

УДК 539.375

DOI: 10.31675/1607-1859-2020-22-4-102-113

*Д.Д. ЯХЬЯЕВ,**Азербайджанский технический университет*

ИССЛЕДОВАНИЕ УПРУГОЙ КЛЕПАНОЙ ПЕРФОРИРОВАННОЙ ПАНЕЛИ С ТРЕЩИНАМИ

Получено решение задачи о взаимодействии двух факторов: усиления панели системой стрингеров и ее ослабления рядом круговых отверстий и двумя трещинами вдоль отрезков абсцисс, находящимися вблизи контура каждого отверстия. Контур отверстия и берега трещин свободны от внешних нагрузок. К панели прикреплены периодическая система поперечных ребер жесткости. Клепаная панель подвергается растяжению вдоль ребер жесткости постоянными напряжениями σ_0 . Действие приклепанных подкрепляющих ребер жесткости моделируется неизвестными сосредоточенными силами, приложенными в местах расположения точек крепления.

Предложена эффективная методика решения задачи о подкреплении поперечными ребрами жесткости пластин, ослабленных концентраторами напряжений (отверстия, трещины), при силовом нагружении. Найдены коэффициенты интенсивности напряжений и предельные нагрузки в зависимости от геометрических и физических параметров задачи.

Ключевые слова: упругая клепаная панель; трещины вблизи отверстий; сосредоточенные силы; одноосное растяжение; коэффициенты интенсивности напряжений; критические нагрузки.

Для цитирования: Яхьяев Д.Д. Исследование упругой клепаной перфорированной панели с трещинами // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. 2020. Т. 22. № 4. С. 102–113.
DOI: 10.31675/1607-1859-2020-22-4-102-113

*J.D. YAKHYAEV,**Azerbaijan Technical University*

ELASTIC RIVETED PERFORATED PLATE WITH CRACKS

The paper proposes the problem solution for interaction of two following factors: perforated plate reinforcement by a stringer system and its loosening by a number of circular holes and two cracks along the x-axis near each hole. The hole and crack edges are free from external loads. The riveted plate is subjected to tension by strengthening ribs via constant stresses. The action of riveted reinforcing strengthening ribs is modeled by unknown concentrated forces applied to anchor points.

An effective solution is proposed for the reinforcement by transverse strengthening ribs of plates weakened by stress concentrators (holes, cracks) under loading. The stress intensity and ultimate loads are found depending on geometrical and physical parameters of the problem.

Keywords: elastic riveted plate; cracks; concentrated forces; uniaxial tension; stress intensity; critical load.

For citation: Yakhyayev J.D. Issledovanie uprugoi klepannoi perforirovannoi paneli s treshchinami [Elastic riveted perforated plate with cracks]. Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta – Journal of Construction and Architecture. 2020. V. 22. No. 4. Pp. 102–113.
DOI: 10.31675/1607-1859-2020-22-4-102-113

Введение

В различных отраслях производства, в том числе в строительстве, транспортном машиностроении, для снижения материалоемкости конструкций, повышения их прочности и эксплуатационной надежности широко используют подкрепление панелей упругими элементами [1, 2]. Кроме того, прикрепление ребер жесткости также может проводиться после обнаружения эксплуатационных трещин в виде ремонтных заплат [2]. В последние годы получили применение новые принципы проектирования различных изделий для строительной отрасли, транспортного машиностроения, таких как перфорированные балки и тонкостенные профили листовых тонкостенных конструкций и др., допускающие возможность безопасного повреждения конструкций. Это позволяет повысить эксплуатационный ресурс конструкций [1–8].

Анализ хрупкого разрушения многих конструкций показывает, что разрушение, как правило, начинается с поверхности различных отверстий, выточек, щелей и других концентраторов. Наличие устойчивых трещин в конструкциях и сооружениях, работающих в определенных режимах изменения внешних нагрузок, гораздо менее опасно, а искусственное усиление таких конструкций (за счет постановки заклепок, ребер жесткости на пути роста трещины) может значительно продлить их срок службы.

В строительной отрасли, современном транспортном машиностроении широкое применение получили тонкостенные элементы конструкции (панели), усиленные ребрами жесткости и ослабленные отверстиями. Ребра жесткости применяют с целью снижения уровня концентрации напряжений и повышения жесткости панели. Характер взаимодействия ребер жесткости и дефектов существенным образом определяет напряженно-деформированное состояние конструкции (панели) в целом. Работоспособность тонкостенных элементов (пластин) во многих случаях предопределяется наличием в тонкостенном элементе дефектов типа трещин. Вблизи таких дефектов в процессе деформирования панели возникает высокая концентрация напряжений, что приводит к зарождению и развитию полос пластических деформаций, возникновению начальных и росту уже имеющихся в панели трещин. Представляет значительный интерес оценка эффективности применения подкрепляющих элементов для ограничения роста трещин в тонкостенных элементах строительных конструкций. Поэтому решение задач механики разрушения для пластинок с трещинами, усиленных подкрепляющими ребрами жесткости, представляет большой теоретический и практический интерес.

Постановка задачи

Рассматривается бесконечная изотропная упругая пластина толщиной h , ослабленная круговыми отверстиями радиуса λ . Центры отверстий находятся в точках $P_m = m\omega$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Вблизи каждого кругового отверстия панель ослаблена двумя равными прямолинейными трещинами вдоль отрезков оси абсцисс. Контур отверстия и берега трещин свободны от внешних усилий. По мере увеличения интенсивности растягивающей нагрузки в панели вокруг отверстий образуются зоны повышенных напряжений. Зоны повышен-

ных напряжений способствуют развитию образовавшихся возле отверстий трещин, что в свою очередь может привести к полному разрушению панели.

К пластине приклепана бесконечная периодическая система поперечных ребер жесткости в точках $z = mL + iny_0$ ($m = 2k - 1$; $k = 1, 2, \dots$; $n = \pm 1, \pm 2, \dots$).

Выбор системы координат и обозначения пояснены на рис. 1.

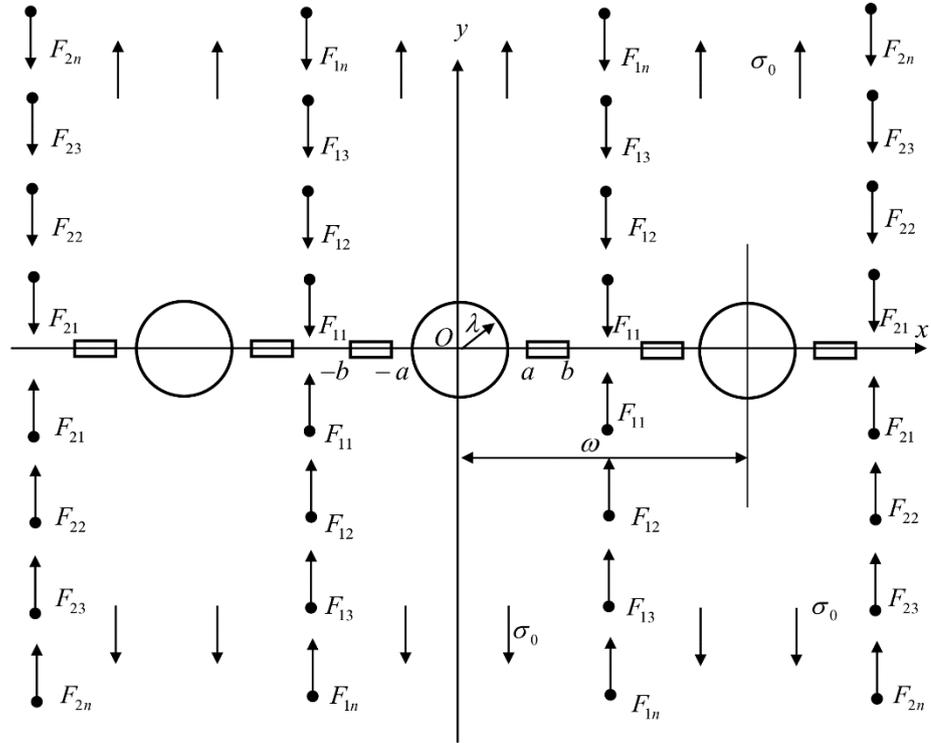


Рис. 1. Расчетная схема упругой клепаной перфорированной панели с трещинами

Клепаная пластина подвергается растяжению вдоль ребер жесткости напряжениями $\sigma_y^\infty = \sigma_0$. Действие приклепанных подкрепляющих ребер на схеме заменено сосредоточенными силами, приложенными в местах расположения заклепок (точек крепления) (рис. 1).

Рассматриваемая задача состоит в определении величин сосредоточенных сил F_{mn} ($m = 1, 2, \dots$; $n = 1, 2, \dots$), напряженно-деформированного состояния вне круговых отверстий и трещин, а также в нахождении величины предельной внешней нагрузки σ_0 , по достижении которой трещина начинает развиваться по сечению пластины.

Граничные условия в рассматриваемой задаче имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_r - i\tau_{r\theta} &= 0 \text{ — на контурах отверстий,} \\ \sigma_y - i\tau_{xy} &= 0 \text{ при } y = 0 \text{ — на берегах трещин.} \end{aligned} \quad (1)$$

Решение краевой задачи

На основании формул Колосова – Мусхелишвили [9] и граничных условий на контурах отверстий и берегах трещин задача сводится к определению двух аналитических функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ из краевых условий:

$$\Phi(\tau) + \overline{\Phi(\tau)} - [\overline{\tau}\Phi'(\tau) + \Psi(\tau)]e^{2i\theta} = 0; \quad (2)$$

$$\Phi(t) + \overline{\Phi(t)} + \bar{t}\Phi'(t) + \Psi(t) = 0, \quad (3)$$

где $\tau = \lambda e^{i\theta} + m\omega$; t – аффикс точек берегов трещин.

Решение краевой задачи (2) – (3) ищем в виде

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \Phi_1(z) + \Phi_2(z), \quad (4)$$

$$\Psi(z) = \Psi_0(z) + \Psi_1(z) + \Psi_2(z).$$

Здесь комплексные потенциалы $\Phi_0(z)$ и $\Psi_0(z)$ определяют поле напряжений и деформаций в сплошной пластине под действием периодической системы сосредоточенных сил F_{mn} и σ_0 и определяются формулами

$$\begin{aligned} \Phi_0(z) &= \frac{1}{4}\sigma_0 - \frac{1}{2\pi(1+\chi)h} \sum'_{m,n} F_{mn} \left[\frac{1}{z - mL + iny_0} - \frac{1}{z - mL - iny_0} \right], \\ \Psi_0(z) &= \frac{1}{2}\sigma_0 - \frac{i\chi}{2\pi(1+\chi)h} \sum'_{m,n} F_{mn} \left[\frac{1}{z - mL + iny_0} - \frac{1}{z - mL - iny_0} \right] + \\ &+ \frac{i}{2\pi(1+\chi)h} \sum'_{m,n} F_{mn} \left[\frac{Lm - iny_0}{(z - mL - iny_0)^2} - \frac{mL + iny_0}{(z - mL + iny_0)^2} \right]; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\omega} \int_L g(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega}(t - z) dt,$$

$$\Psi_1(z) = -\frac{\pi z}{2\omega^2} \int_L g(t) \sin^{-2} \frac{\pi}{\omega}(t - z) dt, \quad (6)$$

$$\Phi_2(z) = \alpha_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \rho^{(2k)}(z)}{(2k+1)!},$$

$$\Psi_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \rho^{(2k)}(z)}{(2k+1)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} S^{(2k+1)}(z)}{(2k+1)!}.$$

Интегралы в (5) – (6) берутся по линии $L = L_1 + L_2$; $L_1 = [-b, -a]$; $L_2 = [a, b]$;

$$g(x) = \frac{2\mu}{\chi + 1} \frac{d}{dx} [h(x)],$$

$$h(x) = v(x, +0) - v(x, -0) \text{ на } L.$$

На основании симметрии $h(-x) = h(x)$; $g(x)$ – искомая функция. К соотношениям (4) – (6) следует добавить дополнительное условие, вытекающее из физического смысла задачи:

$$\int_{-b}^{-a} g(x)dx = 0, \quad \int_a^b g(x)dx = 0. \quad (7)$$

Неизвестная функция $g(x)$ и потенциалы $\Phi_2(z)$ и $\Psi_2(z)$ должны быть определены из краевых условий (2) – (3). Для нахождения функций $\Phi_2(z)$ и $\Psi_2(z)$ преобразуем граничное условие (2) к виду

$$\begin{aligned} & \Phi_2(\tau) + \overline{\Phi_2(\tau)} - [\overline{\tau}\Phi_2'(\tau) + \Psi_2(\tau)]e^{2i\theta} = \\ & = -\Phi_*(\tau) - \overline{\Phi_*(\tau)} + [\overline{\tau}\Phi_*(\tau) + \Psi_*(\tau)]e^{2i\theta}, \\ & \Phi_*(z) = \Phi_0(z) + \Phi_1(z), \quad \Psi_*(z) = \Psi_0(z) + \Psi_1(z). \end{aligned} \quad (8)$$

Неизвестные коэффициенты α_{2k} , β_{2k} должны быть определены из краевого условия (8). В силу выполнения условия периодичности система граничных условий (8) заменяется одним функциональным уравнением на контуре $\tau = \lambda e^{i\theta}$. Для составления уравнений относительно α_{2k+2} , β_{2k+2} , функций $\Phi_2(z)$ и $\Psi_2(z)$ представим правую часть граничного условия в виде

$$f_1(\theta) + if_2(\theta) = -\Phi_*(\tau) - \overline{\Phi_*(\tau)} + [\overline{\tau}\Phi_*(\tau) + \Psi_*(\tau)]e^{2i\theta}.$$

Относительно функции $f_1(\theta) + if_2(\theta)$ будем считать, что она разлагается на контуре $|\tau| = \lambda$ в ряд Фурье. В силу симметрии этот ряд имеет вид

$$f_1(\theta) + if_2(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{2k} e^{2ik\theta}, \quad \text{Im } A_{2k} = 0, \quad (9)$$

$$A_{2k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [f_1 + if_2] e^{-2ik\theta} d\theta \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Подставив в (9) выражение после вычисления интегралов с помощью теории вычетов, найдем:

$$A_0 = -\frac{1}{2}\sigma_0 - \frac{1}{2\omega} \int_L g(t) f_0(t) dt,$$

$$f_0(t) = 2\gamma(t), \quad \gamma(t) = \text{ctg} \frac{\pi}{\omega} t,$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\sigma_0 - \frac{1}{\pi(1+\chi)h} \sum_{m,n} 'F_{mn} \left[\frac{\lambda^2 \sin 3\varphi_1}{\rho_1^3} + \frac{\chi \sin \varphi_1}{\rho_1} - \frac{\sin 3\varphi_1}{\rho_1} \right] - \frac{1}{2\omega} \int_L g(t) f_2(t) dt,$$

$$f_2(t) = -\frac{\lambda^2}{2} \gamma^{(2)}(t),$$

$$\begin{aligned} A_{2k} = & \frac{1}{\pi(1+\chi)h} \sum_{m,n} 'F_{mn} \left[\frac{\lambda^{2k} \sin(2k+1)\varphi_1}{\rho_1^{2k+1}} + \frac{(-2)(-3)\dots(-2k)\lambda^{2k} \sin(2k+1)\varphi_1}{(2k-1)!\rho_1^{2k+1}} - \right. \\ & \left. - \frac{\chi\lambda^{2k-2} \sin(2k-1)\varphi_1}{\rho_1^{2k-1}} + \frac{(-2)(-3)\dots(1-2k)\lambda^{2k-2} \sin(2k+1)\varphi_1}{(2k-2)!\rho_1^{2k+1}} \right] - \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2\omega} \int_L g(t) f_{2k}(t) dt. \quad (10)$$

$$f_{2k}(t) = -\frac{\lambda^{2k}(2k-1)}{(2k)!} \gamma^{(2k)}(t) + \frac{\lambda^{2k-2}}{(2k-3)!} \gamma^{(2k-2)}(t) \quad (k=2, 3, \dots),$$

$$A_{-2k} = \frac{1}{\pi(1+\chi)h} \sum_{m,n} F_{mn} \frac{\lambda^{2k} \sin(2k+1)\varphi_1}{\rho_1^{2k+1}} - \frac{1}{2\omega} \int_L g(t) f_{-2k}(t) dt,$$

$$f_{-2k}(t) = \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} \gamma^{(2k)}(t) \quad (k=1, 2, \dots).$$

Таким образом, граничное условие (8) принимает следующий вид:

$$\Phi_2(\tau) + \overline{\Phi_2(\tau)} - [\overline{\tau} \Phi_2'(\tau) + \Psi_2(\tau)] e^{2i\theta} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{2k} e^{2i\theta}.$$

Учитывая соотношение для $\Phi_2(z)$ и $\Psi_2(z)$ и применяя метод степенных рядов для определения коэффициентов α_{2k} , β_{2k} , получаем две бесконечные линейные алгебраические системы. Эти системы имеют вид

$$\alpha_{2j+2} = \sum_{k=0}^{\infty} A_{j,k} \alpha_{2k+2} + b_j \quad (j=0, 1, 2, \dots), \quad (11)$$

$$b_0 = A_2' - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+2} \cdot \lambda^{2k+4}}{2^{2k+4}} A_{-2k-2}' ,$$

$$b_j = A_{2j+2}' - \frac{(2j+1)A_0' g_{j+1} \lambda^{2j+2}}{k_1 2^{2j+2}} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2j+2k+3)! g_{j+k+2} \lambda^{2k+2j+4}}{(2j)!(2k+3)! 2^{2j+2k+4}} A_{-2k-2}' ,$$

$$A_{2k}' = A_{2k} + B_{2k}, \quad k_1 = 1 - \frac{\pi^2}{12} \lambda^2,$$

$$g_j = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2j}}, \quad A_{j,k} = (2j+1) \gamma_{j,k} \lambda^{2k+2j+2},$$

$$\gamma_{0,0} = \frac{3}{8} g_2 \lambda^2 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(2i+1) g_{i+1}^2 \lambda^{4i+2}}{2^{4i+4}},$$

$$\gamma_{j,k} = -\frac{(2j+2k+2)! g_{j+k+1}}{(2j+1)!(2k+1)! 2^{2j+2k+2}} + \frac{(2j+2k+4)! g_{j+k+2} \lambda^2}{(2j+2)!(2k+2)! 2^{2j+2k+4}} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2j+2i+1)!(2k+2i+1)! g_{j+i+1} g_{k+i+1} \lambda^{4i+2}}{(2i+1)!(2j+1)!(2k+1)!(2i)! 2^{2j+2k+4i+4}} + b_{j,k},$$

$$b_{0,k} = 0, \quad b_{j,0} = 0,$$

$$b_{j,k} = \frac{g_{j+1} g_{k+1} \lambda^2}{2^{2j+2k+4}} \left(1 + \frac{2k_2 \lambda^2}{k_1} \right),$$

$$k_2 = \frac{\pi^2}{24}, \quad (j = 1, 2, \dots), \quad (k = 1, 2, \dots);$$

$$\beta_2 = \frac{1}{k_1} \left[-A'_0 + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+1} \cdot \lambda^{2k+2}}{2^{2k+2}} \alpha_{2k+2} \right], \quad (12)$$

$$\beta_{2j+4} = (2j+3)\alpha_{2j+2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2j+2k+3)! g_{j+k+2} \lambda^{2j+2k+2}}{(2j+2)!(2k+1)! 2^{2j+2k+4}} \alpha_{2k+2} - A'_{-2j-2}.$$

Требую, чтобы функции удовлетворяли краевому условию (3), получим сингулярное интегральное уравнение относительно $g(x)$

$$\frac{1}{\omega} \int_L g(t) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega} (t-x) dt + H(x) = 0. \quad (13)$$

Здесь $H(x)$ определяются соотношениями

$$H(x) = \Phi_s(x) + \overline{\Phi_s(x)} + x\Phi'_s(x) + \Psi_s(x),$$

$$\Phi_s(x) = \Phi_0(x) + \Phi_2(x), \quad \Psi_s(x) = \Psi_0(x) + \Psi_2(x).$$

Бесконечные системы и сингулярное интегральное уравнение содержат неизвестные величины F_{mn} ($m = 1, 2, \dots; n = 1, 2, \dots$).

Займемся определением этих величин. Для определения величины силы F_{mn} используем закон Гука. Для этого необходимо найти взаимное смещение точек $z = mL + i(ny_0 - a_0)$ и $z = mL - i(ny_0 - a_0)$ в рассматриваемой задаче. Используя соотношения [9], (4), (5), (6), после выполнения элементарных, хотя и несколько громоздких выкладок, найдем взаимное смещение $\Delta v_{m,n}$ указанных точек.

Следовательно, искомые величины сосредоточенных сил определяются из решения бесконечной линейной системы уравнений относительно F_{pr} ($p = 1, 2, \dots; r = 1, 2, \dots$):

$$F_{pr} = \frac{E_s A}{2ry_0} \Delta v_{pr} \quad (p = 1, 2, \dots; r = 1, 2, \dots). \quad (14)$$

В развернутом виде система (12) имеет вид

$$F_{pr} = \frac{E_s A}{4\pi(1+\chi)\mu h r y_0} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{mn} \left[\chi \ln \frac{(p-m)^2 L^2 + a_0^2}{(p-m)^2 L^2 + [(r-n)y_0 - a_0]^2} + \right. \\ \left. + \chi \ln \frac{(p+m)^2 L^2 + a_0^2}{(p+m)^2 L^2 + [(r-n)y_0 - a_0]^2} + \right. \\ \left. + \frac{2(r-n)y_0 [(r-n)y_0 - a_0] \left\langle 2p(p-m)L^2 + a_0 [(r-n)y_0 - a_0] \right\rangle}{\left\langle (p-m)^2 L^2 + [(r-n)y_0 - a_0]^2 \right\rangle \left[(p-m)^2 L^2 + a_0^2 \right]} \right]$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2(r-n)y_0[(r-n)y_0 - a_0] \left\langle 2p(p+m)L^2 + a_0[(r-n)y_0 - a_0] \right\rangle}{\left\langle (p+m)^2 L^2 + [(r-n)y_0 - a_0]^2 \right\rangle \left[(p+m)^2 L^2 + a_0^2 \right]} + \\
 & + \frac{2(r+n)y_0[(r+n)y_0 - a_0] \left\langle 2p(p-m)L^2 + a_0[(r+n)y_0 - a_0] \right\rangle}{\left\langle (p-m)^2 L^2 + [(r+n)y_0 - a_0]^2 \right\rangle \left[(p-m)^2 L^2 + a_0^2 \right]} + \\
 & + \chi \ln \frac{(p-m)^2 L^2 + a_0^2}{(p-m)^2 L^2 + [(r+n)y_0 - a_0]^2} + \\
 & + \chi \ln \frac{(p+m)^2 L^2 + a_0^2}{(p+m)^2 L^2 + [(r+n)y_0 - a_0]^2} + \\
 & + \frac{2(r+n)y_0[(r+n)y_0 - a_0] \left\langle 2p(p+m)L^2 + a_0[(r+n)y_0 - a_0] \right\rangle}{\left\langle (p+m)^2 L^2 + [(r+n)y_0 - a_0]^2 \right\rangle \left[(p+m)^2 L^2 + a_0^2 \right]} + \\
 & + \frac{E_s A \sigma_0 (\chi + 1)}{2y_0 r 4\mu} \left[\alpha_0 (ry_0 - a_0) (\chi - 1) + (\chi + 1) \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \sin(2k+1)\alpha}{(2k+1)\rho_2^{2k+1}} + \right. \\
 & \quad \left. + (\chi - 1) \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \lambda^{2k+2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{r_{j,k}}{2j+1} \rho_2^{2j+1} \sin(2j+1)\alpha - \right. \\
 & \quad \left. - \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \sin(2k+1)\alpha}{(2k+1)\rho_2^{2k+1}} - \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2k+2} \lambda^{2k+2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{r_{j,k}}{2j+1} \rho_2^{2j+1} \sin(2j+1)\alpha + \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{k=0}^{\infty} (2k+2) \alpha_{2k+2} \lambda^{2k+2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2j+2k+2)}{2j+1} r_{j,k} \rho_2^{2j+1} \sin(2j+1)\alpha + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{E_s A (\chi + 1)}{2y_0 r \mu} \frac{1}{2\omega} \int_L g(t) \left\langle \operatorname{arctg} \left[\operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega} (t - pL) \operatorname{th} \frac{\pi}{\omega} (cy_0 - a_0) \right] - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \operatorname{arctg} \left[\operatorname{tg} \frac{\pi pL}{\omega} \operatorname{th} \frac{\pi}{\omega} (cy_0 - a_0) \right] \right\rangle dt - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{E_s A (cy_0 - a_0)}{2y_0 r \mu} \frac{1}{2\omega} \int_L g(t) \left[\frac{\sin^2 \alpha_1 (\operatorname{ch}^2 \alpha_1 + \operatorname{sh}^2 \alpha_1)}{\sin^2 \alpha_1 \operatorname{ch}^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_1 \operatorname{sh}^2 \alpha_1} \right] dt . \right.
 \end{aligned}$$

Итак, полученная система (14), системы (11), (12) и сингулярное интегральное уравнение (13) связаны, и их необходимо решать совместно. Решая их, найдем искомую функцию $g(x)$, коэффициенты α_{2k} , β_{2k} и значения сосредоточенных сил F_{mn} ($m = 1, 2, \dots; n = 1, 2, \dots$).

Учитывая, что $g(x) = -g(-x)$, а также воспользовавшись разложением функции $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{\omega} z$, уравнение (13) можно привести к следующему виду:

$$\frac{2}{\pi} \int_a^b \frac{tg(t)}{t^2 - x^2} dt + \frac{1}{\pi} \int_a^b K_*(t, x)g(t)dt + H(x) = 0, \quad (15)$$

$$K_*(t, x) = K(t, x) - K(-t, x),$$

$$K(t) = - \sum_{j=0}^{\infty} g_{j+1} \frac{t^{2j+1}}{\omega^{2j+1}}.$$

Сделаем замену переменных

$$t^2 = u = \frac{b^2 - a^2}{2}(\tau + 1) + a^2, \quad x^2 = u_0 = \frac{b^2 - a^2}{2}(\eta + 1) + a^2.$$

При этом отрезок интегрирования $[a, b]$ переходит в отрезок $[-1, 1]$, а преобразованное сингулярное уравнение принимает стандартную форму:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{p(\tau)d\tau}{\tau - \eta} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 p(\tau)B(\eta, \tau)d\tau + H(\eta) = 0. \quad (16)$$

Решение сингулярного уравнения (16) представим в виде

$$p(\eta) = \frac{p_0(\eta)}{\sqrt{1 - \eta^2}}.$$

Использование квадратурных формул [10] позволяет свести основные уравнения (сингулярное уравнение (16), алгебраические системы) к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно приближенных значений $p_k^0 = p_0(\eta_k)$ искомой функции в узловых точках, коэффициентов α_{2k} , β_{2k} , а также величин F_{mn} . При этом целесообразно из выражения для $H(\eta)$ и системы исключить постоянные β_{2k} .

К полученной системе необходимо присоединить дополнительное условие (7), которое в дискретной форме имеет вид

$$\sum_{v=1}^M \frac{p_v^0}{\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{2}(\tau_v + 1) + a^2}} = 0. \quad (17)$$

В механике хрупкого разрушения особый интерес представляет коэффициент интенсивности напряжений в окрестности концов трещины. Для коэффициента интенсивности напряжений у вершины трещины будем иметь формулу

$$K_I = - \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\sqrt{2\pi|x - \ell|} g(x) \right]. \quad (18)$$

Поскольку обе трещины находятся в одинаковых условиях, будем проводить дальнейшее исследование только для правой трещины, а все величины, относящиеся к левому и правому концам, обозначим индексами a и b соответственно. После нахождения функции $g(x)$ (значений p_k^0) можно определить коэффициент интенсивности напряжений в окрестности концов трещин следующими формулами:

$$K_I^a = \sqrt{\pi a} \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{a^2}} \frac{1}{2M} \sum_{k=1}^M (-1)^k p_k^0 \operatorname{tg} \frac{\theta_k}{2}, \quad (19)$$

$$K_I^b = \sqrt{\pi b} \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{b^2}} \frac{1}{2M} \sum_{k=1}^M (-1)^k p_k^0 \operatorname{ctg} \frac{\theta_k}{2}, \quad (20)$$

$$\theta_k = \frac{2k-1}{2M} \pi \quad (k = 1, 2, \dots, M).$$

Соотношения (19) и (20) получены с учетом использованных формул, замены переменных, формулы (18) и интерполяционного многочлена Лагранжа для функции $p_0(\eta)$.

Полученные системы должны решаться совместно. После решения этих систем по формулам (19), (20) вычисляются коэффициенты интенсивности напряжений в зависимости от длины трещины, а также от упругих и геометрических параметров подкрепленной панели. Затем, используя критерий хрупкого разрушения Гриффитса – Ирвина $K_I = K_c$ (K_c – постоянная, характеризующая сопротивление материала распределению в нем трещин), найдем зависимость предельной нагрузки σ_0^a , σ_0^b от длины трещины, а также от упругих и геометрических характеристик рассматриваемой пластины.

Анализ решения

Для численной реализации изложенного способа были проведены расчеты методом Гаусса с выбором главного элемента. Полагалось $M = 30$, $M = 40$, что отвечает разбиению интервала $[-1, 1]$ на 30, 40 чебышевских узлов соответственно.

Оказалось, что решение линейных систем совпадает с точностью до четвертого знака.

Были проведены расчеты по определению коэффициентов интенсивности напряжений. Для коэффициентов интенсивности напряжений имеем:

$$K_I^a = \sigma_0 \sqrt{\pi a} \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 1} \cdot F_2(\lambda, a, b, \varepsilon), \quad (21)$$

$$K_I^b = \sigma_0 \sqrt{\pi b} \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 1} \cdot F_1(\lambda, a, b, \varepsilon).$$

Расчеты для функций $F_1(\lambda, a, b, \varepsilon)$ и $F_2(\lambda, a, b, \varepsilon)$ проводились при изменении расстояния a для следующих значений свободных параметров $a_0/L = 0,01$, $\nu = 0,3$, $\varepsilon = y_0/L = 0,15; 0,25; 0,5$, $N = 5$.

В расчетах длина трещин принималась постоянной $b - a = 0,3$.

Ребра жесткости считались выполненными из композита Al-сталь, ($V_f - 40\%$), а пластина из сплава В95: $E = 7,1 \cdot 10^4$ МПа, $E_s = 11,5 \cdot 10^4$ МПа.

На основании результатов расчета можно сделать некоторые выводы. Как известно, трещина устойчива, если напряжение σ_0 , необходимое для ее поддержания в подвижно-равновесном состоянии, возрастает с увеличением длины трещины. Условие устойчивого роста трещины имеет вид

$$\frac{\partial K_I}{\partial l} < 0.$$

Исследование показало, что рост трещины нормального разрыва вначале происходит неустойчиво (величина K_I возрастает), а затем, когда трещина приближается к стрингеру (зоне сжимающих напряжений), становится устойчивым.

При большом удалении вершины трещины от элемента жесткости уменьшение интенсивности напряжений при вершине трещины невелико, поэтому эффективность ребра жесткости, как элемента конструкции, воспринимающего часть нагрузки, действующей на пластину, уменьшается. При приближении вершины трещины к ребру жесткости это уменьшение становится все более весомым.

Степень уменьшения тем больше, чем выше жесткость подкрепляющего элемента и чем ближе расположены точки соединения между собой. Основываясь на полученных результатах, можно считать, что приклепанные подкрепляющие стрингеры могут служить весьма эффективным средством, задерживающим рост трещины и позволяющим значительно продлить срок эксплуатации тонкостенной конструкции (панели).

Выводы

Развита эффективная методика решения плоской задачи механики разрушения для клепаной перфорированной панели, ослабленной двумя трещинами, находящимися вблизи контура каждого кругового отверстия. Для подкрепленной перфорированной панели, ослабленной двумя прямолинейными трещинами вблизи каждого отверстия, найдена зависимость длины трещины от приложенной растягивающей нагрузки, числа и взаимного расположения ребер жесткости, отверстий, точек крепления и других физических и геометрических параметров клепаной панели. Изучено влияние взаимного расположения системы трещин отверстий, ребер жесткости и точек крепления на критерий роста трещин. В зависимости от геометрических и физических параметров перфорированной клепаной панели при взаимодействии системы трещин, отверстий и ребер жесткости наблюдается устойчивое развитие трещин.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Партон В.З., Морозов Е.М.* Механика упругопластического разрушения. Москва : Наука, 1985. 504 с.
2. *Dowrick G., Cartwright D.J., Rooke D.P.* The effects of repair patches on the stress distribution in a cracked sheet // Numerical Methods in Fracture Mechanics: Proceedings of the 2nd Int. Conf., Swansea. 1980. P. 763–775.
3. *Kravets V.S.* Effect of breaks in riveted stringers on the elastic and limiting equilibrium of a cracked plate // Materials Science. 1999. V. 35. I. 3. P. 339–348.
4. *Mir-Salim-zadeh M.V.* Fracture of an isotropic medium strengthened with a regular system of stringers // Mechanics of Composite Materials. 2007. V. 43. I. 1. P. 41–50.
5. *Мир-Салим-заде М.В.* Рост когезионной трещины в стрингерной пластине // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2013. № 4. С. 16–22.
6. *Мир-Салим-заде М.В.* Периодическая контактная задача для стрингерной пластины // Тяжелое машиностроение. 2015. № 6. С. 35–39.
7. *Mir-Salim-zadeh M.V.* Contact problem for a stringer plate weakened by a periodic system of variable width slots // Structural Engineering and Mechanics. 2017. V. 62. № 6. P. 719–724.

8. *Bedair O.* Analysis and limit state design of stiffened plated and shells: A world view // *Applied Mechanics Reviews*. ASME. 2009. V. 62. 12, 020501 (16 p.).
9. *Дударьков Ю.И., Лимонин М.В., Левченко Е.А.* Некоторые особенности оценки несущей способности стрингерных панелей из ПКМ // *Механика композиционных материалов и конструкций*. 2019. Т. 25. № 2. С. 192–206.
10. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. Москва : Наука, 1966. 707 с.

REFERENCES

1. *Parton V.Z., Morozov E.M.* Механика упругопластического разрушения [Elastoplastic fracture mechanics]. Moscow: Nauka, 1985. 504 p. (rus)
2. *Dowrick G., Cartwright D.J., Rooke D.P.* The effects of repair patches on the stress distribution in a cracked sheet. *Proc. 2nd Int. Conf. "Numerical Methods in Fracture Mechanics"*. Swansea, 1980. Pp. 763–775.
3. *Kravets V.S.* Effect of breaks in riveted stringers on the elastic and limiting equilibrium of a cracked plate. *Materials Science*. 1999. V. 35. Pp. 339–348.
4. *Mir-Salim-zade M.V.* Fracture of an isotropic medium strengthened with a regular system of stringers. *Mechanics of Composite Materials*. 2007. V. 43. Pp. 41–50.
5. *Mir-Salim-zade M.V.* Rost kogeziionnoi treshchiny v stringernoi plastine [Cohesive crack growth in a stringer plate]. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2013. No. 4. Pp. 16–22. (rus)
6. *Mir-Salim-zade M.V.* Periodicheskaya kontaktная задача dlya stringernoi plastiny [Periodic contact problem for stringer plate]. *Tyazheloe mashinostroenie*. 2015. No. 6. Pp. 35–39. (rus)
7. *Mir-Salim-zade M.V.* Contact problem for a stringer plate weakened by a periodic system of variable width slots. *Structural Engineering and Mechanics*. 2017. V. 62. Pp. 719–724.
8. *Bedair O.* Analysis and limit state design of stiffened plated and shells: A world view. *Applied Mechanics Reviews*. ASME. 2009. V. 62. 12, P. 020501.
9. *Dudarkov Yu.I.I., Limonin M.V.I., Levchenko E.A.* Nekotorye osobennosti otsenki nesushchei sposobnosti stringernykh panelei iz PKM [Bearing capacity of carbon fiber reinforced polymer stringer plates]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii*. 2019. V. 25. No. 2. Pp. 192–206. (rus)
10. *Muskhelishvili N.I.* Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoi teorii uprugosti [Basic problems of mathematical theory of elasticity]. Moscow: Nauka, 1966. 707 p. (rus)

Сведения об авторе

Яхьяев Джошгун Дунямин оглу, аспирант, Азербайджанский технический университет, AZ1073, Азербайджан, г. Баку, пр. Г. Джавида, 25, neftoil.az@rambler.ru

Author Details

Joshgun D. Yakhyaev, Research Assistant, Azerbaijan Technical University, 25, H. Javid Ave., Baku, Azerbaijan, neftoil.az@rambler.ru