

СТРОИТЕЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ, ЗДАНИЯ И СООРУЖЕНИЯ

УДК 624.04

DOI: 10.31675/1607-1859-2020-22-1-75-91

Л.С. ЛЯХОВИЧ¹, П.А. АКИМОВ^{1,2}, Б.А. ТУХФАТУЛЛИН¹,

¹Томский государственный архитектурно-строительный университет,

²Российская академия архитектуры и строительных наук

КРИТЕРИЙ ОЦЕНКИ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ПРИ ФОРМИРОВАНИИ КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫХ УЧАСТКОВ СТЕРЖНЕЙ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ ПО УСТОЙЧИВОСТИ ИЛИ НА ВЕЛИЧИНУ ПЕРВОЙ ЧАСТОТЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

В опубликованных работах авторов были рассмотрены некоторые особые свойства соответствующих оптимальных систем и сформулированы критерии, позволяющие адекватно оценить близость оптимальных решений к минимально материалоемкому. В частности, были представлены такого рода критерии для стержней с прямоугольным поперечным сечением при заданных ограничениях по устойчивости или на величину первой частоты собственных колебаний. Указанные критерии можно использовать при решении задачи оптимизации, когда поперечные сечения стержня непрерывно изменяются по его длине. Определяемые таким образом оптимальные решения могут рассматриваться как идеализированный объект в смысле предельного. Данная функция оптимального проекта дает возможность оценивать реальное конструкторское решение на основе критерия его близости к предельному (например, по материалоемкости). Такого рода оптимальный проект также может использоваться и как определенный ориентир при реальном проектировании, например, в рамках поэтапного процесса перехода от идеального объекта к реальному. Следует отметить, что при этом на каждом этапе имеется возможность оценить изменения показателя оптимальности объекта по сравнению с начальным и с идеализированным решениями. В частности, один из вариантов соответствующего процесса предусматривает замену непрерывного изменения размеров поперечных сечений стержня по его длине соответствующими кусочно-постоянными участками. Границы этих участков могут выбираться на основе идеального объекта, а размеры поперечных сечений определяться с использованием одного из методов оптимизации. В настоящей статье представлены критерии, дающие возможность достоверно и надежно оценить момент окончания процесса подобной оптимизации.

Ключевые слова: критерий; оптимизация; особые свойства; устойчивость; частота; критическая сила; формы потери устойчивости; формы собственных колебаний; приведенные напряжения.

Для цитирования: Ляхович Л.С., Акимов П.А., Тухфатуллин Б.А. Критерий оценки оптимальных решений при формировании кусочно-постоянных участ-

ков стержней прямоугольного поперечного сечения при ограничениях по устойчивости или на величину первой частоты собственных колебаний // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. 2020. Т. 22. № 1. С. 75–91.

DOI: 10.31675/1607-1859-2020-22-1-75-91

L.S. LYAKHOVICH¹, P.A. AKIMOV^{1,2}, B.A. TUKHFATULLIN¹,

¹Tomsk State University of Architecture and Building,

²Russian Academy of Architecture and Construction Sciences

ASSESSMENT CRITERION FOR OPTIMUM DESIGN SOLUTIONS OF PIECEWISE CONSTANT SECTIONS IN RODS OF RECTANGULAR CROSS-SECTION WITH STABILITY OR FIRST EIGEN-FREQUENCY LIMITS

Specific properties of optimum systems have been already considered in previous research. Moreover, the criteria were proposed for a correct assessment of proximity of optimum to minimum material consumption. In particular, the criteria are proposed for rods of rectangular cross-section with stability or first eigen-frequency limits. These criteria can be used for problem optimization, when the rod cross-sections continuously change longitudinally. The obtained optimum solutions can be considered as a perfect limited object. This optimum project function allows researcher to assess the real design solution using the proximity limit criterion (for example, material consumption limit). This kind of optimum design can also be used as a guideline for real design in terms of a stage-by-stage process of transition from a perfect to real object. In this case, it is possible to assess changes in the object optimality at each stage as compared to the initial and idealized solutions. In particular, one of the variants of the process includes replacing the rod with continuous longitudinally varying cross-sections by a rod with piecewise constant sections. The section boundaries can be based on a perfect object, and cross-sections can be determined by one of the optimization methods. This paper presents criteria, which ensure the reliable definition of the time of completion of the optimization process.

Keywords: criterion; optimization; specific properties; stability; frequency; critical force; buckling; eigen-frequency; reduced stresses.

For citation: Lyakyjvich L.S., Akimov P.A., Tukhfatullin B.A. Kriterij ocenki optimal'nyh reshenij pri formirovanii kusochno-postoyannyh uchastkov sterzhnej pryamougol'nogo poperechnogo secheniya pri ogranicheniah po ustojchivosti ili velichiny pervoj chastoty sobstvnyh kolebanij [Assessment criterion for optimum design solutions of piecewise constant sections in rods of rectangular cross-section with stability or first eigen-frequency limits]. Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta – Journal of Construction and Architecture. 2020. V. 22. No. 1. Pp. 75–91.

DOI: 10.31675/1607-1859-2020-22-1-75-91

В работах по минимизации веса конструкций [1–7], в частности стержней при различных ограничениях, начиная с публикаций Лагранжа [8], Т. Клаузена [9], Е.Л. Николаи [10] и других, формулировались особые свойства оптимальных конструкций [11, 12]. Так, в работе [13] были сформулированы критерии, позволяющие оценивать близость решений по оптимизации стержней прямоугольного поперечного сечения к минимально материалоемкому проекту при ограничениях по устойчивости или на величину первой ча-

стоты собственных колебаний. Полученные критерии применимы для случая, когда параметры сечений изменяются непрерывно по длине стержня. Несмотря на то что такой оптимальный проект в подавляющем большинстве случаев в прямом виде не реализуется, он, являясь предельным, например, по минимальной материалоемкости, позволяет оценивать принятое конструкторское решение. Кроме того, предельный проект может использоваться как начальная стадия процесса поэтапного движения от идеального объекта к технологически приемлемому проектному решению [13, 14]. В частности, такой процесс может состоять в замене непрерывного изменения размеров поперечных сечений стержня по его длине на кусочно-постоянное. Для этого по длине стержня намечаются участки, в каждом из которых размеры поперечных сечений не меняются. Выбор границ таких участков определяется как технологическими требованиями, так и стремлением приблизиться к минимально материалоемкому решению. После выбора границ участков размеры поперечных сечений определяются на каждом участке одним из методов оптимизации.

В большинстве методов оптимизации за критерий завершения процесса принимается состояние, при котором на очередном шаге соответствующего поиска изменение функции цели оказывается меньше некоторой заранее выбранной малой величины. Однако известны случаи, когда при малом изменении на соседних шагах функции цели координаты точки оптимума заметно изменяются. Очевидно, что наличие критерия, более объективно оценивающего близость решения к оптимуму, повысит уверенность в полученном результате. Такие критерии были сформулированы в работе [13] для оптимизации стержней прямоугольного поперечного сечения при ограничениях по устойчивости или на величину первой частоты собственных колебаний, когда параметры сечений изменяются непрерывно по длине стержня. Эти критерии позволяют оценивать близость полученного решения к минимально материалоемкому проекту. В настоящей статье предлагаются аналогичные критерии для некоторых случаев проектирования стержней наименьшего веса с прямоугольными кусочно-постоянно изменяющимися по длине стержня поперечными сечениями при ограничениях по устойчивости или на величину первой частоты собственных колебаний.

Рассмотрим вывод такого критерия. Заметим, что при этом достаточно сформулировать критерий с ограничением величины первой частоты собственных колебаний, но с учетом влияния продольной силы. Такой критерий может использоваться и тогда, когда вводится только ограничение по устойчивости. В этом случае в выражении критерия значение собственной частоты полагается нулевым. Обозначения размеров поперечного сечения рассматриваемого стержня приведено на рис. 1. Рассматриваются прямолинейные стержни (в том числе и многопролетные) [15–19], несущие массу и нагруженные продольной силой. Стержень разделяется на участки, в пределах каждого из которых

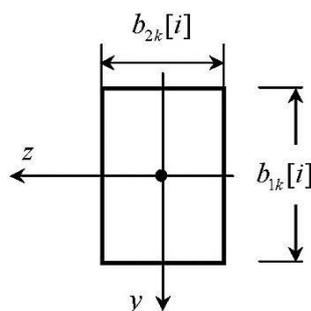


Рис. 1. Обозначения размеров поперечного сечения рассматриваемого стержня

размеры сечений не меняются. Обозначения длин участков и координат их границ приведены на рис. 2.

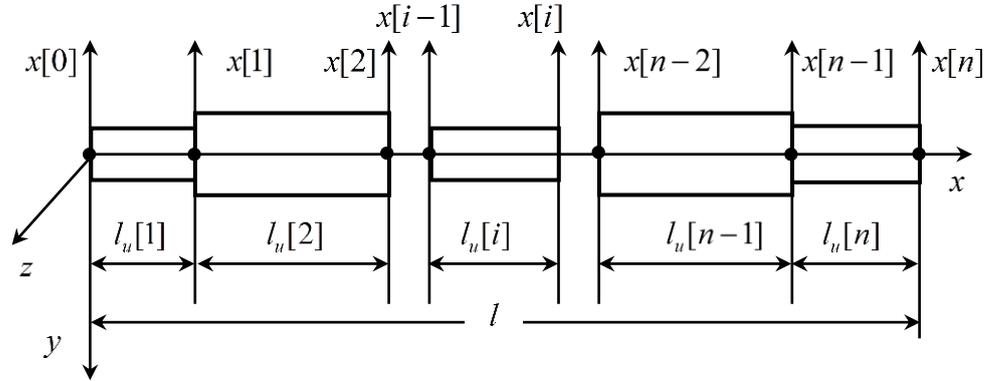


Рис. 2. Обозначения длин участков и координат их границ рассматриваемого стержня

Пусть требуется определить размеры поперечных сечений стержня $b_{1k}[i]$ и $b_{2k}[i]$ ($i=1, 2, \dots, n$), но при условии, чтобы первые частоты в главных плоскостях инерции ($\omega_1[1]$ и $\omega_2[1]$) не были бы меньше заданного значения (ω_0) и чтобы при выбранных границах участков стержня и ограничениях его объём был бы минимальным.

Функция цели (объём материала стержня) запишется в следующем виде:

$$V_0 = \sum_1^n b_{1k}[i] \cdot b_{2k}[i] \cdot l_u[i]. \quad (1)$$

Ограничения на величину нижней частоты собственных колебаний

$$\omega_0 \leq \omega_1[1], \quad \omega_0 \leq \omega_2[1]$$

с учетом колебаний в двух главных плоскостях инерции поперечного сечения стержня запишется в виде

$$\omega_0 = \omega_1[1] = \omega_2[1]. \quad (2)$$

Известно, что если $\omega_1[1]$ и $\omega_2[1]$ будут первыми частотами собственных колебаний в главных плоскостях инерции, то энергетические функционалы при непрерывном изменении поперечных сечений должны принимать нулевые значения, т. е.

$$\mathfrak{E}_{\omega_1} = \frac{1}{2} \int_0^l \{EI_1(x)(v''_{\omega})^2 - P(x)(v'_{\omega})^2 - \omega^2[m(x) + \rho \cdot F(x)]v_{\omega}^2\} dx = 0; \quad (3)$$

$$\mathfrak{E}_{\omega_2} = \frac{1}{2} \int_0^l \{EI_2(x)(w''_{\omega})^2 - P(x)(w'_{\omega})^2 - \omega^2[m(x) + \rho \cdot F(x)]w_{\omega}^2\} dx = 0, \quad (4)$$

где E – модуль упругости материала стержня; $I_1(x)$, $I_2(x)$ – соответственно моменты инерции поперечных сечений стержня в главных плоскостях инер-

ции; v_ω , w_ω – координаты форм собственных колебаний в главных плоскостях инерции; ρ – удельная масса материала стержня; $b_1(x)$, $b_2(x)$ – размеры поперечного сечения стержня; $F(x) = b_1(x)b_2(x)$ – площадь поперечного сечения стержня.

При кусочно-постоянном изменении поперечных сечений требования (3) и (4) с учетом ограничения (2) приобретают вид

$$\Theta_{\omega 1} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{x^{[i-1]}}^{x^{[i]}} \{EI_1[i](v_\omega'')^2 - P[i](v_\omega')^2 - (\omega[1])^2[m(x) + \rho \cdot F[i]v_\omega^2]\} dx = 0; \quad (5)$$

$$\Theta_{\omega 2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{x^{[i-1]}}^{x^{[i]}} \{EI_2[i](w_\omega'')^2 - P[i](w_\omega')^2 - (\omega[2])^2[m(x) + \rho \cdot F[i]w_\omega^2]\} dx = 0, \quad (6)$$

где $I_1[i]$, $I_2[i]$ – моменты инерции поперечных сечений стержня в главных плоскостях инерции; $b_{1k}[i]$, $b_{2k}[i]$ – размеры поперечного сечения стержня; $F[i] = b_{1k}[i]b_{2k}[i]$ – площадь поперечного сечения стержня.

Итак, требуется отыскать значения $b_{1k}[i]$, $b_{2k}[i]$, которые придадут функции (1) минимальное значение при выполнении условий (5), (6).

Таким образом, мы имеем параметрическую задачу.

Выражение, экстремум которого обеспечит минимум функции (1) и выполнение условий (5), (6), запишется в виде

$$\begin{aligned} V_{0\omega} = & \sum_{i=1}^n b_{1k}[i]b_{2k}[i]l_u[i] - \sum_{i=1}^n \int_{x^{[i-1]}}^{x^{[i]}} \{ \lambda_{\omega 1} [E \frac{b_{1k}^3[i] \cdot b_{2k}[i]}{12} (v_\omega'')^2 - \\ & - P[i](v_\omega')^2 - (\omega[1])^2(m(x) + \rho \cdot b_{1k}[i]b_{2k}[i])v_\omega^2] - \\ & - \lambda_{\omega 2} [E \frac{b_{1k}[i]b_{2k}^3[i]}{12} (w_\omega'')^2 - P(i)(w_\omega')^2 - \\ & - (\omega[2])^2(m(x) + \rho \cdot b_{1k}[i]b_{2k}[i])w_\omega^2] \} dx, \quad (7) \end{aligned}$$

где $\lambda_{\omega 1}$ и $\lambda_{\omega 2}$ – произвольные множители (в рассматриваемой параметрической задаче множители $\lambda_{\omega 1}$ и $\lambda_{\omega 2}$ – постоянные величины).

Очевидно, что вариации выражения (7) по $\lambda_{\omega 1}$ и $\lambda_{\omega 2}$ приведут к выполнению условий (5) и (6), а следовательно, и ограничения (2).

Для отыскания минимума выражения (7) при условиях (5), (6) запишем систему уравнений

$$\frac{\partial V_{0\omega}}{\partial b_{1k}[i]} = 0; \quad \frac{\partial V_{0\omega}}{\partial b_{2k}[i]} = 0, \quad \dots \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Запишем i -ю пару уравнений:

$$\frac{\partial V_{0\omega}}{\partial b_{1k}[i]} = b_{2k}[i]l_u[i] - \int_{x^{[i-1]}}^{x^{[i]}} \lambda_{\omega 1} [E \frac{b_{1k}^2[i]b_{2k}[i]}{4} (v_\omega'')^2 -$$

$$\begin{aligned}
& - \{(\omega_1[1])^2 \rho \cdot b_{2k}[i] v_\omega^2\} - \lambda_{\omega_2} [E \frac{b_{2k}^3[i]}{12} (w_\omega'')^2 - (\omega_2[1])^2 \rho \cdot b_{2k}[i] w_\omega^2] dx = 0; \\
& \frac{\partial V_{0\omega}}{\partial b_{2k}[i]} = b_{1k}[i] l_u[i] - \int_{x^{[i-1]}}^{x^{[i]}} \{ \lambda_{\omega_1} [E \frac{b_{1k}^3[i]}{12} (v_\omega'')^2 - \\
& - (\omega_1[1])^2 \rho \cdot b_{1k}[i] v_\omega^2] - \lambda_{\omega_2} [E \frac{b_{1k}[i] b_{2k}^2[i]}{4} (w_\omega'')^2 - (\omega_2[1])^2 \rho \cdot b_{1k}[i] w_\omega^2] dx = 0.
\end{aligned}$$

Разделив все члены первого уравнения на $b_{2k}[i]$, а второго на $b_{1k}[i]$ и выполнив простые преобразования, получим

$$\begin{aligned}
& \int_{x^{[i-1]}}^{x^{[i]}} \{ \lambda_{\omega_1} [E \frac{b_{1k}^2[i]}{4} (v_\omega'')^2 - (\omega_1[1])^2 \rho \cdot v_\omega^2] + \lambda_{\omega_2} [E \frac{b_{2k}^2[i]}{12} (w_\omega'')^2 - \\
& - (\omega_2[1])^2 \rho \cdot w_\omega^2] \} dx = l_u[i]; \\
& \int_{x^{[i-1]}}^{x^{[i]}} \{ \lambda_{\omega_1} [E \frac{b_{1k}^2[i]}{12} (v_\omega'')^2 - (\omega_1[1])^2 \rho \cdot v_\omega^2] + \lambda_{\omega_2} [E \frac{b_{2k}^2[i]}{4} (w_\omega'')^2 - \\
& - (\omega_2[1])^2 \rho \cdot w_\omega^2] \} dx = l_u[i].
\end{aligned}$$

Умножив все члены полученных уравнений на E и учитывая, что

$$\sigma_1(x) = E \cdot b_1(x)(v_\omega'') / 2, \quad \sigma_2(x) = E \cdot b_2(x)(w_\omega'') / 2, \quad (8)$$

можем переписать уравнения в виде

$$\begin{aligned}
& \int_{x^{[i-1]}}^{x^{[i]}} \{ \lambda_{\omega_1} [\sigma_{1\omega}^2(x) - (\omega_1[1])^2 E \cdot \rho \cdot v_\omega^2] + \lambda_{\omega_2} [\frac{1}{3} \sigma_{2\omega}^2(x) - \\
& - (\omega_2[1])^2 E \cdot \rho \cdot w_\omega^2] \} dx = l_u[i] E; \\
& \int_{x^{[i-1]}}^{x^{[i]}} \{ \lambda_{\omega_1} [\frac{1}{3} \sigma_{1\omega}^2(x) - (\omega_1[1])^2 E \cdot \rho \cdot v_\omega^2] + \lambda_{\omega_2} [\sigma_{2\omega}^2(x) - \\
& - (\omega_2[1])^2 E \cdot \rho \cdot w_\omega^2] \} dx = l_u[i] E,
\end{aligned} \quad (9)$$

где $\sigma_{1\omega}(x)$ и $\sigma_{2\omega}(x)$ – нормальные напряжения в крайних волокнах стержня от изгибающих моментов, возникающих при собственных колебаниях в главных плоскостях инерции (эти напряжения, так же, как и перемещения v_ω и w_ω , определены с точностью до постоянного множителя).

Взяв разность уравнений (9), получим

$$\frac{2}{3} \lambda_{\omega_1} \int_{x^{[i-1]}}^{x^{[i]}} \sigma_{1\omega}^2(x) dx - \frac{2}{3} \lambda_{\omega_2} \int_{x^{[i-1]}}^{x^{[i]}} \sigma_{2\omega}^2(x) dx = 0. \quad (10)$$

Из (10) следует

$$\lambda_{\omega_1} \int_{x^{[i-1]}}^{x^{[i]}} \sigma_{1\omega}^2(x) dx = \lambda_{\omega_2} \int_{x^{[i-1]}}^{x^{[i]}} \sigma_{2\omega}^2(x) dx. \quad (11)$$

В свою очередь, из (11) следует

$$\lambda_{\omega 1} = \lambda_{\omega 2} \int_{x^{[i-1]}}^{x^{[i]}} \sigma_{2\omega}^2 dx \left(\int_{x^{[i-1]}}^{x^{[i]}} \sigma_{1\omega}^2 dx \right)^{-1}; \quad \lambda_{\omega 2} = \lambda_{\omega 1} \int_{x^{[i-1]}}^{x^{[i]}} \sigma_{1\omega}^2 dx \left(\int_{x^{[i-1]}}^{x^{[i]}} \sigma_{2\omega}^2 dx \right)^{-1}. \quad (12)$$

На основе (11) и (12) уравнения (9) запишутся в виде

$$\begin{aligned} & \int_{x^{[i-1]}}^{x^{[i]}} \{ \lambda_{\omega 1} [\sigma_{1\omega}^2(x) dx - (\omega 1[1])^2 E \cdot \rho \cdot v_{\omega}^2] + \lambda_{\omega 2} \frac{1}{3} \sigma_{2\omega}^2(x) - \\ & \quad - \lambda_{\omega 2} (\omega 2[1])^2 E \cdot \rho \cdot w_{\omega}^2 \} dx = l_u[i]E; \\ & \int_{x^{[i-1]}}^{x^{[i]}} \{ \lambda_{\omega 1} [\frac{1}{3} \sigma_{1\omega}^2(x) - (\omega 1[1])^2 E \cdot \rho \cdot v_{\omega}^2] + \lambda_{\omega 2} \cdot \sigma_{2\omega}^2(x) - \\ & \quad - \lambda_{\omega 2} (\omega 2[1])^2 E \cdot \rho \cdot w_{\omega}^2 \} dx = l_u[i]E; \end{aligned}$$

или, преобразовывая, можем последовательно записать:

$$\begin{aligned} & \lambda_{\omega 1} \int_{x^{[i-1]}}^{x^{[i]}} [\sigma_{1\omega}^2(x) dx - (\omega 1[1])^2 E \cdot \rho \cdot v_{\omega}^2] dx + \\ & + \frac{1}{3} \lambda_{\omega 1} \int_{x^{[i-1]}}^{x^{[i]}} \sigma_{1\omega}^2 dx \left(\int_{x^{[i-1]}}^{x^{[i]}} \sigma_{2\omega}^2 dx \right)^{-1} \int_{x^{[i-1]}}^{x^{[i]}} \sigma_{2\omega}^2(x) dx - \\ & - \lambda_{\omega 1} \int_{x^{[i-1]}}^{x^{[i]}} \int_{x^{[i-1]}}^{x^{[i]}} \sigma_{1\omega}^2 dx \left(\int_{x^{[i-1]}}^{x^{[i]}} \sigma_{2\omega}^2 dx \right)^{-1} (\omega 2[1])^2 E \cdot \rho \cdot w_{\omega}^2 dx = l_u[i]E; \\ & \frac{1}{3} \lambda_{\omega 2} \int_{x^{[i-1]}}^{x^{[i]}} \sigma_{2\omega}^2 dx \left(\int_{x^{[i-1]}}^{x^{[i]}} \sigma_{1\omega}^2 dx \right)^{-1} \int_{x^{[i-1]}}^{x^{[i]}} \sigma_{1\omega}^2(x) dx - \int_{x^{[i-1]}}^{x^{[i]}} \lambda_{\omega 1} (\omega 1[1])^2 E \cdot \rho \cdot v_{\omega}^2 dx + \\ & + \lambda_{\omega 2} \int_{x^{[i-1]}}^{x^{[i]}} [\sigma_{2\omega}^2(x) - (\omega 2[1])^2 E \cdot \rho \cdot w_{\omega}^2] dx = l_u[i]E; \\ & \lambda_{\omega 1} \int_{x^{[i-1]}}^{x^{[i]}} \{ \frac{4}{3} \sigma_{1\omega}^2(x) - (\omega 1[1])^2 E \cdot \rho \cdot v_{\omega}^2 - \\ & - \int_{x^{[i-1]}}^{x^{[i]}} \sigma_{1\omega}^2 dx \left(\int_{x^{[i-1]}}^{x^{[i]}} \sigma_{2\omega}^2 dx \right)^{-1} (\omega 2[1])^2 E \cdot \rho \cdot w_{\omega}^2 \} dx = l_u[i]E; \\ & \lambda_{\omega 2} \int_{x^{[i-1]}}^{x^{[i]}} \{ \frac{4}{3} \sigma_{2\omega}^2(x) - \int_{x^{[i-1]}}^{x^{[i]}} \sigma_{2\omega}^2 dx \left(\int_{x^{[i-1]}}^{x^{[i]}} \sigma_{1\omega}^2 dx \right)^{-1} \times \\ & \quad \times (\omega 1[1])^2 E \cdot \rho \cdot v_{\omega}^2 - (\omega 2[1])^2 E \cdot \rho \cdot w_{\omega}^2 \} dx = l_u[i]E. \end{aligned} \quad (13)$$

Так как $\lambda_{\omega_1}, \lambda_{\omega_2}, E$ постоянные величины, перепишем (13) в виде

$$\frac{1}{l_u[i]} \int_{x[i-1]}^{x[i]} \left\{ \frac{4}{3} \sigma_{1\omega}^2(x) - (\omega_1[1])^2 E \cdot \rho \cdot v_\omega^2 - \int_{x[i-1]}^{x[i]} \sigma_{1\omega}^2 dx \left(\int_{x[i-1]}^{x[i]} \sigma_{2\omega}^2 dx \right)^{-1} \right\} (\omega_2[1])^2 E \cdot \rho \cdot w_\omega^2 dx = E = \text{const}; \quad (14)$$

$$\frac{1}{l_u[i]} \int_{x[i-1]}^{x[i]} \left\{ \frac{4}{3} \sigma_{2\omega}^2(x) - \int_{x[i-1]}^{x[i]} \sigma_{2\omega}^2 dx \left(\int_{x[i-1]}^{x[i]} \sigma_{1\omega}^2 dx \right)^{-1} \right\} \times (\omega_1[1])^2 E \cdot \rho \cdot v_\omega^2 - (\omega_2[1])^2 E \cdot \rho \cdot w_\omega^2 dx = E = \text{const}$$

или, подставив $\omega_0 = \omega_1[1] = \omega_2[1]$ и поделив на $4/3$, получим

$$\frac{1}{l_u[i]} \int_{x[i-1]}^{x[i]} \left[\sigma_{1\omega}^2(x) - \frac{3}{4} (\omega_0)^2 E \cdot \rho (v_\omega^2 + \int_{x[i-1]}^{x[i]} \sigma_{1\omega}^2 dx \left(\int_{x[i-1]}^{x[i]} \sigma_{2\omega}^2 dx \right)^{-1} w_\omega^2) \right] dx = \text{const}; \quad (15)$$

$$\frac{1}{l_u[i]} \int_{x[i-1]}^{x[i]} \left[\sigma_{2\omega}^2(x) - \frac{3}{4} (\omega_0)^2 E \cdot \rho \left(\int_{x[i-1]}^{x[i]} \sigma_{1\omega}^2 dx \left(\int_{x[i-1]}^{x[i]} \sigma_{2\omega}^2 dx \right)^{-1} v_\omega^2 + w_\omega^2 \right) \right] dx = \text{const}.$$

Если граничные условия в главных плоскостях инерции одинаковы, то $v_\omega = w_\omega$, $\sigma_{1\omega} = \sigma_{2\omega}$ и (15) принимают вид

$$\frac{1}{l_u[i]} \int_{x[i-1]}^{x[i]} \left[\sigma_{1\omega}^2(x) - \frac{3}{2} (\omega_0)^2 E \cdot \rho \cdot v_\omega^2 \right] dx = \text{const}; \quad (16)$$

$$\frac{1}{l_u[i]} \int_{x[i-1]}^{x[i]} \left[\sigma_{2\omega}^2(x) - \frac{3}{2} (\omega_0)^2 E \cdot \rho \cdot w_\omega^2 \right] dx = \text{const}.$$

Обозначим

$$S_1[i] = \frac{1}{l_u[i]} \int_{x[i-1]}^{x[i]} \left[\sigma_{1\omega}^2(x) - \frac{3}{4} (\omega_0)^2 E \cdot \rho (v_\omega^2 + \int_{x[i-1]}^{x[i]} \sigma_{1\omega}^2 dx \left(\int_{x[i-1]}^{x[i]} \sigma_{2\omega}^2 dx \right)^{-1} w_\omega^2) \right] dx;$$

$$S_2[i] = \frac{1}{l_u[i]} \int_{x[i-1]}^{x[i]} \left[\sigma_{2\omega}^2(x) - \frac{3}{4} (\omega_0)^2 E \cdot \rho \left(\int_{x[i-1]}^{x[i]} \sigma_{1\omega}^2 dx \left(\int_{x[i-1]}^{x[i]} \sigma_{2\omega}^2 dx \right)^{-1} v_\omega^2 + w_\omega^2 \right) \right] dx.$$

Таким образом, (15) запишется в виде

$$S_1[i] = \frac{1}{l_u[i]} \int_{x[i-1]}^{x[i]} \left[\sigma_{1\omega}^2(x) - \frac{3}{4} (\omega_0)^2 E \cdot \rho \times \left(v_\omega^2 + \int_{x[i-1]}^{x[i]} \sigma_{1\omega}^2 dx \left(\int_{x[i-1]}^{x[i]} \sigma_{2\omega}^2 dx \right)^{-1} w_\omega^2 \right) \right] dx = \text{const};$$

$$S_2[i] = \frac{1}{l_u[i]} \int_{x[i-1]}^{x[i]} [\sigma_{2\omega}^2(x) - \frac{3}{4}(\omega_0)^2 E \cdot \rho \times$$

$$\times \left(\int_{x[i-1]}^{x[i]} \sigma_{1\omega}^2 dx \left(\int_{x[i-1]}^{x[i]} \sigma_{2\omega}^2 dx \right)^{-1} v_\omega^2 + w_\omega^2 \right) dx = \text{const}, \quad (17)$$

а (16) в виде

$$S_1[i] = \frac{1}{l_u[i]} \int_{x[i-1]}^{x[i]} [\sigma_{1\omega}^2(x) - \frac{3}{2}(\omega_0)^2 E \cdot \rho \cdot v_\omega^2] dx = \text{const}; \quad (18)$$

$$S_2[i] = \frac{1}{l_u[i]} \int_{x[i-1]}^{x[i]} [\sigma_{2\omega}^2(x) - \frac{3}{2}(\omega_0)^2 E \cdot \rho \cdot w_\omega^2] dx = \text{const}.$$

Оба уравнения (16) становятся идентичными. Тем не менее для построения алгоритмов реализации критерия (16) сохранение двух уравнений целесообразно.

Если собственные колебания рассматриваются только в одной из главных плоскостей инерции, то на основе (9) критерии представляются в виде

$$S_1[i] = \frac{1}{l_u[i]} \int_{x[i-1]}^{x[i]} [\sigma_{1\omega}^2(x) - (\omega_0)^2 E \cdot \rho \cdot v_\omega^2] dx = \text{const}; \quad (19)$$

$$S_2[i] = \frac{1}{l_u[i]} \int_{x[i-1]}^{x[i]} [\sigma_{2\omega}^2(x) - (\omega_0)^2 E \cdot \rho \cdot w_\omega^2] dx = \text{const}.$$

Значения $S_1[i]$ и $S_2[i]$ целесообразно нормировать. Один из вариантов нормирования, например $S_1[i]$ ($i=1, 2, \dots, n$), сводится к выбору в этом ряду наибольшего значения и деления на него всех членов ряда. Таким образом, в ряду не будет величин, больших единицы. Близость решения к оптимуму будет оцениваться по близости значений $S_1[i]$ к единице. Аналогично нормируется и ряд $S_2[i]$.

Сравним критерии (17) – (19), полученные при кусочно-постоянном изменении прямоугольных поперечных сечений с аналогичными критериями при непрерывном их изменении. Эти критерии получены в работе [13] и имеют вид

$$\sigma_{1\omega}^2(x) - \frac{3}{4} E \cdot \rho (\omega_0 \cdot k_\omega)^2 (v_\omega^2 + \frac{\sigma_{1\omega}^2}{\sigma_{2\omega}^2} w_\omega^2) = \text{const}; \quad (20)$$

$$\sigma_{2\omega}^2(x) - \frac{3}{4} E \cdot \rho (\omega_0 \cdot k_\omega)^2 (\frac{\sigma_{2\omega}^2}{\sigma_{1\omega}^2} v_\omega^2 + w_\omega^2) = \text{const}$$

или

$$\bar{\sigma}_{1\omega} = \sqrt{\sigma_{1\omega}^2(x) - \frac{3}{4} E \cdot \rho (\omega_0 \cdot k_\omega)^2 (v_\omega^2 + \frac{\sigma_{1\omega}^2}{\sigma_{2\omega}^2} w_\omega^2)} = \text{const};$$

$$\bar{\sigma}_{2\omega} = \sqrt{\sigma_{2\omega}^2(x) - \frac{3}{4} E \cdot \rho (\omega_0 \cdot k_\omega)^2 \left(\frac{\sigma_{2\omega}^2}{\sigma_{1\omega}^2} v_\omega^2 + w_\omega^2 \right)} = \text{const.} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{1\omega}^2(x) - \frac{3}{2} (\omega_0 \cdot k_\omega)^2 E \cdot \rho \cdot v_\omega^2 &= \text{const}; \\ \sigma_{2\omega}^2(x) - \frac{3}{2} (\omega_0 \cdot k_\omega)^2 E \cdot \rho \cdot w_\omega^2 &= \text{const} \end{aligned} \quad (22)$$

или

$$\bar{\sigma}_{1\omega} = \sqrt{\sigma_{1\omega}^2(x) - \frac{3}{2} (\omega_0 \cdot k_\omega)^2 E \cdot \rho \cdot v_\omega^2} = \text{const}; \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{2\omega} &= \sqrt{\sigma_{2\omega}^2(x) - \frac{3}{2} (\omega_0 \cdot k_\omega)^2 E \cdot \rho \cdot w_\omega^2} = \text{const.} \\ \sigma_{1\omega}^2(x) - (\omega_0 \cdot k_\omega)^2 E \cdot \rho \cdot v_\omega^2 &= \text{const}; \\ \sigma_{2\omega}^2(x) - (\omega_0 \cdot k_\omega)^2 E \cdot \rho \cdot w_\omega^2 &= \text{const.} \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{1\omega} &= \sqrt{\sigma_{1\omega}^2(x) - (\omega_0 \cdot k_\omega)^2 E \cdot \rho \cdot v_\omega^2} = \text{const}; \\ \bar{\sigma}_{2\omega} &= \sqrt{\sigma_{2\omega}^2(x) - (\omega_0 \cdot k_\omega)^2 E \cdot \rho \cdot w_\omega^2} = \text{const.} \end{aligned} \quad (25)$$

Каждый из критериев представлен в двух вариантах. Вторые варианты представления критериев необязательны. Они были представлены лишь для того, чтобы подчеркнуть их связь с ранее сформулированными критериями (например, в [10]), где признаком оптимальности при ограничениях по устойчивости служило постоянство напряжений в крайних волокнах стержня от изгибающих моментов, возникающих при потере устойчивости.

Использование вторых вариантов критериев при ограничениях на величину низшей частоты собственных колебаний для оценки процесса оптимизации на начальных стадиях поиска может привести к отрицательным значениям подкоренных выражений. Поэтому для избегания сбоев вычислительного процесса следует использовать первые варианты представления критериев.

Как отмечалось выше, сформулированные критерии могут использоваться и тогда, когда вводится только ограничение по устойчивости. В этом случае в выражениях критериев значение собственной частоты полагается нулевым.

Сравнение критериев (17) – (19), полученных при кусочно-постоянном изменении прямоугольных поперечных сечений, с аналогичными критериями при непрерывном их изменении (20), (22) и (24), показывает, что под интегралами в (18) и (19) стоят соответственно выражения (22) и (24), а в (17) модифицированное выражение (20). Критерии $S_1[i]$ и $S_2[i]$ содержат множитель $1/L_u[i]$. Поэтому критерии (18) и (19) могут рассматриваться на каждом кусочно-постоянном участке как среднее значение соответственно критериев (21) и (22) на единицу длины участка, аналогично рассматривается и критерий (17) на основе модифицированного критерия (20). Если использовать отме-

ченную взаимосвязь критериев для определения значений $S_1[i]$ и $S_2[i]$, то затем также целесообразно выполнять нормирование этих величин для оценки их близости к единице.

Пример 1. Рассмотрим прямолинейный консольный стержень пролетом $l = 6$ м прямоугольного сечения, нагруженный продольной силой $P = 300000$ Н и несущий распределенную массу интенсивностью $m(x) = 75$ кг/м. При переходе к дискретной модели из 25 участков узловая масса составит 18 кг. Удельная масса $\rho = 2400$ кг/м³. Заданная величина первой круговой собственной частоты $\omega_0 = 20$ с⁻¹, модуль упругости материала стержня $E = 24000$ МПа (рис. 3, а) [15, 20].

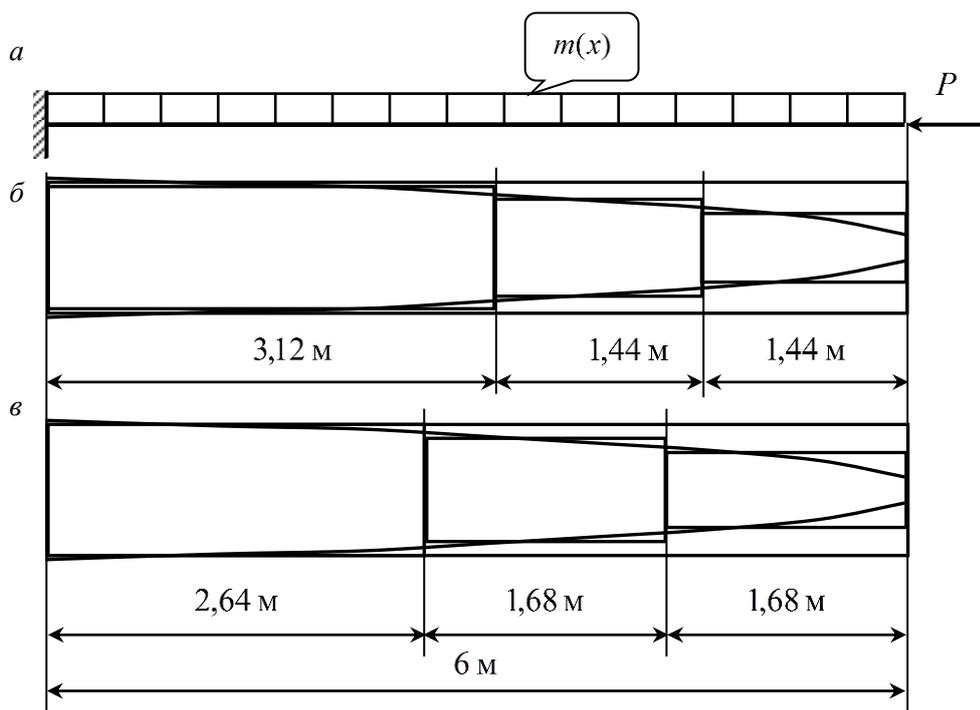


Рис. 3. К примеру 1

Так как граничные условия в обеих главных плоскостях инерции одинаковы, при оптимизации сечения должны оказаться квадратными.

Рассмотрим вначале использование критерия (22) для оценки этапов оптимизации [8–14, 20, 21] для случая, когда сечения изменяются непрерывно. Оптимизацию выполним методом случайного поиска. За начальное приближение принят стержень постоянного по длине сечения при соотношении $b_1^0[i]/b_2^0[i] = 1/1$. Значения искомых параметров при первом выходе на границу области допустимых решений оказались равными $b_1^0[i] = b_2^0[i] = 0,3039$ м. При этом функция цели равна $V_0 = 0,5543$ м³. Результаты трех этапов поиска сведены в табл. 1.

Таблица 1

Сведения о ходе решения примера 1

№ п/п	Этапы оптимизации						
	Исходный	Первый $n = 1000$		Второй $n = 1500$		Третий $n > 2000$	
	$b_1^0[i], \text{ м}$	$b_1[i], \text{ м}$	$\sigma_{10}^2[i]$	$b_1[i], \text{ м}$	$\sigma_{10}^2[i]$	$b_1[i], \text{ м}$	$\sigma_{10}^2[i]$
1	2	3	4	5	6	7	8
1	0,3039	0,3072	0,8359	0,3065	0,8414	0,3076	0,9997
2	0,3039	0,3057	0,7926	0,3050	0,8019	0,3038	0,9996
3	0,3039	0,2983	0,8491	0,2986	0,8513	0,2998	0,9997
4	0,3039	0,2995	0,7622	0,2973	0,8012	0,2956	0,9996
5	0,3039	0,2917	0,8206	0,2886	0,8722	0,2912	0,9996
6	0,3039	0,2865	0,8249	0,2883	0,7992	0,2865	0,9996
7	0,3039	0,2815	0,8224	0,2867	0,7404	0,2815	0,9995
8	0,3039	0,2754	0,8447	0,2761	0,8280	0,2762	0,9997
9	0,3039	0,2723	0,7922	0,2693	0,8456	0,2706	0,9996
10	0,3039	0,2653	0,8185	0,2639	0,8354	0,2646	0,9995
11	0,3039	0,2599	0,7917	0,2562	0,8666	0,2582	0,9999
12	0,3039	0,2529	0,7966	0,2515	0,8218	0,2515	0,9997
13	0,3039	0,2425	0,8649	0,2403	0,9168	0,2442	0,9998
14	0,3039	0,2383	0,7819	0,2390	0,7693	0,2364	0,9998
15	0,3039	0,2238	0,9477	0,2265	0,8634	0,2281	0,9996
16	0,3039	0,2217	0,7673	0,2196	0,8155	0,2193	0,9998
17	0,3039	0,2071	0,9186	0,2112	0,7779	0,2097	0,9997
18	0,3039	0,1972	0,9097	0,2022	0,7275	0,1995	0,9996
19	0,3039	0,1885	0,8326	0,1898	0,7655	0,1885	0,9997
20	0,3039	0,1739	0,9330	0,1717	1,0000	0,1765	1,0000
21	0,3039	0,1598	1,0000	0,1636	0,7799	0,1634	0,9996
22	0,3039	0,1486	0,8121	0,1481	0,8078	0,1486	0,9994
23	0,3039	0,1328	0,6891	0,1320	0,7145	0,1315	0,9993
24	0,3039	0,1181	0,1642	0,1134	0,4544	0,1099	0,9988
25	0,3039	0,0964	-0,6147	0,0889	-0,3683	0,0761	0,9994
$V_0, \text{ м}^3$	0,5543	0,3397	–	0,3391	–	0,3384	–
%	0	38,71	–	38,83	–	38,95	–

Результаты первого этапа получены после $n = 1000$ попыток метода случайного поиска, второго – после $n = 1500$ попыток, третьего при $n > 2000$. Во втором столбце табл. 1 приведены значения размеров сечения при первом выходе на границу области допустимых решений $b_1^0[i] = b_2^0[i] = 0,3039$ м. В предпоследней строке таблицы приводятся величины функции цели V_0 на каждом из этапов, а в последней – ее снижение в процентах по сравнению с исходным. В столбцах 3, 5, 7 приведены размеры сечений, полученные на каждом из эта-

пов, а в столбцах 4, 6, 8 – значения критерия (22). Из таблицы видно, что значения функции цели по сравнению с первым этапом почти не снижаются. Отличия касаются лишь четвёртой значимой цифры. Разница в размерах некоторых сечений касается третьих значимых цифр. Однако значения критерия (22) на первом и втором этапах свидетельствуют, что процесс оптимизации не закончен.

Величины критерия (22) на третьем этапе близки к единице, что позволяет уверенно принимать решение об остановке процесса оптимизации на этом этапе.

Полученные результаты определяют стержень минимальной материалоемкости. Очертания изменения размеров сечений этого стержня ($b_1[i]$) показаны на рис. 3, б, в.

Если технологические требования не допускают такой закон изменения размеров сечений, но допускают кусочно-постоянное изменение сечений, то выбор границ таких участков определяется не только технологическими требованиями, но и стремлением приблизиться к минимально материалоемкому решению. Предположим, что технологические требования допускают проектирование стержня из трёх участков, в каждом из которых размеры поперечных сечений не меняются. Предположим, что еще дополнительно вводятся и ограничения на величину длин участков, например такие как $2,8\text{ м} \leq l_u[2] \leq 3,8\text{ м}$, $l_u[1] = l_u[3] = (l - l_u[2]) / 2$.

Рассмотрим два варианта границ участков. Варианты границ участков и соответствующие им размеры сечений, полученные оптимизацией, показаны на рис. 3, б, в и приведены в табл. 2.

Таблица 2

Сведения о вариантах решения примера 1

№ п/п	Вариант 1			Вариант 2		
	$b_{1k}[i]$, м	$\sigma_{10}^2[i]$	$S_1[i]$	$b_1[i]$, м	$\sigma_{10}^2[i]$	$S_1[i]$
1	2	3	4	5	6	7
1	0,2901	0,4123	0,9999	0,2956	0,3627	0,9999
2	0,2901	0,3811	0,9999	0,2956	0,3357	0,9999
3	0,2901	0,3502	0,9999	0,2956	0,3090	0,9999
4	0,2901	0,3198	0,9999	0,2956	0,2827	0,9999
5	0,2901	0,2900	0,9999	0,2956	0,2570	0,9999
6	0,2901	0,2609	0,9999	0,2956	0,2319	0,9999
7	0,2901	0,2327	0,9999	0,2956	0,2075	0,9999
8	0,2901	0,2053	0,9999	0,2956	0,1838	0,9999
9	0,2901	0,1790	0,9999	0,2956	0,1610	0,9999
10	0,2901	0,1536	0,9999	0,2956	0,1390	0,9999
11	0,2901	0,1293	0,9999	0,2956	0,1179	0,9999
12	0,2901	0,1060	0,9999	0,2346	0,4226	0,9998
13	0,2901	0,0837	0,9999	0,2346	0,3539	0,9998
14	0,2190	0,4363	1,0000	0,2346	0,2888	0,9998

Окончание табл. 2

№ п/п	Вариант 1			Вариант 2		
	$b_{1k}[i]$, м	$\sigma_{10}^2[i]$	$S_1[i]$	$b_1[i]$, м	$\sigma_{10}^2[i]$	$S_1[i]$
1	2	3	4	5	6	7
15	0,2190	0,3496	1,0000	0,2346	0,2275	0,9998
16	0,2190	0,2685	1,0000	0,2346	0,1702	0,9998
17	0,2190	0,1934	1,0000	0,2346	0,1167	0,9998
18	0,2190	0,1242	1,0000	0,2346	0,0670	0,9998
19	0,2190	0,0609	1,0000	0,1570	1,0000	1,0000
20	0,1474	1,0000	0,9998	0,1570	0,6696	1,0000
21	0,1474	0,6081	0,9998	0,1570	0,3794	1,0000
22	0,1474	0,2761	0,9998	0,1570	0,1370	1,0000
23	0,1474	0,0145	0,9998	0,1570	-0,0541	1,0000
24	0,1474	-0,1737	0,9998	0,1570	-0,1948	1,0000
25	0,1474	-0,2925	0,9998	0,1570	-0,2900	1,0000
V_0 , м ³	0,3630	–	–	0,3645	–	–
%	34,52	–	–	34,24	–	–

В столбцах 2 и 5 показаны размеры сечений $b_{1k}[i] = b_{2k}[i]$ соответствующих вариантов. В столбцах 3 и 6 приводятся значения критерия (22), а в столбцах 4 и 7 – критерия (18). Оба критерия приводятся потому, что, как отмечалось выше, на каждом кусочно-постоянном участке критерий (18) реализуется как среднее значение критерия (22) на единицу длины участка.

Значения критерия (18) в обоих вариантах оказались близки к единице, что свидетельствовало о возможности завершать процессы оптимизации.

Функция цели у минимально материалоёмкого решения (табл. 1, столбец 7) $V_0 = 0,3384 \text{ м}^3$, что на 38,95 % меньше, чем у исходного варианта, у которого $V_0 = 0,5543 \text{ м}^3$ (табл. 1, столбец 2).

В первом варианте границ кусочно-постоянного изменения размеров функция цели $V_0 = 0,3630 \text{ м}^3$, что на 34,52 % меньше, чем у исходного варианта. Во втором функция цели $V_0 = 0,3645 \text{ м}^3$, что на 34,24 % меньше, чем у исходного варианта. Таким образом, менее материалоёмким оказывается первый вариант выбора границ участков. Отметим, что минимально материалоёмкий вариант содействовал выбору границ участков, позволяя выбирать варианты, наиболее к нему приближенные.

Теоретические результаты данной статьи в англоязычном варианте представлены в работе [22], а примеры в работе [23].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Boslovyak P.V., Emelyanova G.A.* Optimization Mathematical Modeling of the Weight of Metal Structure of Suspended Belt Conveyor Linear Section // IFAC-PapersOnLine. 2018. V. 51. I. 30. P. 616–619.

2. *Hansel W., Treptow A., Becker W., Freisleben B.* A heuristic and a genetic topology optimization algorithm for weight-minimal laminate structures // *Composite Structures*. 2002. V. 58. I. 2. P. 287–294.
3. *Jonsson B., Barsoum Z., Sperle J.-O.* Weight optimization and fatigue design of a welded bogie beam structure in a construction equipment // *Engineering Failure Analysis*. 2012. V. 19. P. 63–76.
4. *Navarrina F., Muinos I., Colominas I., Casteleiro M.* Topology optimization of structures: A minimum weight approach with stress constraints // *Advances in Engineering Software*. 2005. V. 36. I. 9. P. 599–606.
5. *Park C.H., Saouab A., Breard J., Han W.S., Vautrin A., Lee W.I.* An integrated optimisation for the weight, the structural performance and the cost of composite structures // *Composites Science and Technology*. 2009. V. 69. I. 7–8. P. 1101–1107.
6. *Praveen V., Dayan G.M., Kumar A.S.* A multi-objective design optimization technique for weight and cost minimization of hybrid laminated composite structure by modified non-dominated sorting genetic algorithm // *Materials Today: Proceedings*. 2018. V. 5. I. 12. Part 1. P. 25798–25806.
7. *Winklberger M., Heftberger P., Sattler M., Schagerl M.* Fatigue strength and weight optimization of threaded connections in tie-rods for aircraft structures // *Procedia Engineering*. 2018. V. 213. P. 374–382.
8. *Lagrange J.-L.* Sur la figure des collonnes // *Mesclane Taurinensia*. 1770–1773. V. 5, P. 123.
9. *Clausen T.* Uber die form architektonischer Säulen // *Bull. cl. physico-math. Acad. St.-Petersburg*. 1851. V. 9. P. 371–380.
10. *Николаи Е.Л.* Задача Лагранжа о наивыгоднейшем очертании колонны // *Известия Санкт-Петербургского политехнического института*. 1907. № 8.
11. *Ляхович Л.С., Акимов П.А., Тухфатуллин Б.А.* О задачах поиска минимума и максимума в строительной механике // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2017. V. 13. I. 2. P. 103–124.
12. *Lyakhovich L.S., Malinovsky A.P., Tukhfatullin B.A.* Criteria for Optimal Strengthening of Bar Flange with I-type Cross-section with Stability Constraints on the Value of the First Natural Frequency // *Procedia Engineering*. 2016. V. 153. P. 427–433.
13. *Ляхович Л.С.* Особые свойства оптимальных систем и основные направления их реализации в методах расчета сооружений. Томск : Издательство Томского государственного архитектурно-строительного университета, 2009. 372 с.
14. *Ляхович Л.С., Перельмутер А.В.* Некоторые вопросы оптимального проектирования строительных конструкций // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2014. V. 10. I. 2. P. 14–23.
15. *Aslami M., Akimov P.A.* Analytical solution for beams with multipoint boundary conditions on two-parameter elastic foundations // *Archives of Civil and Mechanical Engineering*. 2016. V. 16. I. 4. P. 668–677.
16. *Khasawneh F.A., Segalman D.* Exact and numerically stable expressions for Euler-Bernoulli and Timoshenko beam modes // *Applied Acoustics*. 2019. V. 151. P. 215–228.
17. *Peradze J.* On the approximate solution of a Kirchhoff type static beam equation // *Transactions of A. Razmadze Mathematical Institute*. 2016. V. 170. I. 2. P. 266–271.
18. *Reali A., Gomez H.* An isogeometric collocation approach for Bernoulli–Euler beams and Kirchhoff plates // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2015. V. 284. P. 623–636.
19. *Wang D., Liu W., Zhang H.* Superconvergent isogeometric free vibration analysis of Euler – Bernoulli beams and Kirchhoff plates with new higher order mass matrices // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2015. V. 286. P. 230–267.
20. *Ludeker J.K., Kriegesmann B.* Fail-safe optimization of beam structures // *Journal of Computational Design and Engineering*. 2019. V. 6. I. 3. P. 260–268.
21. *Quinteiro G.F.* Beam optimization: improving methodology // *Annals of Nuclear Energy*. 2004. V. 31. I. 4. P. 399–411.
22. *Lyakhovich L.S., Akimov P.A., Tukhfatullin B.A.* Optimal solutions for creation of rods with piecewise constant cross-sections with stability constraints or constraints for value of the first

- natural frequency. Part 1: theoretical foundations // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2019. V. 15. I. 4. P. 88–100.
23. Lyakhovich L.S., Akimov P.A., Tukhfatullin B.A. Optimal solutions for creation of rods with piecewise constant cross-sections with stability constraints or constraints for value of the first natural frequency. Part 2: numerical examples // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2019. V. 15. I. 4. P. 101–110.

REFERENCES

1. Boslovyak P.V., Emelyanova G.A. Optimization mathematical modeling of the weight of metal structure of suspended belt conveyor linear section. *IFAC-PapersOnLine*. 2018. V. 51. No. 30. Pp. 616–619.
2. Hansel W., Treptow A., Becker W., Freisleben B. A heuristic and a genetic topology optimization algorithm for weight-minimal laminate structures. *Composite Structures*. 2002. V. 58. No. 2. Pp. 287–294.
3. Jonsson B., Barsoum Z., Sperle J.-O. Weight optimization and fatigue design of a welded bogie beam structure in a construction equipment. *Engineering Failure Analysis*. 2012. V. 19. Pp. 63–76.
4. Navarrina F., Muinos I., Colominas I., Casteleiro M. Topology optimization of structures: A minimum weight approach with stress constraints. *Advances in Engineering Software*. 2005. V. 36. No. 9. Pp. 599–606.
5. Park C.H., Saouab A., Breard J., Han W.S., Vautrin A., Lee W.I. An integrated optimisation for the weight, the structural performance and the cost of composite structures. *Composites Science and Technology*. 2009. V. 69. No. 7–8. Pp. 1101–1107.
6. Praveen V., Dayan G.M., Kumar A.S. A multi-objective design optimization technique for weight and cost minimization of hybrid laminated composite structure by modified non-dominated sorting genetic algorithm. *Materials Today: Proceedings*. 2018. V. 5. No. 12. Pp. 25798–25806.
7. Winklberger M., Heftberger P., Sattler M., Schagerl M. Fatigue strength and weight optimization of threaded connections in tie-rods for aircraft structures. *Procedia Engineering*. 2018. V. 213. Pp. 374–382.
8. Lagrange J.-L. Sur la figure des colonnes. *Miscellanea Taurinensia*. 1770-1773. V. 5, P. 123.
9. Clausen T. Über die form architektonischer Säulen. *Bull. cl. physico-math. Acad. St.-Petersburg*, 1851. V. 9. Pp. 371–380.
10. Nikolai E.L. Zadacha Lagranzha o naivygodneishem ochertanii kolonny [The Lagrange problem of the best shape of the column]. *Izvestiya Sankt-Peterburgskogo politekhnicheskogo instituta*. 1907. No. 8. (rus)
11. Lyakhovich L.S., Akimov P.A., Tukhfatullin B.A. O zadachakh poiska minimuma i maksimuma v stroitel'noi mekhanike [About hill-climbing problems in structural mechanics]. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2017. V. 13. No. 2. Pp. 103–124. (rus)
12. Lyakhovich L.S., Malinovsky A.P., Tukhfatullin B.A. Criteria for optimal strengthening of bar flange with I-type cross-section with stability constraints on the value of the first natural frequency. *Procedia Engineering*. 2016. V. 153. Pp. 427–433.
13. Lyakhovich L.S. Osobyie svoystva optimal'nykh sistem i osnovnyie napravleniya ikh realizatsii v metodakh rascheta sooruzhenii [Specific properties of optimum systems using methods of structural analysis]. Tomsk: TSUAB, 2009. 372 p. (rus)
14. Lyakhovich L.S., Perelmuter A.V. Nekotorye voprosy optimal'nogo proektirovaniya stroitel'nykh konstruksii [Optimum building design]. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2014. V. 10. No. 2. Pp. 14–23. (rus)
15. Aslami M., Akimov P.A. Analytical solution for beams with multipoint boundary conditions on two-parameter elastic foundations. *Archives of Civil and Mechanical Engineering*. 2016. V. 16. No. 4. Pp. 668–677.
16. Khasawneh F.A., Segalman D. Exact and numerically stable expressions for Euler-Bernoulli and Timoshenko beam modes. *Applied Acoustics*. 2019. V. 151. Pp. 215–228.
17. Peradze J. On the approximate solution of a Kirchhoff type static beam equation. *Transactions of A. Razmadze Mathematical Institute*. 2016. V. 170. No. 2. Pp. 266–271.

18. *Realı A., Gomez H.* An isogeometric collocation approach for Bernoulli–Euler beams and Kirchhoff plates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2015. V. 284. Pp. 623–636.
19. *Wang D., Liu W., Zhang H.* Superconvergent isogeometric free vibration analysis of Euler–Bernoulli beams and Kirchhoff plates with new higher order mass matrices. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2015. V. 286. Pp. 230–267.
20. *Ludeker J.K., Kriegesmann B.* Fail-safe optimization of beam structures. *Journal of Computational Design and Engineering*. 2019. V. 6. No. 3. Pp. 260–268.
21. *Quinteiro G.F.* Beam optimization: improving methodology. *Annals of Nuclear Energy*. 2004. V. 31. No. 4. Pp. 399–411.
22. *Lyakhovich L.S., Akimov P.A., Tukhfatullin B.A.* Optimal solutions for creation of rods with piecewise constant cross-sections with stability constraints or constraints for value of the first natural frequency. Part 1: theoretical foundations. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2019. V. 15. No. 4. Pp. 88–100.
23. *Lyakhovich L.S., P.A. Akimov P.A., Tukhfatullin B.A.* Optimal solutions for creation of rods with piecewise constant cross-sections with stability constraints or constraints for value of the first natural frequency. Part 2: Numerical examples. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2019. V. 15. No. 4. Pp. 101–110.

Сведения об авторах

Ляхович Леонид Семенович, докт. техн. наук, профессор, академик Российской академии архитектуры и строительных наук, Томский государственный архитектурно-строительный университет, 634003, г. Томск, пл. Соляная, 2, lls@tsuab.ru

Акимов Павел Алексеевич, докт. техн. наук, профессор, академик Российской академии архитектуры и строительных наук, Томский государственный архитектурно-строительный университет, 634003, г. Томск, пл. Соляная, 2; главный ученый секретарь президиума, Российская академия архитектуры и строительных наук, 107031, г. Москва, ул. Большая Дмитровка, 24, стр. 1, akimov@raasn.ru

Тухфатуллин Борис Ахатович, канд. техн. наук, доцент, Томский государственный архитектурно-строительный университет, 634003, г. Томск, пл. Соляная, 2, bat9203@gmail.com

Authors Details

Leonid S. Lyakhovich, DSc, Professor, Academy Fellow of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Department of Structural Mechanics, Tomsk State University of Architecture and Building, 2, Solyanaya Sq., 634003, Tomsk, Russia, lls@tsuab.ru

Pavel A. Akimov, DSc, Professor, Chief Academic Secretary, Academy Fellow of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Professor, Department of Structural Mechanics, Tomsk State University of Architecture and Building; 2, Solyanaya Sq., 634003, Tomsk, Russia, akimov@raasn.ru

Boris A. Tukhfatullin, PhD, A/Professor, Department of Structural Mechanics, Tomsk State University of Architecture and Building, 2, Solyanaya Sq., 634003, Tomsk, Russia, bat9203@gmail.com