ \frac{1}{(1-2k_2\lambda^2)e} + \frac{1}{\chi_b[1 + (\chi-1)k_2\lambda^2]} \left(\frac{1-\chi_b}{2e} + \frac{\mu}{\mu_b} \right) \right\} M'_0 + \\
&\quad + M_{2j+2} + \frac{\mu_b}{\chi_b\mu} M'_{2j+2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2j+2k+3)!g_{j+k+2}\lambda^{2j+2k+4}}{(2j)!(2k+3)!2^{2j+2k+4}} \left(M_{-2k-2} + \frac{\mu_b}{\chi_b\mu} M'_{-2k-2} \right), \\
\gamma &= \frac{(1-\mu/\mu_b)(1-\chi\mu_b/\chi_b\mu)}{(1+\chi)} - \frac{1+\chi_b}{\chi_b}, \\
e &= 1 - \frac{\mu(1-\chi_b)}{2\mu_b}.
\end{aligned}$$

Напомним, что в полученные алгебраические системы через коэффициенты M_{2k} , M'_{2k} входят неизвестные сосредоточенные силы F_{mn} ($m = 1, 2, \dots$; $n = 1, 2, \dots$).

Определение величин сосредоточенных сил

Займемся определением сосредоточенных сил. Для определения величины F_{mn} используем закон Гука. Согласно этому закону, искомая величина сосредоточенной силы F_{mn} , действующей на каждую заклепку со стороны ребра жесткости, равна

$$F_{mn} = \frac{E_s \cdot A}{2y_0 n} \Delta v_{mn} \quad (m = 1, 2, \dots; n = 1, 2, \dots), \quad (31)$$

где Δv_{mn} – взаимное смещение заклепок, равное удлинению соответствующего участка ребра.

Для определения Δv_{mn} необходимо найти взаимное смещение точек $z = mL + i(ny_0 - a_0)$ и $z = mL - i(ny_0 - a_0)$ в рассматриваемой задаче.

Используя полученные соотношения после выполнения элементарных, хотя и несколько громоздких выкладок, взаимное смещение заклепок Δv_{mn} указанных точек найдем в виде

$$\Delta v_{pr} = \Delta v_{p,r}^{(0)} + \Delta v_{p,r}^{(1)}, \quad (32)$$

$$\Delta v_{p,r}^{(0)} = \frac{1}{2\pi(1+\chi)\mu h} \sum_{m,n} F_{mn} \left[\chi \ln \frac{(p_0-m)^2 L^2 + a_0^2}{(p_0-m)^2 L^2 + [(r-n)y_0 - a_0]^2} + \right. \\ \left. + \frac{2(r-n)y_0 [(r-n)y_0 - a_0] \langle 2p_0(p_0-m)L^2 + a_0 [(r-n)y_0 - a_0] \rangle}{\langle (p_0-m)^2 L^2 + [(r-n)y_0 - a_0]^2 \rangle [(p_0-m)^2 L^2 + a_0^2]} + \right. \\ \left. + \frac{\sigma_0}{2\mu} (1+\chi)(ry_0 - a_0) \right], \quad (33)$$

$$\Delta v_{p,r}^{(1)} = \frac{1}{\mu} \left[(\chi-1)(ry_0 - a_0)\alpha_0 + (\chi+1) \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \sin(2k+1)\alpha}{(2k+1)\rho_2^{2k+1}} + \right. \\ \left. + (\chi-1) \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \lambda^{2k+2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{r_{j,k}}{2j+1} \rho_2^{2j+1} \sin(2j+1)\alpha - \right. \\ \left. - \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \sin(2k+1)\alpha}{(2k+1)\rho_2^{2k+1}} - \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2k+2} \lambda^{2k+2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{r_{j,k}}{2j+1} \rho_2^{2j+1} \sin(2j+1)\alpha + \right. \\ \left. + \sum_{k=0}^{\infty} (2k+2) \alpha_{2k+2} \lambda^{2k+2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2j+2k+2)}{2j+1} r_{j,k} \rho_2^{2j+1} \sin(2j+1)\alpha \right]. \quad (34)$$

Бесконечная алгебраическая система (31) с учетом (32), (34) принимает следующий вид:

$$F_{pr} = \frac{E_s A}{4\pi(1+\chi)\mu h r y_0} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{mn} \left[\chi \ln \frac{(p-m)^2 L^2 + a_0^2}{(p-m)^2 L^2 + [(r-n)y_0 - a_0]^2} + \right. \\ \left. + \chi \ln \frac{(p+m)^2 L^2 + a_0^2}{(p+m)^2 L^2 + [(r-n)y_0 - a_0]^2} + \right. \\ \left. + \frac{2(r-n)y_0 [(r-n)y_0 - a_0] \langle 2p(p-m)L^2 + a_0 [(r-n)y_0 - a_0] \rangle}{\langle (p-m)^2 L^2 + [(r-n)y_0 - a_0]^2 \rangle [(p-m)^2 L^2 + a_0^2]} + \right. \\ \left. + \frac{2(r-n)y_0 [(r-n)y_0 - a_0] \langle 2p(p+m)L^2 + a_0 [(r-n)y_0 - a_0] \rangle}{\langle (p+m)^2 L^2 + [(r-n)y_0 - a_0]^2 \rangle [(p+m)^2 L^2 + a_0^2]} + \right. \\ \left. + \frac{2(r+n)y_0 [(r+n)y_0 - a_0] \langle 2p(p-m)L^2 + a_0 [(r+n)y_0 - a_0] \rangle}{\langle (p-m)^2 L^2 + [(r+n)y_0 - a_0]^2 \rangle [(p-m)^2 L^2 + a_0^2]} + \right. \\ \left. + \frac{2(r+n)y_0 [(r+n)y_0 - a_0] \langle 2p(p+m)L^2 + a_0 [(r+n)y_0 - a_0] \rangle}{\langle (p+m)^2 L^2 + [(r+n)y_0 - a_0]^2 \rangle [(p+m)^2 L^2 + a_0^2]} \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{E_s A \sigma_0 (\chi + 1)}{2 y_0 r 4 \mu} \left[\alpha_0 (r y_0 - a_0) (\chi - 1) + (\chi + 1) \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \sin(2k+1)\alpha}{(2k+1) \rho_2^{2k+1}} + \right. \\
& \quad + (\chi - 1) \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \lambda^{2k+2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{r_{j,k}}{2j+1} \rho_2^{2j+1} \sin(2j+1)\alpha - \\
& \quad - \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \sin(2k+1)\alpha}{(2k+1) \rho_2^{2k+1}} - \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2k+2} \lambda^{2k+2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{r_{j,k}}{2j+1} \rho_2^{2j+1} \sin(2j+1)\alpha + \\
& \quad \left. + \sum_{k=0}^{\infty} (2k+2) \alpha_{2k+2} \lambda^{2k+2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2j+2k+2)}{2j+1} r_{j,k} \rho_2^{2j+1} \sin(2j+1)\alpha \right]. \quad (35)
\end{aligned}$$

Таким образом, получены основные разрешающие уравнения задачи, позволяющие определить искомые коэффициенты α_{2k} , β_{2k} , A_{2k} и величины сосредоточенных сил F_{mn} . Зная их, можно определить напряженно-деформированное состояние панели. Бесконечные алгебраические системы уравнений (13), (15), (19), (28) и система уравнений (35) оказались связанными между собой и должны решаться совместно.

Отметим предельные случаи:

- а) материал включения и панели одинаков, т. е. $\mu = \mu_b$, $\chi = \chi_b$. Из поставленного решения следует $\Phi_1(z) = 0$, $\Psi_1(z) = 0$;
- б) абсолютно жесткие включения, т. е. $\mu/\mu_b = 0$. После некоторых преобразований можно показать, что система (29) совпадает с (19);
- в) панель со свободными от усилия краями. В этом случае $\mu_b/\mu = 0$ и система (16) совпадает с (13).

Численные результаты и их анализ

Для определения искомых величин необходимо совместно решать линейные системы (29), (26), (28), (15), (35). Результирующая система будет замкнутой относительно входящих в нее неизвестных α_{2k} , β_{2k} , A_{2k} , F_{mn} .

Полученные системы решались численно. При этом бесконечные системы (26), (29) урезались до большого числа уравнений в зависимости от расстояния между отверстиями. Урезанные системы решались методом Гаусса с выбором главного элемента для разных значений порядка N в зависимости от радиуса отверстий.

После нахождения значений α_{2k} , β_{2k} , A_{2k} , F_{mn} на основании приведенных выше формул и соотношений Колосова – Мусхелишвили [9] определялось напряженное состояние панели.

Были рассмотрены наряду с упругим включением и предельные случаи: абсолютно жесткое включение, отверстия ничем не заполнены. Для любого упругого включения картина напряженного состояния будет занимать промежуточное положение между этими двумя предельными случаями.

Выводы

Предложена эффективная методика решения задачи теории упругости для перфорированных панелей, подкрепленных большим числом поперечных

ребер жесткости, когда круговые отверстия панели заполнены шайбами из другого упругого материала. Исследовано влияние взаимного расположения включений, ребер жесткости и точек крепления на напряженно-деформированное состояние составной панели.

Степень снижения концентрации напряжений на контуре отверстий тем больше, чем выше жесткость включения и подкрепляющего элемента, а также чем ближе расположение точек крепления между собой. Наличие гибкого включения повышает концентрацию напряжений, тогда как жесткие включения уменьшают его.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Партон В.З., Морозов Е.М.* Механика упругопластического разрушения. Москва : Наука, 1985. 504 с.
2. *Kravets V.S.* Effect of breaks in riveted stringers on the elastic and limiting equilibrium of a cracked plate // *Materials Science*. 1999. V. 35. I. 3. P. 339–348.
3. *Mir-Salim-zadeh M.V.* Fracture of an isotropic medium strengthened with a regular system of stringers // *Mechanics of Composite Materials*. 2007. V. 43. I. 1. P. 41–50.
4. *Мир-Салим-заде М.В.* Рост когезионной трещины в стрингерной пластине // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2013. № 4. С. 16–22.
5. *Мир-Салим-заде М.В.* Периодическая контактная задача для стрингерной пластины // *Тяжелое машиностроение*. 2015. № 6. С. 35–39.
6. *Mir-Salim-zadeh M.V.* Contact problem for a stringer plate weakened by a periodic system of variable width slots // *Structural Engineering and Mechanics*. 2017. V. 62. № 6. P. 719–724.
7. *Bedair O.* Analysis and limit state design of stiffened plated and shells: A world view // *Applied Mechanics Reviews*. ASME. 2009. V. 62. 12. 020501 (16 p.).
8. *Дударьков Ю.И., Лимонин М.В., Левченко Е.А.* Некоторые особенности оценки несущей способности стрингерных панелей из ПКМ // *Механика композиционных материалов и конструкций*. 2019. Т. 25/ № 2. С. 192–206.
9. *Мухелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. Москва : Наука, 1966. 707 с.

REFERENCES

1. *Parton V.Z., Morozov E.M.* Mekhanika uprugoplasticheskogo razrusheniya [Elastoplastic fracture mechanics]. Moscow: Nauka, 1985. 504 p. (rus)
2. *Kravets V.S.* Effect of breaks in riveted stringers on the elastic and limiting equilibrium of a cracked plate. *Materials Science*. 1999. V. 35. Pp. 339–348.
3. *Mir-Salim-zade M.V.* Fracture of an isotropic medium strengthened with a regular system of stringers. *Mechanics of Composite Materials*. 2007. V. 43. Pp. 41–50.
4. *Mir-Salim-zade M.V.* Rost kogeziionnoi treshchiny v stringernoi plastine [Cohesive crack growth in a stringer plate]. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2013. No. 4. Pp. 16–22. (rus)
5. *Mir-Salim-zade M.V.* Periodicheskaya kontaktnaya zadacha dlya stringernoi plastiny [Periodic contact problem for stringer plate]. *Tyazheloe mashinostroenie*. 2015. No. 6. Pp. 35–39. (rus)
6. *Mir-Salim-zade M.V.* Contact problem for a stringer plate weakened by a periodic system of variable width slots. *Structural Engineering and Mechanics*. 2017. V. 62. Pp. 719–724.
7. *Bedair O.* Analysis and limit state design of stiffened plated and shells: A world view. *Applied Mechanics Reviews*. ASME. 2009. V. 62. 12. P. 020501.
8. *Dudarkov Yu.I.1, Limonin M.V.1, Levchenko E.A.* Nekotorye osobennosti otsenki nesushchei sposobnosti stringernykh panelei iz PKM [Bearing capacity of carbon fiber reinforced polymer stringer plates]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktii*. 2019. V. 25. No. 2. Pp. 192–206. (rus)

9. *Muskhelishvili N.I.* Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoi teorii uprugosti [Basic problems of mathematical theory of elasticity]. Moscow: Nauka, 1966. 707 p. (rus)

Сведения об авторе

Яхьяев Джошгун Дунямин оглу, аспирант, Азербайджанский технический университет, AZ1073, г. Баку, пр. Г. Джавида, 25, neftoil.az@rambler.ru

Author Details

Joshgun D. Yakhyayev, Research Assistant, Azerbaijan Technical University, 25, H. Javid Ave., Baku, Azerbaijan, neftoil.az@rambler.ru