

# СТРОИТЕЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ, ЗДАНИЯ И СООРУЖЕНИЯ

УДК 624.04

DOI: 10.31675/1607-1859-2020-22-4-83-101

*А.В. ПЕРЕЛЬМУТЕР,  
НПО SCAD Soft*

## ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

Приведен краткий обзор основных идей обширного класса обратных задач строительной механики, относящихся к проблемам идентификации расчетных моделей, мониторинга технического состояния и поиску повреждений. Указывается на некорректность обратных задач, численная реализация которых в связи с этим требует регуляризации. Приведены ссылки на работы, где указываются случаи практического применения решений задач такого рода.

**Ключевые слова:** расчетная схема; частоты и формы собственных колебаний; идентификация; мониторинг.

**Для цитирования:** Перельмутер А.В. Обратные задачи строительной механики // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. 2020. Т. 22. № 4. С. 83–101.

DOI: 10.31675/1607-1859-2020-22-4-83-101

*A.V. PERELMUTER,  
SCAD Soft, Ltd.*

## INVERSE PROBLEMS OF STRUCTURAL MECHANICS

The paper presents a brief review of the main ideas on the extensive class of inverse problems in structural mechanics relating to the identification of design models, technical condition monitoring and finding damages. The numerical implementation of identified incorrectness of inverse problems requires regularization. References include works describing the cases of practical application of reverse problem solutions.

**Keywords:** calculation model; frequency; eigenfrequency; oscillations; identification; monitoring.

**For citation:** Perelmuter A.V. Obratnye zadachi stroitel'noi mekhaniki [Inverse problems of structural mechanics]. Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta – Journal of Construction and Architecture. 2020. V. 22. No. 4. Pp. 83–101.

DOI: 10.31675/1607-1859-2020-22-4-83-101

### Введение

Основным инструментом исследований в строительной механике является работа с расчетной схемой сооружения, иными словами – с его математической моделью.

Традиционно выделяют два основных класса задач, связанных с математическими моделями: прямые и обратные. Определяющими критериями здесь является соотношение «причина-следствие», а также наблюдаемость или ненаблюдаемость искомых параметров в физическом эксперименте (разрешимость или неразрешимость в численном эксперименте). Тогда под прямой задачей понимают прогнозирование последствий каких-либо действий, а под обратной задачей понимают задачу выяснения причин появления этих последствий. Полезно отметить, что термины «причины» и «следствия» следует понимать в общих чертах, они уточняются в каждом конкретном случае<sup>1</sup>.

На рис. 1, а показано определение прямых задач: выходной сигнал может быть рассчитан, когда входной сигнал известен и система полностью определена. С другой стороны, существуют разные обратные задачи, которые могут быть определены таким же синтетическим способом. На рис. 1, б и в представлены два разных вида таких задач: первый – это так называемое восстановление входа, т. е. известен один выход, и система находит соответствующий вход; второй представляет собой оценку параметров системы, т. е. известны один или несколько входных данных, и соответствующий один или несколько выходных данных находят подходящую оценку неизвестных параметров.

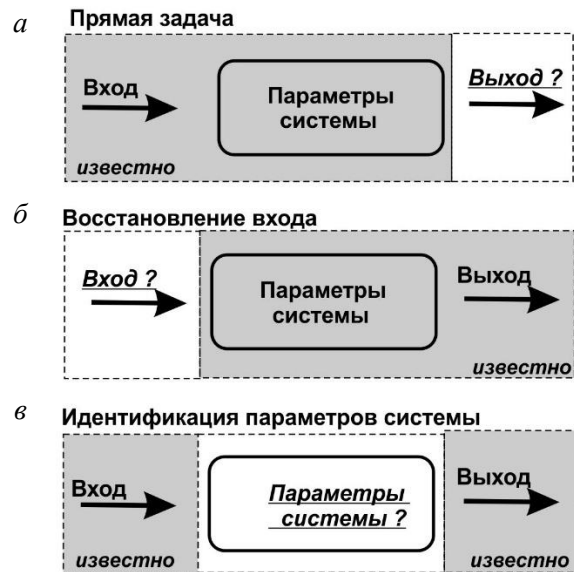


Рис. 1. Схематическое представление задач

<sup>1</sup> Уинстон Черчилль говорил: «Политик должен уметь предсказать, что произойдет завтра, через неделю, через месяц и через год. А потом объяснить, почему это не произошло» – типичное описание прямой и обратной задачи.

Обратная задача часто не имеет единственного решения, и ее условия может удовлетворять целое множество значений разыскиваемых параметров. Чтобы выбрать определенное решение из множества возможных, используется некоторая дополнительная информация. Дополнительная информация может состоять в дополнительных данных о компонентах решения, найденных экспериментально (задачи идентификации), или о некоторых желательных свойствах конструкции (задачи проектирования).

В случаях задачи проектирования условия обратной задачи часто определяются требованием выбора наилучшего в некотором смысле варианта решения, и возникает задача оптимального проектирования. Обычно отыскивается решение, оптимальное с точки зрения расхода материала или с другим экономическим показателем. Но в обратной задаче не обязательно исходят из условия оптимальности, здесь для поиска искомым параметров часто используют условия принадлежности к некоторому классу систем с определенными желательными свойствами (равнопрочность, постоянство распределения по системе упругой удельной деформации, требование о принадлежности частот собственных колебаний некоторому желательному диапазону или др.), в том числе свойствами, присущими оптимальному решению [1].

Задачам оптимального проектирования посвящено огромное количество работ, в том числе и опубликованных на страницах настоящего сборника. Они заслуживают отдельного рассмотрения и не будут здесь рассматриваться, а основное внимание мы уделим задачам идентификации, которые связаны с проблемами мониторинга и диагностики механического состояния конструкций.

Впервые проблема идентификации возникла в теории автоматического управления (см., например, [2]), когда по отдельным измерениям объекта определялись его свойства, необходимые для достижения некоторого заданного качества управления.

В строительной механике первые работы, посвященные проблеме идентификации, появились в конце шестидесятых годов XX столетия и относились они к объектам аэрокосмической техники [3, 4]. Предметом исследования в этих работах были колебания линейных динамических систем с демпфированием. После этого идентификация системы была применена к различным инженерным задачам строительной механики.

### **Идентификация и обновление расчетной схемы**

При построении конечно-элементных моделей обычно делают упрощающие предположения. Граничные условия и условия соединения между конструктивными компонентами (болтовые соединения, сварные швы, посадка пресса и т. д.) редко моделируются точно. Возникает необходимость в проверке расчетной модели, и в особо ответственных случаях выполняется экспериментальная проверка расчета и обновление модели. Целью такого обновления является изменение ее параметров, чтобы получить лучшее согласие между числовыми результатами и данными испытаний.

#### *Прямые методы*

Одним из простейших и наиболее распространенных является подход, основанный на предположении о том, что одна из трех основных матриц ко-

нечно-элементной модели сооружения (матрицы масс, жесткости, демпфирования) является известной.

Одной из первых решалась параметрическая задача, в которой предполагалось, что матрица масс известна точно, а уточняются только матрицы жесткости и демпфирования [5]. Разница между исходной и обновленной матрицами демпфирования и жесткости минимизировалась с учетом ограничений, которые в стиле метода штрафных функций следили за тем, чтобы выполнялись уравнения динамического равновесия и чтобы матрицы демпфирования и жесткости были симметричными (и конечно, действительными). Тогда функция, которая должна быть минимизирована, определяется как

$$J = \frac{1}{2} \|N^{-1}(K - K_0)N^{-1}\|^2 + \frac{1}{2} \mu \|N^{-1}(C - C_0)N^{-1}\|^2 \quad (1)$$

при условии

$$\begin{aligned} M_0 \Phi \Lambda^2 + C \Phi \Lambda + K \Phi &= 0, \\ C &= C^T, \quad K = K^T, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $N = M_0^{1/2}$ ,  $M_0$ ,  $C_0$  и  $K_0$  – исходные матрицы массы, демпфирования и жесткости аналитической модели;  $C$  и  $K$  – обновленные матрицы демпфирования и жесткости;  $\Phi$  и  $\Lambda$  – измеренные матрицы собственных векторов и собственных значений. Матрица  $N$  выполняет роль весовой функции, с помощью которой сопоставляются различные компоненты матриц невязки  $(K - K_0)$  и  $(C - C_0)$ . Возможно использование и других весовых матриц, в том числе и различных для матриц демпфирования и жесткости. Если существует полный набор форм колебаний, то  $\Phi$  не является квадратной и модель должна быть уменьшена. Роль параметра  $\mu$  в формуле (1) состоит в том, чтобы уравновесить ошибки матриц демпфирования и жесткости.

Важной особенностью задач идентификации была ориентация на данные измерений как на эталонную основу решения [6]. Был предложен метод последовательного решения, когда на первом этапе минимизировали целевую функцию

$$J_M = \|M_A^{-1/2}(M - M_A)M_A^{-1/2}\| + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \mu_{ij} (\Phi^T M \Phi - I)_{ij}, \quad (3)$$

где  $\mu_{ij}$  – множитель Лагранжа, используемый для обеспечения условий ортогональности векторов относительно обновленных масс. Процедура минимизации приводит к выражению для обновленной массы

$$M = M_A + M_A \Phi m_A^{-1} (I - m_A) m_A^{-1} \Phi^T M_A, \quad (4)$$

где

$$m_A = \Phi^T M_A \Phi, \quad (5)$$

а  $\Phi$  – неполная модальная  $p \times m$  матрица ( $m < p$ ),  $p$  – порядок аналитической и обновленной моделей.

После вычисления  $M$  из уравнения (4) можно определить обновленный массив жесткости путем минимизации дополнительной целевой функции

$$J_K = \left\| M_A^{-1/2} (K - K_A) M_A^{-1/2} \right\| + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \mu_{Kij} (K\Phi - M\Phi\Lambda)_{ij} + \\ + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \mu_{Qij} (\Phi^T K\Phi - M\Phi\Lambda)_{ij} + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^i \mu_{Sij} (K - K^T)_{ij}, \quad (6)$$

где  $\Lambda$  представляет спектральную матрицу. Здесь множители Лагранжа используются для обеспечения соблюдения уравнений движения, ортогональности и симметрии жесткости. Уравнения обновления матрицы жесткости можно записать в виде

$$K = K_A + (\Delta + \Delta^T), \quad (7)$$

где 
$$\Delta = \frac{1}{2} M\Phi (\Phi^T K_A \Phi + \Lambda) \Phi^T M - K_A \Phi \Phi^T M. \quad (8)$$

Следует отметить, что хотя  $M^{-1/2}$  присутствует в целевых функциях (3) и (6), его вычисление не требуется, поскольку оно отсутствует в уравнениях обновления (4) и (7).

В процедуре обновления могут использоваться как собственные частоты, так и собственные формы. До недавнего времени собственные формы обычно не использовались, поскольку они часто содержат ошибки измерений, достигающие 20 %. Напротив, собственные частоты могут быть измерены с гораздо большей точностью, чем 1 %, и могут использоваться с уверенностью.

Положение резко изменилось после того, как был предложен построенный на основе принципа восстановления когерентных составляющих волновых полей метод стоячих волн, разработанный коллективом Сибирского отделения РАН под руководством д.т.н. А.Ф. Еманова. Выделение из беспорядочных движений системы, которая подвержена действию микросейсмических стоячих волн (форм собственных колебаний), позволяет найти их в необходимом количестве и с достаточной точностью [7], что с успехом было проверено на практике [8, 9].

#### Методы обновления на основе чувствительности

При использовании прямых методов матрицы метода конечных элементов (массы, жесткости, демпфирования) модифицируются или обновляются полностью. Но представляют интерес и локальные методы обновления, основанные на поправках, применяемых к локальным физическим параметрам моделей, имеющие физическое значение. Эффективные и наиболее популярные локальные методы обновления моделей обычно основаны на анализе чувствительности. При формулировании модификации параметров в моделях МКЭ «истинные» (или экспериментальные) отклики, такие как частоты или формы собственных колебаний, выражаются как функции аналитических откликов  $r$  и структурных параметров  $p$  с помощью матрицы коэффициентов чувствительности  $S$ .

Если отличия расчетных и экспериментальных значений не слишком велики, то можно использовать линейное приближение

$$r_a = r_e + S(p_u - p_e) \quad (9)$$

$$\text{или} \quad \Delta r = S \Delta p, \quad (10)$$

где  $\Delta r = r_a - r_e$ ,  $r_a$  и  $r_e$  – соответственно векторы экспериментальных и аналитических значений отклика системы;  $\Delta p = p_a - p_e$ ,  $p_a$  и  $p_e$  – соответственно векторы обновленных и текущих значений корректируемых параметров системы.

Для всех выбранных ответов и параметров элементы матрицы чувствительности  $S$  могут быть рассчитаны следующим образом:

$$s_{ij} = \partial r_i / \partial p_j, \quad (11)$$

где  $r_i$  и  $p_j$  представляют структурный ответ и параметр соответственно, а индексы принимают значения  $i = 1 \dots n$  для  $n$  ответов и  $j = 1 \dots m$  для  $m$  параметров.

Матрица чувствительности может быть вычислена для всех физических свойств элемента (материала, геометрического, граничного и т. д.) аналитически или путем анализа численных возмущений.

Уравнение (10) может быть определено, переопределено или недоопределено в зависимости от того, число ответов  $n$  равно, больше или меньше количества параметров  $m$ . В любом случае параметр модификации  $\Delta p$  в уравнении (10) может быть найден с помощью техники псевдообращения

$$\Delta p = S^+ \Delta r, \quad (12)$$

где  $S^+$  является псевдообратной матрицей Мура – Пенроуза, которая определяется как [10]

$$S^+ = \begin{cases} S^{-1} & \text{если } N = M, \\ (S^T S)^{-1} S^T & \text{если } N > M, \\ S^T (S S^T)^{-1} & \text{если } N < M. \end{cases} \quad (13)$$

Поскольку в представлении (9) мы пренебрегли членами более высокого порядка, чем линейный, возможно, потребуется несколько итераций, особенно когда  $\Delta r$  содержит большие значения. Следует отметить, что при наличии слишком больших расхождений между экспериментальной и аналитической моделями итерационный процесс может расходиться.

Если предполагается, что неточность МКЭ-модели связана с моделированием в ограниченных областях конструкции, таких, например, как стыковые соединения в узлах системы, то целесообразно использование специальных расчетных моделей (в работах [11, 12] они названы адаптивными). Для количественного представления указанных зон в модель можно включить некоторые специальные детали типа «слабых» элементов, параметры которых будут обновляться. На рис. 2 показана такая модель зоны сопряжения элементов.

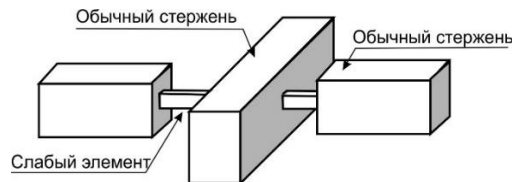


Рис. 2. Прием моделирования

Распространенной проблемой при настройке модели МКЭ является определение граничных условий. Удачным приемом здесь является использование опорных пружин. Значения их упругой жесткости после обновления будут приближаться к реальным граничным условиям.

#### *Регуляризация*

Рассмотрение плохо обусловленных, зашумленных систем уравнений является центральной проблемой для задач обновления модели конечных элементов [14]. Такие уравнения часто возникают при коррекции моделей конечных элементов с помощью измерений вибрации. Акцент обычно делается на уменьшении количества параметров, чтобы гарантировать, что уравнения хорошо обусловлены. Тем не менее правильная обработка данных с «шумом» важна. Кроме того, уменьшение количества параметров иногда невозможно или нежелательно.

При обновлении модели соотношение между измеренным выходом обычно является нелинейным. В этом случае задача линеаризуется с использованием разложения в ряд Тейлора и выполнения итерации до сходимости. На каждой итерации должен быть решен набор линейных уравнений типа  $Ax = b$  для неизвестного вектора  $x$ , связанного с параметрами. Когда матрица коэффициентов близка к вырождению, даже небольшие уровни «шума» могут привести к значительному отклонению оценочных параметров от ее «точного» значения. Решение называется неустойчивым, а проблема оценки плохо обусловлена. Для преодоления упомянутых сложностей часто используется регуляризация по Тихонову [15, 16].

Методы идентификации систем на основе обновления моделей не могут быть эффективно использованы для больших и сложных реальных структур с нелинейным поведением. Для таких случаев используются основанные на принципах бионики методы мягкого исчисления, такие как нейронные сети, генетические алгоритмы или оптимизация роем частиц.

#### **Поиск повреждений и мониторинг**

Обнаружение повреждения или повреждение, определяемое изменениями динамических свойств или откликом конструкций, является предметом, которому уделяется значительное внимание в литературе. Основная идея заключается в том, что модальные параметры (в частности, частоты, формы мод и модальное демпфирование) являются функциями физических свойств конструкции (масса, демпфирование и жесткость). Следовательно, изменения физических свойств вызовут изменения модальных свойств.

#### *Сопоставление частот и форм собственных колебаний*

В связи с этим возникла идея о поиске повреждений конструкции на основе исследования изменения ее динамических характеристик. Рассматривался сдвиг частот расчетной (аналитической) модели, когда фиксировалась относительная разность

$$\left(\omega_i^a - \omega_i^e\right) / \omega_i^e \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (14)$$

где  $\omega^a$  и  $\omega^e$  – аналитические и экспериментальные частоты собственных колебаний соответственно;  $N$  – количество измеренных частот.

Довольно рано было обнаружено, что изменения в формах собственных колебаний являются более чувствительными показателями наличия повреждений, чем собственные частоты [17].

Многие исследователи в качестве руководства для обнаружения повреждений использовали формы собственных колебаний до и после повреждения конструкции. Для их сопоставления чаще всего применялся критерий модальной гарантии (МАС) и координатный критерий модальной гарантии (СОМАС).

МАС оценивает корреляции измеренных и расчетных форм собственных колебаний. Он определяется следующим образом [13]:

$$\text{MAC}(\varphi_a, \varphi_e) = \frac{|\varphi_a^T, \varphi_e|^2}{(\varphi_a^T, \varphi_a)(\varphi_e^T, \varphi_e)}, \quad (15)$$

где  $\varphi_a$  и  $\varphi_e$  – аналитические и экспериментальные векторы форм собственных колебаний соответственно.

Если значение МАС равно 1, то между собственным вектором аналитической модели и измеренным вектором имеется полная согласованность, а нулевое значение МАС указывает на абсолютную несогласованность.

Другим известным методом сравнения и сопоставления двух наборов ( $A$  и  $B$ ) форм вибрационных мод является СОМАС. Отличие этого критерия состоит в том, что рассматриваются значения собственных форм только в точках измерения. Если  $i$  – это место измерения,  $N$  – общее количество сравниваемых форм собственных колебаний, а  ${}_i\varphi_{A,j}$  и  ${}_i\varphi_{B,j}$  – элементы вектора форм собственных колебаний для наборов  $A$  и  $B$  в  $j$ -й сравниваемой паре форм, то СОМАС для места измерения  $i$  определяется следующим образом:

$$\text{СОМАС}(i) = \frac{\left[ \sum_{j=1}^N {}_i\varphi_{A,j} \cdot {}_i\varphi_{B,j} \right]^2}{\sum_{j=1}^N {}_i\varphi_{A,j}^2 \sum_{j=1}^N {}_i\varphi_{B,j}^2}. \quad (16)$$

Значение СОМАС, близкое к единице, указывает на хорошее согласование в выбранном месте между двумя наборами данных, а значение, близкое к нулю, указывает на несогласованность этих наборов данных.

В некоторых случаях используется комбинированная характеристика согласованности, которая выражается формулой

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i \left( \frac{\omega_i^a - \omega_i^e}{\omega_i^e} \right)^2 + \sum_{i=1}^N \beta_i \frac{(1 - \text{MAC}_i)^2}{\text{MAC}_i}. \quad (17)$$

Здесь  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  обозначают весовые коэффициенты для  $i$ -й собственной частоты и  $i$ -го модального вектора соответственно, с помощью которых учитывается значимость и доверие к точности используемых данных.



## Обновление матриц

Другой класс методов идентификации повреждений основан на модификации матриц расчетных моделей для максимально точного воспроизведения измеренного статического или динамического отклика данных. Эти методы решают проблемы для обновленных матриц (или возмущений номинальной модели, которые производят обновленные матрицы) путем формирования ограниченной задачи оптимизации на основе уравнений движения номинальной модели и измеренных данных.

Существует несколько различных физических уравнений, которые используются в качестве целевых функций или ограничений для задачи обновления матрицы, в зависимости от алгоритма обновления. Предполагается известным динамическое поведение неповрежденной конструкции, которое может быть представлено уравнениями, имеющими в матричной форме вид

$$M^u \ddot{x} + C^u \dot{x} + K^u x = f(t). \quad (18)$$

Для собственных значений, соответствующих этому уравнению, выполняется условие

$$\left( (\lambda_i^u)^2 M^u + \lambda_i^u C^u + K^u \right) \varphi_i^u = 0, \quad (19)$$

где  $\lambda_i^u$  и  $\varphi_i^u$  – это известное или измеренное собственное значение и собственный вектор неповрежденной конструкции. Предполагается, что это уравнение должно выполняться для всех измеренных форм собственных колебаний.

Теперь рассмотрим собственные значения и собственные векторы, соответствующие поврежденному состоянию  $\lambda_i^d$  и  $\varphi_i^d$ . Подстановка этих величин в приведенное выше уравнение дает

$$\left( (\lambda_i^d)^2 M^u + \lambda_i^d C + K \right) \varphi_i^u = d, \quad (20)$$

где  $d$  определяется как «остаточная сила» для  $i$ -й формы собственных колебаний поврежденной конструкции. Этот вектор представляет собой силу, меняющуюся по гармоническому закону, которая должна быть приложена к поврежденной конструкции, описываемой матрицами  $M^d$ ,  $C^d$ ,  $K^d$  на измеренной частоте  $\lambda_i^d$ , чтобы структура отвечала наблюдаемой форме собственных колебаний  $\varphi_i^d$ .

Есть несколько методов, которые были использованы для вычисления аналитических модельных матриц поврежденной структуры  $M^d$ ,  $C^d$ ,  $K^d$  так, чтобы полученное уравнение движения было сбалансированным, т. е. выполнялось условие

$$\left( (\lambda_i^d)^2 M^d + \lambda_i^d C^d + K^d \right) \varphi_i^u = 0, \quad (21)$$

где матрицы поврежденной модели определяются как матрицы неповрежденной модели минус возмущение

$$M^d = M^u - \Delta M, \quad C^d = C^u - \Delta C, \quad K^d = K^u - \Delta K. \quad (22)$$

Подставляя (22) в уравнение (21), получаем

$$\left( (\lambda_i^d)^2 (M^u - \Delta M) + \lambda_i^d (C^u - \Delta C) + (K^u - \Delta K) \right) \varphi_i^u = 0 \quad (23)$$

и, перенося члены возмущения в правую часть уравнения, приходим к уравнению

$$\left( (\lambda_i^d)^2 M^u + (\lambda_i^d) C^u + K^u \right) \varphi_i^d = \left( (\lambda_i^d)^2 \Delta M + (\lambda_i^d) \Delta C + \Delta K \right) \varphi_i^d. \quad (24)$$

Левая часть этого уравнения состоит из известных величин и ранее была определена как остаточная сила, поэтому уравнение, которое необходимо решить для возмущений матрицы, можно записать в виде

$$\left( (\lambda_i^d)^2 \Delta M + (\lambda_i^d) \Delta C + \Delta K \right) \varphi_i^d = d_i. \quad (25)$$

Ошибка модальной силы  $d_i$  может использоваться как целевая функция при решении задачи

$$\min_{\Delta M, \Delta C, \Delta K} \{ d_i (\Delta M, \Delta C, \Delta K) + \mu R(\Delta M, \Delta C, \Delta K) \}, \quad (26)$$

где  $R$  – функция ограничений, а  $\mu$  – множитель Лагранжа или константа штрафной функции.

В качестве альтернативы иногда используются оценки ошибок, построенные на сопоставлении форм собственных колебаний, когда ошибка вывода для модального отклика конструкции определяется следующим образом:

$$e_i(x) = \varphi_i - \hat{\varphi}_i \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (27)$$

где  $x$  – вектор системных параметров;  $\varphi_i$  – вычисленный вектор  $i$ -й формы собственных колебаний;  $\hat{\varphi}_i$  – измеренный вектор  $i$ -й формы собственных колебаний и  $m$  – количество измеренных форм соответственно.

Неизвестные параметры получаются путем минимизации целевой функции, сформулированной выходным вектором ошибок, определяемым уравнением (27). Следовательно, оценка параметров становится нелинейной задачей оптимизации с ограничениями типа

$$\min_x \Pi(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \alpha_i \|\varphi_i - \hat{\varphi}_i\|^2 \quad \text{при условии } R(x) \geq 0, \quad (28)$$

где  $R(x)$  – верхние или нижние ограничения на значения системных параметров, а  $\alpha_i$  – весовой коэффициент для  $i$ -й формы. Чтобы решить задачу оптимизации, выраженную формулой (28), используется рекурсивное квадратичное программирование, для чего требуется знать чувствительность функции ошибок для параметров системы. Она определяется формулой

$$\Pi_{,x} = \sum_{i=1}^m \alpha_i \|\varphi_i - \hat{\varphi}_i\| \varphi_{i,x}, \quad (29)$$

где нижний индекс  $(\cdot)_x$  обозначает частную производную по системному параметру  $x$ . Когда вектор формы собственных колебаний нормализуется по матрице масс, матрица чувствительности вектора выглядит следующим образом:

$$\varphi_{j,x} = - \sum_{i=1}^m \frac{\varphi_i^T K_{i,x} \varphi_j}{(\lambda_i - \lambda_j) \varphi_i^T M \varphi_j} \varphi_i \quad (i \neq j), \quad (30)$$

где  $\lambda$ ,  $M$  и  $K_x$  соответственно обозначают собственное значение, матрицу масс и матрицу чувствительности матрицы жесткости конструкции по отношению к параметру системы.

Однако в случаях, когда собственные формы измеряются лишь частично, мы не можем использовать чувствительность, приведенную в (30), с нормализацией по матрице масс. Если же предположим, что  $\varphi$  нормализуется произвольной матрицей  $C$ , то можно выразить ее чувствительность  $\bar{\varphi}_{j,x}$  следующим образом:

$$\bar{\varphi}_{j,x} = \frac{1}{\varphi_i^T C \varphi_i} \left( \varphi_{j,x} \sqrt{\varphi_i^T C \varphi_i} - \varphi_j \frac{\varphi_i^T C \varphi_{i,x}}{\sqrt{\varphi_i^T C \varphi_i}} \right). \quad (31)$$

Если заменить  $\sqrt{\varphi_i^T C \varphi_i}$  на  $m_c$ , то уравнение (31) можно представить в следующем виде:

$$\bar{\varphi}_{j,x} = \frac{1}{m_c} \varphi_{i,x} - \frac{1}{m_c^3} (\varphi_i^T C \varphi_{i,x}) \varphi_i. \quad (32)$$

Задача минимизации (28) является плохо обусловленной. Это означает, что результаты ее решения могут быть бессмысленными или расходиться в процессе оптимизации. Для преодоления такой неустойчивости используется метод регуляризации, когда возможное пространство решений задачи сужается путем добавления к целевой функции регуляризирующей добавки. В частности, одним из часто используемых является регуляризатор

$$\Pi_R = \frac{\beta}{2} \|K(x) - K(x_0)\|_F^2, \quad (33)$$

где  $\beta$  и  $x_0$  обозначают коэффициент регуляризации и системные параметры, представляющие базовые свойства структуры, соответственно, а  $\|\cdot\|_F^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |a_{ij}|^2$  –

квадрат нормы Фробениуса  $n \times m$  матрицы  $A$ . Тогда задача идентификации регуляризованной системы определяется следующим образом:

$$\min_x \Pi(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \alpha_i \|\varphi_i - \hat{\varphi}_i\|^2 + \frac{\beta}{2} \|K(x) - K(x_0)\|_F^2 \quad \text{при условии } R(x) \geq 0. \quad (34)$$

### Практическое применение

Имеются многочисленные сообщения о применении методов обновления расчетных моделей и идентификации повреждений. Упомянутые ниже

примеры служат только иллюстрацией разнообразия практических проблем, где возникает необходимость использования этих методов.

Наиболее активное применение методов идентификации и поиска повреждений первоначально наблюдалось в аэрокосмической технике. В том числе это касалось и практических применений упомянутых методов, которое сегодня попросту стало элементом технологии. Так, авторы работы [18] описывают разработку и внедрение модульной инспекционной системы космического челнока «шаттл». Проведение модальных испытаний образцов орбитального аппарата использовалось для выявления повреждений передней кромки крыла, щитка кузова, передней, средней и задней панелей фюзеляжа. В статье обсуждаются результаты этих испытаний образцов, а также испытания на полной конструкции орбитального аппарата. А в работе [19] описано определение местонахождения повреждения в стрингере несущей конструкции самолета DC-9.

Публикации об идентификации объектов гражданского строительства представлены, главным образом, описаниями работ конструкций многоэтажных зданий и мостов. Так, например, в работе [20] представлены подробные сведения об идентификации и моделировании методом конечных элементов 18-этажного здания из железобетона в Катманду, которое было повреждено во время землетрясения в Горхе в Непале.

Рассматривались и другие типы конструкций, например, в исследовании [21] успешно определили модальные параметры телевизионной башни в Нанкине, используя измеренную реакцию на ускорения окружающей среды (микросейсмы). А в [22] описан процесс динамической идентификации колокольни собора в Палермо, начиная с измерения отклика высокочувствительных сейсмометров и анализа ответных сигналов, проведенной на основе этих измерений основных модальных форм.

Мосты имеют специфические проблемы, которые не существуют в конструкциях здания, такие как нагрузка транспортного средства или пешехода (транспортными средствами или пешеходами), в дополнение к ветровой и сейсмической нагрузке. Загрузка транспортного средства добавляет трудности в точном моделировании моста в отношении усталости из-за многократной и длительной нагрузки.

Авторы [23] проводят данные исследований на вантовом мосту, в работе [24] идентифицируются колебания и аэродинамические эффекты проезжей части вантового моста, а в исследовании [25] сопоставляются три различных метода идентификации системы применительно к подвесному мосту Альфреда Зампа под Сан-Франциско.

### **Другие обратные задачи**

Идентификация расчетной модели и определение ее параметров, в том числе и поиск возможных неисправностей, является важным, но не единственным классом обратных задач строительной механики. Универсальность разработанных подходов к решению таких задач позволила рассматривать и другие практически важные задачи, естественно, с учетом их особенностей.

*Оценка механических свойств материалов*

В числе первых задач идентификации были задачи, связанные с оценкой свойств конструкционных материалов (механических, теплофизических, идентификация полимерных и композитных материалов).

Так, в статье [26] в общих чертах обсуждается применимость системы идентификации для целей характеристики материала. Основой для предлагаемых подходов являются методы теории идентификации в сочетании с итерационными схемами последовательного уточнения характеристик материалов в образце, учитывающих неоднородное напряженно-деформированное состояние, большие деформации и зависимость от скорости деформирования.

В работе [27] рассмотрены задачи параметрической идентификации механических характеристик композиционных материалов. В математической постановке они сведены к задачам математического программирования. Минимизация полученной целевой функции производится с применением стабилизирующего функционала. В работах приведены примеры практической реализации предложенного метода в задачах обработки экспериментальных данных.

Идентификации параметров, позволяющих построить обобщенную кривую деформирования и описать свойства материала во всем диапазоне испытываемых нагрузок, вызывающих как упругое, так и пластическое деформирование, посвящено исследование [28], которое основано на анализе поведения образца при внедрении индентора в массив материала.

Многие исследования посвящены идентификации механических характеристик для конструкций на упругом основании, в которых основной проблемой является восстановление неизвестных свойств реального грунтового основания. Чаще всего задача ставилась как определение параметров известной модели упругого основания, например Винклера или Пастернака [29–31].

*Восстановление исходного состояния*

В механике иногда изучают задачи, в которых граничных или начальных условий недостаточно для определения решения. Для этого необходимо ввести подходящее количество вспомогательных данных для дополнения информации. Эти вспомогательные данные почти всегда получаются из измерений, выполненных на границе или в области. В этом контексте возникает много интересных технических проблем, например, таких как моделирование статических или динамических воздействий.

Типичной является так называемая задача Коши в линейной теории упругости, которая может быть сформулирована следующим образом: учитывая нагрузки и смещения на доступной части границы упругого тела, следует оценить ту же информацию на недоступной части границы. Эта проблема имеет много практических применений, поскольку в реальных задачах иногда данные о граничных условиях являются неполными (например, из-за недоступности для наблюдений). Примеры решения таких задач приведены, например, в работах [32, 33].

Примером практического применения может служить публикация [34], в которой описывается процедура моделирования и идентификации гранич-

ных условий для консольно-подобных структур. Задача решалась применительно к уточнению расчетной модели крыла самолета, ее решение с использованием анализа чувствительности собственных частот позволило точно смоделировать как жесткость защемления, так и граничную массу.

В линейных задачах строительной механики вопрос об исходном состоянии, как правило, не стоит – считается, что ненагруженная система имеет нулевые перемещения и напряжения. Исключением являются задачи о предварительно напряженных системах, где предполагается присутствие некоторой системы внутренних усилий, находящихся в равновесии с нулевой внешней нагрузкой. Преднапряжение создают для получения некоторой желательной картины распределения внутренних усилий, которая должна быть реализованной при расчетном нагружении. Поскольку желательная картина полагается полностью известной, то достаточно решить полностью определенную задачу о разгрузке системы, что реализуется теми же способами, что и для прямых задач.

Более сложная обратная задача связана с определением остаточных напряжений, т. е. напряжений, соответствующих нулевым нагрузкам. Для этого иногда используются методы испытаний, требующие создания отверстия или разреза в конструкции, но иногда требуется решить задачу неразрушающим способом. Задача решается на основе анализа эффекта, вызванного дополнительной испытательной нагрузкой и измеренных в подходящем числе точек [35–37]. При этом учитывается возможность наличия ошибок в измеренных данных.

#### *Восстановление нагрузок*

Оценка сил возбуждения является важной проблемой в анализе конструкций. Когда это возможно, для непосредственного измерения используются датчики силы, однако такое прямое измерение во многих ситуациях затруднительно или невозможно. В качестве примера укажем на идентификацию неизвестных нагрузок, приложенных к свае, входящей в систему стабилизации крутого горного склона, по данным об измерениях перемещений в точках, расположенных вдоль оси свай [38].

Кроме того, определение нагрузок механической системы представляет несомненный интерес как инструмент для диагностики эффективности и неэффективности всякого рода силозадающих устройств. Всякий раз, когда непосредственное знание о силе невозможно, мы идем обратным путем. Таким образом, следует обратный процесс, и при таких обстоятельствах идентификация силы является обратной задачей. Статические задачи указанного типа рассматривались, например, в работах [39–41].

Но чаще всего нас интересует решение такой динамической задачи, когда из измерения набора динамических откликов в некоторых точках конструкции (например, ускорений, смещений или деформаций) можно косвенно оценить силы. Идентификация силы может быть выполнена либо во временной области, либо в частотной области. В качестве примера первого подхода укажем на работу [42], где для линейной системы рассматриваемая задача, относящаяся к классу граничных обратных задач механики, сведена к системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициен-

тов, посредством которых искомое воздействие аппроксимируется кусочно-постоянной функцией. При этом для вычисления входящих в элементы расчетных систем значений передаточной функции, соответствующих показаниям регистрируемой величины на единичное ступенчатое воздействие, был использован метод конечных элементов. Решения в частотной области приводятся, например, в работах [43, 44].

### Заключительные замечания

Представленный выше краткий обзор публикаций по задачам системной идентификации конструкций и примыкающим к ним проблемам является далеко не полным. Его основной задачей было привлечение внимания специалистов к этой активно развивающейся области исследований, имеющей важное практическое значение.

Большинство опубликованных работ посвящено небольшим и академическим задачам. Системная идентификация крупных реальных конструкций с нелинейным поведением, подверженным неизвестным динамическим нагрузкам, таким, например, как сильные движения грунта при землетрясениях, является сложной и еще не до конца решенной задачей. Полагаем, что ее реализация станет важной темой будущих исследований.

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Ляхович Л.С.* Особые свойства оптимальных систем и основные направления их реализации в методах расчета сооружений. Томск : Изд-во ТГАСУ, 2009. 372 с.
2. *Эйкхофф П.* Основы идентификации систем управления. Москва : Мир, 1975. 680 с.
3. *Kozin F., Kozin C.H.* A moment technique for system parameter identification // Shock and Vibration Bulletin. 1968. № 38. P. 119–131.
4. *Berman A., Flannelly W.G.* Theory of Incomplete Models of Dynamic Structures // AIAA Journal. 1971. № 8. P. 1481–1487. (Русский перевод: Берман, Фланели. Теория неполных динамических моделей конструкций // Ракетная техника и космонавтика. 1971. № 8).
5. *Baruch M.* Optimal correction of mass and stiffness matrices using measured modes // AIAA Journal. 1982. V. 20. № 11. P. 1623–1626.
6. *Berman A., Nagy E.J.* Improvement of a large analytical model using test data // AIAA Journal. 1983. V. 21. № 8. P. 1168–1173.
7. *Еманов А.Ф., Селезнёв В.С., Бах А.А.* Когерентное восстановление полей стоячих волн как основа детального сейсмологического обследования инженерных сооружений // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2007. № 3. С. 20–23.
8. *Бах А.А., Красников А.А.* Использование метода стоячих волн для анализа динамических характеристик высотных зданий на примере 40-этажного комплекса «Дирижабль», г. Москва // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2014. № 1. С. 26–30.
9. *Белостоцкий А.М., Каличава Д.К., Аул А.А., Нагибович А.И.* Адаптируемые конечно-элементные модели на основе динамического мониторинга несущих конструкций высотных зданий. Ч. 3. Апробация методики на высотном комплексе, возведенном с выявленными отступлениями от проекта // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2012. V. 8. I. 4. P. 44–55.
10. *Алберт А.* Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. Москва : Наука, 1977. 301 с.
11. *Белостоцкий А.М., Каличава Д.К.* Адаптируемые конечно-элементные модели на основе динамического мониторинга несущих конструкций высотных зданий. Ч. 1. Основы разработанной расчетно-экспериментальной методики // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2012. V. 8. I. 4. P. 20–29.

12. Белостоцкий А.М., Кухта А.В. Адаптивные математические модели для систем мониторинга строительных объектов // Предотвращение аварий зданий и сооружений : электронный журнал. 2011. URL: <http://www.pomag.ru/prensa/adaptive-math-method>
13. Allemang R.J., Brown D.L. A correlation coefficient for modal vector analysis // 1st International Modal Analysis Conference, SEM, Orlando, Florida, 198. P. 110–116.
14. Ватulyян А.О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. Москва : Физматгиз, 2007. 224 с.
15. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. Москва : Наука, 1979. 284 с.
16. Постнов В.А. Использование метода регуляризации Тихонова для решения задач идентификации упругих систем // Известия РАН МТТ. 2010. № 1. С. 64–71.
17. Tang J.P., Leu K.M. Vibration Tests and Damage Detection of P/C Bridge // Journal of the Chinese Institute of Engineers. 1991. V. 14. P. 531–536.
18. Hunt D.L., Weiss S.P., West W.M., Dunlap T.A., Freesmeyer S.R. Development and Implementation of a Shuttle Modal Inspection System // Sound and Vibration. 1990. V. 24. № 9. P. 34–42.
19. Robinson N.A., Peterson L.D., James G.H., Doebling S.W. Damage Detection in Aircraft Structures Using Dynamically Measured Static Flexibility Matrices // Proc. of the 14th International Modal Analysis Conference. 1996. P. 857–865.
20. Yu H., Mohammed M.A., Mohammadi M.E., Moaveni B., Barbosa A.R., Richard A.S., Wood L. Structural Identification of an 18-Story RC Building in Nepal Using Post-Earthquake Ambient Vibration and Lidar Data // Frontiers in Built Environment. 2017. 3: 11.
21. Feng M.Q., Kim J.M., Xue H. Identification of a dynamic system using ambient vibration measurements // J. Appl. Mech. 1998. V. 659. P. 1010–1021.
22. Cavaleri L., Ferrotto M.F., Di Trapani F., Alessandro A. Vibration Tests and Structural Identification of the Bell Tower of Palermo Cathedral // The Open Construction & Building Technology Journal. 2020. V. 14. P. 319–330.
23. Macdonald J., Daniell W. Variation of modal parameters of a cable-stayed bridge identified from ambient vibration measurements and FE modeling // Engineering Structures. 2005. V. 27. P. 1916–1930.
24. Plevris V., Papadrakakis M. A hybrid particle swarm-gradient algorithm for global structural optimization // Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering. 2011. V. 26. № 1. P. 48–68.
25. He X., Moaveni B., Conte J., Elgamal A., Masri S. System identification of Alfred Zampa memorial bridge using dynamic field test data // Journal of Structural Engineering. 2009. V. 135. P. 54–66.
26. Баженов В.Г. Математическое моделирование и методы идентификации деформационных и прочностных характеристик материалов // Физическая мезомеханика. 2007. Т. 10. № 5. С. 91–105.
27. Каюмов Р.А. Расширенная задача идентификации механических характеристик материалов по результатам испытаний конструкций // Известия АН. Механика твердого тела. 2004. № 2. С. 94–103.
28. Гук Н.А., Ободан Н.И. Идентификация механических свойств материала по результатам косвенных измерений // Механика твердого тела : межвед. сб. науч. тр. Вып. 40. 2010. С. 233–242.
29. Кузнецов С.Ф., Семенов А.С. Метод определения механического состояния конструкций, взаимодействующих с неоднородным грунтовым основанием // Справочник. Инженерный журнал. 2012. № 3. С. 23–31.
30. Гук Н.А. Идентификация свойств оснований сооружений методом обратных задач // Математическое и компьютерное моделирование. Серия: Физико-математические науки. 2012. С. 65–76 (на укр. языке).
31. Jang T.S., Sung H.G., Han S.L., Kwon S.H. Inverse determination of the loading source of the infinite beam on elastic foundation. // Journal of Mechanical Science and Technology. 2008. V. 22. № 12. P. 2350–2356.
32. Bilotta A., Turco E. A numerical study on the solution of the Cauchy problem in elasticity // International Journal of Solids and Structures. 2009. V. 46. P. 4451–4477.
33. Marin L. The minimal error method for the Cauchy problem in linear elasticity. Numerical implementation for two-dimensional homogeneous isotropic linear elasticity // International Journal of Solids and Structures. 2009. V. 46. P. 951–974.



34. Wei Liu, Zhichun Yang, Le Wang, Ning Guo. Boundary condition modelling and identification for cantilever-like structures using natural frequencies // Chinese Journal of Aeronautics. 2019. V. 32. I. 6. P. 1451–1464.
35. Turco E. A strategy to identify exciting forces acting on structures // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2005. V. 64. P. 1483–1508.
36. Turco E. Identification of axial forces on statically indeterminate pin-jointed trusses by a non-destructive mechanical test // The Open Civil Engineering Journal. 2013. V. 7. P. 50–57.
37. Ballard P., Constantinescu A. On the inversion of subsurface residual stresses from surface stress measurements. // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 1994. V. 42. P. 1767–1788.
38. Ring W. Identification of the load of a partially breaking beam from inclination measurements // Inverse Problems. 1999. V. 15. № 4. P. 1003–1020.
39. Jacquelin E., Bennani A., Hamelin P. Force reconstruction: analysis and regularization of a deconvolution problem // Sound and Vibration. 2003. V. 265. P. 81–107.
40. Pister K. Mathematical modeling for structural analysis and design // Nuclear Engineering and Design. 1972. V. 8. P. 353–375.
41. Reddy A.N., Ananthasuresh G.K. On computing the forces from the noisy displacement data of an elastic body // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2008. V. 76. № 11. P. 1645–1677.
42. Янчевский И.В. К проблеме восстановления временной зависимости нестационарного воздействия, приложенного к упруго-деформируемому элементу конструкции // Проблемы машиностроения. 2015. Т. 18. № 2. С. 43–54.
43. Jang T.S., Han S.L. Numerical experiments on determination of spatially concentrated time-varying loads on a beam: an iterative regularization method // The Journal of Mechanical Science and Technology. 2009. V. 23. № 10. P. 2722–2729.
44. Wang B.T., Chiu C.H. Determination of unknown impact force acting on a simply supported beam // Mechanical System and Signal Processing. 2003. V. 17. № 3. P. 683–704.

## REFERENCES

1. Liyakhovich L.S. Osobyje svojstva optimalnykh system i osnovnye napravleniya ikh realizacii v metodakh rascheta sooruzhenij [Properties of optimum systems and their implementation in structural analysis]. Tomsk: TSUAB, 2009. 372 p. (rus)
2. Eykhoff P. Osnovy identifikacii system upravleniya [System identification]. Moscow: Mir. 1975. 680 p. (transl. from Dutch)
3. Kozin F., Kozin C.H. A moment technique for system parameter identification. *Shock and Vibration Bulletin*. 1968. No. 38. Pp. 119–131.
4. Berman A., Flannelly W.G. Theory of incomplete models of dynamic structures. *AIAA Journal*. 1971. No. 8. Pp. 1481–1487.
5. Baruch M. Optimal correction of mass and stiffness matrices using measured modes. *AIAA Journal*. 1982. V. 20. No. 11. Pp. 1623–1626.
6. Berman A., Nagy E.J. Improvement of a large analytical model using test data. *AIAA Journal*. 1983. V. 21. No. 8. Pp. 1168–1173.
7. Emanov A.F., Seleznyov V.S., Bah A.A. Kogerentnoe vosstanovlenie polej stoyachih voln kak osnova detalnogo sejsmologicheskogo obsledovaniya inzhenernyh sooruzhenij [Coherent restoration of standing wave fields as a basis for detailed seismological survey of engineering structures]. *Seismostokoe stroitel'stvo. Bezopasnost' sooruzhenii*. 2007. No. 3. Pp. 20–23.
8. Bah A.A., Krasnikov A.A. Ispolzovanie metoda stoyachih voln dlya analiza dinamicheskikh harakteristik vysotnyh zdaniy na primere 40-etazhnogo kompleksa "Dirizhabl", g. Moskva [Standing waves method in the analysis of dynamic characteristics of high-rise buildings on the example of 40-storey complex "Dirigible", Moscow]. *Seismostokoe stroitel'stvo. Bezopasnost' sooruzhenii*. 2014. No. 1 Pp. 26–30.
9. Belostockij A.M., Kalichava D.K., Aul A.A., Nagibovich A.I. Adaptiruemye konechno-elementnye modeli na osnove dinamicheskogo monitoringa nesushih konstrukcij vysotnyh zdaniy. Chast 3. Aprobaciya metodiki na vysotnom komplekse, vozvedennom s vyyavlennymi otstupleniyami ot proekta [Adaptable finite element models based on dynamic monitoring of

- bearing structures of high-rise buildings. Pt 3. Methodology approbation on a high-rise complex erected with identified deviations from the project]. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2012. V. 8. No. 4. Pp. 44–55.
10. Albert A. Regressiya, psevdoinversiya i rekurrentnoe ocenivanie [Regression, and the moor Penrose pseudoinverse]. Moscow: Nauka, 1977. 301 p. (transl. from Engl.)
  11. Belostockij A.M., Kalichava D.K. Adaptiruemye konechnoelementnye modeli osnove dinamicheskogo monitoringa nesushih konstrukcij vysotnyh zdaniy. Chast 1. Osnovy razrabotannoj raschetno-eksperimentalnoj metodiki [Adaptable finite element models based on dynamic monitoring of bearing structures of high-rise buildings. Pt 1. The developed calculation and experimental methodology]. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2012. V. 8. No. 4. Pp. 20–29.
  12. Belostockij A.M., Kuhta A.V. Adaptivnye matematicheskie modeli dlya sistem monitoringa stroitelnyh obektov. [Adaptive mathematical models for construction monitoring systems]. Predotvrashenie avarij zdaniy i sooruzheni. 2011. Available: [www.pamag.ru/prensa/adaptive-math-method](http://www.pamag.ru/prensa/adaptive-math-method)
  13. Allemang R.J., Brown D.L. A correlation coefficient for modal vector analysis. *1st International Modal Analysis Conference, SEM*. Orlando, Florida, 1982. Pp. 110–116.
  14. Vatulyan A.O. Obratnye zadachi v mehanike deformiruemogo tverdogo tela [Inverse problems in mechanics of deformable solid]. Moscow: Fizmatgiz, 2007. 224 p. (rus)
  15. Tihonov A.N., Arsenin V.Ya. Metody resheniya nekorrektnykh zadach [Methods for solving incorrect problems]. Moscow: Nauka, 1979. 284 p. (rus)
  16. Postnov V.A. Ispolzovanie metoda regularizacii Tihonova dlya resheniya zadach identifikacii uprugih system [Use of Tikhonov's regularization method to solve problems of elastic system identification]. *Izv. RAN MTT*. 2010. No. 1. Pp. 64–71. (rus)
  17. Tang J.P., Leu K.M. Vibration tests and damage detection of P/C bridge. *Journal of the Chinese Institute of Engineers*. 1991. V. 14. Pp. 531–536.
  18. Hunt D.L., Weiss S.P., West W.M., Dunlap T.A., Freesmeyer S.R. Development and implementation of a shuttle modal inspection system. *Sound and Vibration*. 1990. V. 24. No. 9. Pp. 34–42.
  19. Robinson N.A., Peterson L.D., James G.H., Doebling S.W. Damage detection in aircraft structures using dynamically measured static flexibility matrices. *Proc. 14th Int. Conf. on Modal Analysis*. 1996. Pp. 857–865.
  20. Yu H., Mohammed M.A., Mohammadi M.E., Moaveni B., Barbosa A.R., Richard A.S., Wood L. Structural identification of an 18-story RC building in Nepal using post-earthquake ambient vibration and lidar data. *Frontiers in Built Environment*. 2017. V. 3. No. 11.
  21. Feng M.Q., Kim J.M., Xue H. Identification of a dynamic system using ambient vibration measurements. *Journal of Applied Mechanics*. 1998. V. 659. Pp. 1010–1021.
  22. Cavaleri L., Ferrotto M.F., Di Trapani F., Alessandro A. Vibration tests and structural identification of the Bell Tower of Palermo Cathedral. *The Open Construction & Building Technology Journal*. 2020. V. 14. Pp. 319–330.
  23. Macdonald J., Daniell W. Variation of modal parameters of a cable-stayed bridge identified from ambient vibration measurements and FE modeling. *Engineering Structures*. 2005. V. 27. Pp. 1916–1930.
  24. Plevris V., Papadrakakis M. A hybrid particle swarm-gradient algorithm for global structural optimization. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*. 2011. V. 26. No. 1. Pp. 48–68.
  25. He X., Moaveni B., Conte J., Elgamal A., Masri S. System identification of Alfred Zampa memorial bridge using dynamic field test data. *Journal of Structural Engineering*. 2009. V. 135. Pp. 54–66.
  26. Bazhenov V.G. Matematicheskoe modelirovanie i metody identifikacii deformacionnyh i prochnostnyh harakteristik materialov [Mathematical modeling and methods to identify deformation and strength characteristics of materials]. *Fizicheskaya mezomehanika*. 2007. V. 10. No. 5. Pp. 91–105. (rus)
  27. Kayumov R.A. Rasshirennaya zadacha identifikacii mehanicheskikh harakteristik materialov po rezultatam ispytanij konstrukcij [Extended problem of identification of mechanical properties of materials by structural test results]. *Izv. AN. Mehanika tverdogo tela*. 2004. No. 2. Pp. 94–103. (rus)
  28. Guk N.A., Obodan N.I. Identifikaciya mehanicheskikh svoystv materiala po rezultatam kosvennyh izmerenij [Identification of mechanical properties of material by indirect measurements]. *Mehanika tverdogo tela*. 2010. No. 40. Pp. 233–242. (rus)

29. Kuznecov S.F., Semenov A.C. Metod opredeleniya mehanicheskogo sostoyaniya konstrukcij, vzaimodejstvuyushih s neodnorodnym gruntovym osnovaniem [Determination of mechanical state of structures interacting with heterogeneous ground base]. *Spravochnik. Inzhenernyj zhurnal*. 2012. No. 3. Pp. 23–31. (rus)
30. Guk N.A. Identifikaciya svoystv osnovanij sooruzhenij metodom obratnyh zadach [Identification of properties of foundation structures using inverse problems]. *Matematicheskoe i kompyuternoe modelirovanie. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki*. 2012. Pp. 65–76.
31. Jang T.S., Sung H.G., Han S.L., Kwon S.H. Inverse determination of the loading source of the infinite beam on elastic foundation. *Journal of Mechanical Science and Technology*. 2008. V. 22. No. 12. Pp. 2350–2356.
32. Bilotta A., Turco E. A numerical study on the solution of the Cauchy problem in elasticity. *International Journal of Solids and Structures*. 2009. V. 46. Pp. 4451–4477.
33. Marin L. The minimal error method for the Cauchy problem in linear elasticity. Numerical implementation for two-dimensional homogeneous isotropic linear elasticity. *International Journal of Solids and Structures*. 2009. V. 46. Pp. 951–974.
34. Wei Liu, Zhichun Yang, Le Wang, Ning Guo. Boundary condition modelling and identification for cantilever-like structures using natural frequencies. *Chinese Journal of Aeronautics*. 2019, V. 32. No. 6. Pp. 1451–1464.
35. Turco E. A strategy to identify exciting forces acting on structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2005. V. 64. Pp. 1483–1508.
36. Turco E. Identification of axial forces on statically indeterminate pin-jointed trusses by a non-destructive mechanical test. *The Open Civil Engineering Journal*. 2013. V. 7. Pp. 50–57.
37. Ballard P., Constantinescu A. On the inversion of subsurface residual stresses from surface stress measurements. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1994. V. 42. Pp. 1767–1788.
38. Ring W. Identification of the load of a partially breaking beam from inclination measurements. *Inverse Problems*. 1999. V. 15. No. 4. Pp. 1003–1020.
39. Jacquelin E., Bennani A., Hamelin P. Force reconstruction: analysis and regularization of a deconvolution problem. *Sound and Vibration*. 2003. V. 265. Pp. 81–107.
40. Pister K. Mathematical modeling for structural analysis and design. *Nuclear Engineering and Design*. 1972. V. 8. Pp. 353–375.
41. Reddy A.N., Ananthasuresh G.K. On computing the forces from the noisy displacement data of an elastic body. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2008. V. 76. № 11. Pp. 1645–1677.
42. Yanchevskii I.V. K probleme vosstanovleniya vremennoi zavisimosti nestatsionarnogo vozdeistviya, prilozhennogo k upругo-deformiruемому elementu konstruktsii [Restoration of temporary dependence of non-stationary disturbance applied to elastically deformed structural element]. *Problemy mashinostroeniya*. 2015. V. 18. No. 2. Pp. 43–54.
43. Jang T.S., Han S.L. Numerical experiments on determination of spatially concentrated time-varying loads on a beam: an iterative regularization method. *The Journal of Mechanical Science and Technology*. 2009. V. 23. No. 10. Pp. 2722–2729.
44. Wang B.T., Chiu C.H. Determination of unknown impact force acting on a simply supported beam. *Mechanical System and Signal Processing*. 2003. V. 17. No 3. Pp. 683–704.

#### Сведения об авторах

Перельмутер Анатолий Викторович, докт. техн. наук, НПО SCAD Soft, 03037, Украина, г. Киев, ул. Освиты, 3а, AnatolyPerelmutter@gmail.com

#### Authors Details

Anatoly V. Perelmutter, DSc, SCAD Soft, 3-a, Prosveshcheniya Str., 03037, Kiev, Ukraine, AnatolyPerelmutter@gmail.com