

УДК 624.042.1: 539.3+693.157

*КАБАНЦЕВ ОЛЕГ ВАСИЛЬЕВИЧ, канд. техн. наук, профессор,  
ovk531@gmail.com  
Московский государственный строительный университет,  
129337, г. Москва, Ярославское ш., 26*

## **ДИСКРЕТНАЯ МОДЕЛЬ КАМЕННОЙ КЛАДКИ В УСЛОВИЯХ ДВУХОСНОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ**

На основе экспериментально установленных механизмов разрушения разработана дискретная модель каменной кладки, учитывающая процессы контактного взаимодействия базовых материалов путем введения в модель специальных интерфейсных элементов. Предложена система критериев прочности каменной кладки, соответствующая различным условиям взаимодействия элементов кладки. Разработана расчетная технология, позволяющая учитывать структурные изменения модели. Выполнена верификация метода моделирования и технологии расчетного исследования на основе сопоставления результатов численного и физического экспериментов. Результаты численных исследований позволили установить ключевую роль элементов, обеспечивающих взаимодействие базовых материалов, в процессах упругого и пластического деформирования кладки.

Разработанная дискретная модель каменной кладки и расчетная технология могут быть применены для детального исследования упругопластических свойств кусочно-однородных композитов.

**Ключевые слова:** моделирование; численные методы; расчетная модель; напряженно-деформированное состояние; каменная кладка; кирпич; раствор.

*OLEG V. KABANTSEV, PhD, Professor,  
ovk531@gmail.com  
Moscow State University of Civil Engineering,  
26, Yaroslavskoe Road, 129337, Moscow, Russia*

## **DISCRETE MODEL OF MASONRY UNDER BIAXIAL STRESSES**

The paper presents a discrete model of masonry based on destruction mechanisms deduced from experiments and developed considering the contact interaction between base materials using interface elements introduced into the model. The proposed system of masonry strength criteria corresponds to biaxial stress state conditions, while design technology allows considering the structural modification of the model. Verification of the modeling technique and design technology is based on comparison of experimental results that allow the determination of the key role of elements providing the interaction of base materials during the elastoplastic deformation of masonry.

The suggested discrete model of masonry and design technology can be used in detailed examination of elastoplastic properties of piecewise homogeneous composites.

**Keywords:** modelling; numerical methods; design model; stress-strain state; masonry; brick; mortar.

### Введение

В предыдущих работах автора [1, 2] выполнен детальный анализ каменной кладки как кусочно-однородного композита, а также разработаны принципиальные подходы к моделированию процесса упругопластического деформирования кладки в условиях двухосного напряженного состояния под возрастающей нагрузкой.

Композитные материалы с позиций механики рассматриваются на основе двух различных концепций:

а) композит как континуальный гомогенный материал с набором «обобщенных» характеристик;

б) композит как структура, состоящая из отдельных внутренне однородных базовых элементов, а также элементов, обеспечивающих связи между базовыми элементами композита.

Каменная кладка, рассматриваемая как континуальный композитный материал, имеет достаточно хорошо обоснованный набор критериев прочности и методов определения эффективных механических характеристик, позволяющих выполнять расчетную оценку прочности и надежности каменных конструкций.

Очевидно, что оценка прочности и надежности каменных конструкций не всегда является целью расчетных исследований. Так, определение характеристик материалов конструкций, реализующих пластическую фазу деформирования, создает основу для использования действительных резервов материала в такой важнейшей области, как сейсмостойкое строительство.

Современное состояние исследований по сейсмостойкости конструкций из каменной кладки базируется в основном на экспериментальных работах, выполненных лишь для некоторых видов материалов каменной кладки и отдельных конструкций. Теоретические исследования поведения каменной кладки в фазе пластического деформирования позволяют установить научно обоснованные характеристики предельного состояния для более широкого круга материалов и внутренних свойств каменной кладки, применяемой для сейсмостойких конструкций.

Модели материалов в рамках феноменологической концепции формируются на базе обобщенных эмпирических зависимостей о поведении материала под нагрузкой, что не позволяет исследовать важнейшие детали процесса пластической фазы деформирования, включая существенно различные механизмы разрушения кирпича, раствора и узлов их соединения. Таким образом, для детальных теоретических исследований пластической фазы деформирования каменной кладки в условиях двухосного напряженного состояния необходимо использовать концепцию моделирования, отражающую структуру кусочно-однородного композита и свойства связей базовых материалов, обеспечивающие их совместную работу. Указанные требования могут быть реализованы в рамках концепции дискретного моделирования, позволяющей разработать модель с учетом внутренней структуры композита.

При исследовании каменной кладки в условиях осевого сжатия дискретное (структурное) моделирование используется для определения эффек-

тивных механических характеристик (см. работы Г.Г. Кашеваровой [3] и В.В. Пангаева [3]).

В исследованиях двухосного напряженного состояния кладки структурное моделирование используется более широко (см. работы A.W. Page, J.V. Lemos, A. Gabor, P.V. Lourenco [5–8]). Необходимо отметить, что как в отечественных, так и в зарубежных исследованиях в структурных моделях каменной кладки не учитывается важнейший параметр – адгезионное взаимодействие базовых материалов кладки – кирпича и раствора (в терминах действующих отечественных норм – нормальное сцепление). Величина прочности нормального сцепления определяет несущую способность каменной кладки в условиях двухосного напряженного состояния [9].

#### **Задача моделирования каменной кладки как кусочно-однородного композита в условиях двухосного напряженного состояния**

В работе [10] представлены экспериментально обоснованные механизмы разрушения каменной кладки в условиях двухосного напряженного состояния при действии главных напряжений разных знаков, на основе которых разработаны основные положения метода структурного (дискретного) конечноэлементного моделирования каменной кладки [1, 2].

Дискретная (структурная) модель каменной кладки должна быть сформирована с соблюдением следующих условий:

- исследуемый объект из композита аппроксимируем системой структурных элементов;
- границы структурных элементов соответствуют границам материалов, составляющих композит;
- механические характеристики и критерии прочности структурных элементов, аппроксимирующие материалы композита, а также характеристики их взаимодействия принимаются едиными для каждого элемента и определяются экспериментально;
- геометрия и взаимное положение структурных элементов определены на начальном этапе до приложения нагрузки.

В рамках разработанной дискретной модели кладки представлен также и метод моделирования, позволяющий учесть адгезионное взаимодействие базовых материалов (кирпич и раствор) в горизонтальном растворном шве. Для этого в состав модели введены специальные *интерфейсные* элементы, находящиеся на границе базовых элементов композита. При этом учтены результаты экспериментальных исследований [11], которыми установлено, что эффект адгезии формируется только в горизонтальных швах, а в вертикальных швах адгезия не реализуется вследствие усадки при твердении раствора.

За основу для разработки расчетных моделей приняты образцы, изготовленные для выполнения физических экспериментов в работах [12–14]. Образцы представляют собой прямоугольный фрагмент кирпичной кладки с размерами 1030×1100 мм, толщиной 250 мм с цепной системой перевязки.

Расчетная схема экспериментального образца сформирована таким образом, что размеры КЭ в расчетной модели являются предельно малыми (с точки зрения выполнения базовых условий метода конечных элементов). Это позволяет ограничиться квазистатической постановкой задачи – в таком случае накопленная в малых разрушающихся элементах энергия также мала, невелики и инерционные силы, что определяется малостью масс, приходящих в движение при локальном микроразрушении. Вид расчетной модели с детализацией представлен на рис. 1.

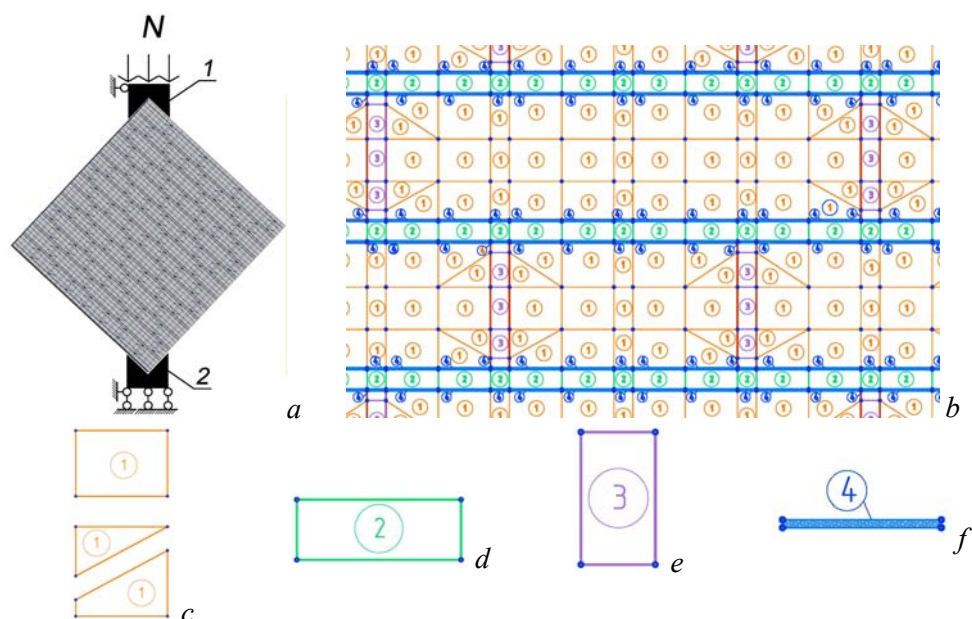


Рис. 1. Конечнoэлементная модель образца из каменной кладки (дискретное моделирование):

*a* – общий вид конечнoэлементной модели образца из каменной кладки и граничные условия в расчетной области (*1* – нагрузочное устройство; *2* – опорное устройство); *b* – фрагмент конечнoэлементной модели образца из каменной кладки (принципиальная схема); *c* – конечные элементы, аппроксимирующие кирпич; *d* – конечные элементы, аппроксимирующие горизонтальный растворный шов; *e* – конечные элементы, аппроксимирующие вертикальный растворный шов; *f* – конечные элементы, аппроксимирующие контактные (интерфейсные) элементы в горизонтальном шве

Расчетное исследование выполняется с использованием вычислительного комплекса SCAD (версия 11.3 и выше, включающие расчетную технологию «МОНТАЖ»). В соответствии с библиотекой КЭ комплекса SCAD аппроксимация структурных и интерфейсных элементов образца выполнена с использованием КЭ № 44 (четырёхугольный четырёхузловой элемент оболочки) и КЭ № 42 (треугольный трёхузловой элемент оболочки). Основные соотношения механики, используемые для решения задач с применением КЭ № 42 и № 44, представлены в работе [15]. Моделирование опорного и нагрузочного

устройства выполнено с учетом размеров конструкций, примененных в физических экспериментах. Жесткостные параметры опорного и нагрузочного устройств определяют состояние элементов, их аппроксимирующих, как близкое к «абсолютно твердому телу».

В физических экспериментах с исследованием упругопластического деформирования различных композитных материалов установлено, что указанное явление представляет собой многоэтапный процесс формирования локальных разрушений, накопления таких разрушений с их слиянием в магистральную трещину, развития магистральной трещины в пределах всей конструкции и разрушения последней (см., например, [1616]). По существу, процесс пластического деформирования материала вплоть до разрушения представляет собой работу в режиме деградации: многоэтапное структурное изменение состояния материала конструкции с переходом на этапе разрушения к разделению на несвязанные части.

Общие принципы учета структурного изменения модели конструкции (материала) в рамках многоэтапного расчета сформулированы в работе [17] с их расширенной детализацией в работе [18].

В работах [1, 2] предложена процедура моделирования структурного изменения каменной кладки с использованием многоэтапного расчета. На любом этапе такого расчета элемент расчетной схемы, в котором выявлено превышение критерия прочности, может быть исключен из состава ансамбля элементов модели. Такая процедура удовлетворяет критериям оценочных расчетных исследований и позволяет получить подтверждение работоспособности метода моделирования в целом. Более того, предложенный метод моделирования позволил подтвердить важнейшую роль эффекта адгезионного взаимодействия базовых материалов композита. При изменении величины указанного параметра наблюдается принципиально различная последовательность формирования микроразрушений в моделях, а также существенно различающиеся величины пластической фазы деформирования.

Однако для выполнения детальных численных исследований пластической фазы деформирования каменной кладки в условиях двухосного напряженного состояния под возрастающей нагрузкой необходимо применять более строгие методы моделирования структурных изменений модели.

### **Особенности моделирования работы конструкции в режиме деградации под возрастающей нагрузкой**

Моделирование работы материала конструкции в режиме деградации состоит в том, что из ансамбля модели исключаются те или иные элементы, в которых превышен один из критериев прочности, входящих в состав принятой для конкретного расчетного анализа системы критериев. К элементам расчетной модели относятся также и элементы внутренних связей, которые могут изменяться в зависимости как от внутренних усилий (напряжений), так и от параметров внешних воздействий. Теоретическое обоснование механизма разрушения образца как процесса формирования и накопления микроразрушений представлено в работе [19].

Экспериментально установлено [10], что пластическая фаза деформирования кладки как композитной среды определяется формированием микро-разрушений, происходящих по различным механизмам: разрушение кирпича, разрушение раствора в горизонтальном и вертикальном швах, разрушение адгезионного взаимодействия и пр. Все это определяет необходимость использования некоторой совокупности (системы) критериев прочности для оценки состояния элементов модели. В работах А.А. Ильюшина (например, [20]) предложен общий подход к формированию совокупности критериев прочности, суть которого состоит в следующем: пусть меры тензора поврежденности  $M_n(\Omega)$ , являющиеся функциями компонент  $\Omega$ , могут быть использованы для формулирования критериев разрушения, соответствующих различным механизмам разрушения. Определим, что существуют константы критической поврежденности материала  $\Omega_n^{cr}$  такие, что если для любого  $n$

$$M_n(\Omega) < \Omega_n^{cr}, \quad (1)$$

то состояние частицы (элемента) прочно, а если для некоторого  $n = k$

$$M_k(\Omega) \geq \Omega_k^{cr}, \quad (2)$$

то происходит разрушение типа  $k$ .

Для изотропных материалов инвариантными мерами тензора  $\Omega$  являются функции  $k$  и  $q$ , которые в свою очередь выражают изменение деформационных свойств, определяющих поведение материалов (элементов) при гидростатическом давлении и чистом сдвиге соответственно.

Возможно, что разрушение частицы/элемента по одному из критериев, принятых в рамках системы критериев, определит невозможность сопротивления воздействию только определенного вида, тогда как для иных видов воздействий частица может работать в составе общего ансамбля частиц композита. Как показано в работе [16], формально это может быть выражено в скачкообразном увеличении до единицы некоторых компонент тензора поврежденности  $Mn(\Omega)$ .

Так, при разрушении частицы/элемента по критерию сдвига указанная частица может оказаться в двух вариантах состояния: в случае существования в зоне частицы напряжений сжатия частица будет воспринимать такие напряжения и участвовать в работе ансамбля частиц по критерию сдвига в рамках механизма трения; в случае существования в зоне частицы напряжений растяжения такая частица считается «разрушенной», что соответствует отсутствию реакции как по критерию сдвига, так и по критерию нормальных напряжений.

Таким образом, в случае использования метода конечных элементов моделирование процесса деградации элемента расчетной модели может быть выполнено с применением технологии изменения (в случае деградации – уменьшения на несколько порядков) жесткости элемента исключительно по требуемому параметру, который соответствует превышенному критерию прочности.

В общем случае изменение жесткости элемента расчетной модели может приводить к различным вариантам работы конструкции:

- элемент приобрел новую жесткостную характеристику, увеличенную по отношению к исходной величине жесткости;
- элемент уменьшил свою жесткостную характеристику, оставаясь нагруженным.

Детальный анализ влияния изменения жесткости элемента расчетной схемы на напряженно-деформированное состояние модели в целом представлен в работе [21]. На основе метода «параллельного элемента», предложенного в работе [22], изменение жесткости диагонального элемента расчетной схемы моделируется добавлением в расчетную схему или изъятием из нее элемента, параллельного модифицируемому (рис. 2).

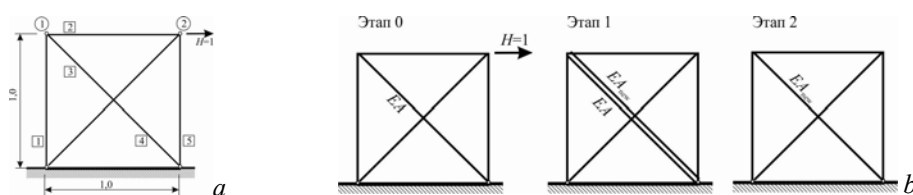


Рис. 2. Пример к анализу влияния изменения жесткости элемента на НДС расчетной модели:

*a* – расчетная схема; *b* – моделирование изменения жесткости элемента модели

В тестовой модели, предложенной в книге [23] (рис. 2, *a*), жесткости всех элементов одинаковы и равны  $EA = 1,0$ . Вследствие различных причин жесткость диагонального элемента должна понизиться, т. е. вместо  $EA$  станет равной  $EA_{\text{new1}} < EA$ . Выполним модификацию системы в два этапа: на первом этапе параллельно с существующим элементом введем новый с жесткостью  $EA_{\text{new1}}$ , а на втором этапе удалим старый элемент с жесткостью  $EA$  (рис. 2, *b*).

Анализ тестового примера, выполненный в работе [21], показывает, что при увеличении жесткости элемента без изменения нагружения на модель (установка в схему нового диагонального элемента с жесткостью  $EA_{\text{new1}}$  – рис. 2, *b*, этап 1) НДС модели не изменяется, а влияние увеличения жесткости будет проявляться лишь при силовом или деформационном нагружении на следующих этапах расчета; при уменьшении жесткости элемента, который, в общем случае, находится в напряженном состоянии (удаление из схемы диагонального элемента с жесткостью  $EA = 1,0$  – рис. 2, *b*, этап 2), происходит изменение НДС модели с соответствующим перераспределением усилий (напряжений) в системе элементов расчетной схемы. Следует подчеркнуть, что перераспределение усилий в расчетной схеме при уменьшении жесткости элемента происходит при **неизменных нагрузках** на модель, сформировавшихся к моменту модификации жесткости. Аналогичным образом проявляются и модификации (увеличение/уменьшение жесткости) модели внешних связей расчетной схемы сооружения.

Приведенный анализ показывает, что численные исследования работы конструкции в режиме деградации, процесс которой моделируется редуцированием (с понижением!) жесткостей элементов модели следует выполнять с пересчетом НДС при понижении жесткости без изменения нагрузок на модель. Необходимость процедуры пересчета с перераспределением усилий (напряжений) определяется тем фактом, что после модификации жесткостей возникает, по существу, новая расчетная схема, которая формирует иную реакцию на те нагрузки, которые были приложены к исходному виду расчетной модели. Отсутствие процедуры пересчета НДС в расчетной схеме при снижении жесткости элементов неизбежно приведет к получению некорректного результата.

При моделировании процесса деградации каменной кладки под нагрузкой следует учитывать сложный характер работы элемента в составе ансамбля модели, который определяется (в числе прочих факторов) уровнем прочности, оцениваемым на основании соответствующего критерия. В работе [10] на основе экспериментально установленных механизмов разрушения кладки в условиях двухосного напряженного состояния предложена система частных характеристик прочности, что позволяет сформулировать систему критериев прочности каменной кладки, включающую как критерии прочности базовых материалов (кирпич и раствор), так и критерии прочности элементов, обеспечивающих их взаимодействие.

Для базовых материалов кладки в работах [1, 2] предложено применение критериев прочности для керамик и бетонов, разработанных Н.В. Кюпфер (Кюпфер) [24], которые неоднократно с успехом использовались другими исследователями (например, [25]). Для условий двухосного напряженного состояния условие прочности Кюпфера имеет вид

$$1 + \frac{\sigma_1}{R_c} - \frac{\sigma_3}{R_t} \geq 0, \quad (3)$$

где  $R_c$  и  $R_t$  – пределы прочности при одноосном сжатии и растяжении.

Анализ работы элементов, обеспечивающих взаимодействие базовых материалов, показывает, что такие элементы могут находиться в весьма сложном напряженном состоянии, которое определяется как локализацией такого элемента, так и напряжениями, сформировавшимися под нагрузкой.

Вертикальный растворный шов не имеет адгезионных связей с кирпичом, т. к. под действием осадочных напряжений в зоне контакта кирпича и раствора образуется микротрещина [11]. Работа вертикального растворного шва в составе кладки определяется напряжениями, сформировавшимися в каждом шве под нагрузкой. При наличии напряжений растяжения, нормальных к оси шва ( $\sigma > 0$ ), взаимодействия раствора с кирпичом не происходит вследствие отсутствия адгезии (рис. 3, а).

При наличии напряжений сжатия, нормальных оси шва ( $\sigma < 0$ ), работа шва определяется величиной напряжений сдвига. При величине напряжений сдвига  $T = f(N_s)$ , не превышающих величину удерживающих напряжений  $[T] = f(K|\sigma)$  (определяются величиной напряжений сжатия  $|\sigma|$  и коэффициентом трения покоя  $K$ ), раствор вертикального шва взаимодействует с соседни-



ми кирпичами в режиме трения покоя как по напряжениям, нормальным оси шва, так и по напряжениям сдвига (рис. 3, *b*). При величине напряжений сдвига  $T = f(N_i)$ , которые превышают величину удерживающих напряжений  $[T] = f(k|\sigma|)$  взаимодействие раствора в вертикальном шве с кирпичом осуществляется по плоскости шва в режиме сухого трения с усилием  $k|\sigma|$  ( $k$  – коэффициент трения скольжения), а перпендикулярно плоскости шва – по напряжениям, нормальным оси шва (рис. 3, *c*).

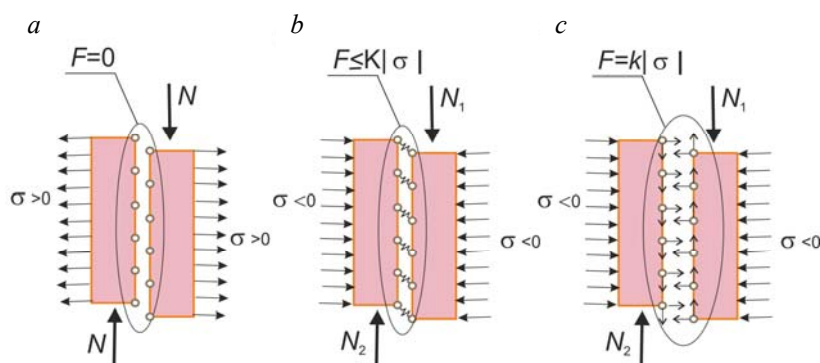


Рис. 3. Варианты поведения вертикального растворного шва

Таким образом, для корректного моделирования работы и процесса структурных изменений вертикального растворного шва его модель должна обеспечивать раздельную работу элемента по виду напряжений: по напряжениям, нормальным оси шва, и по напряжениям сдвига по плоскости шва. Поскольку исследования выполнены с использованием ВК SCAD, моделирование вертикального шва выполнено в соответствии с возможностями комплекса – с заменой одного КЭ типа 3 (рис. 2, *e*) на два КЭ, установленных параллельно – тип 3.1 и тип 3.2. Один из таких КЭ (тип 3.1) обеспечивает работу с передачей напряжений, нормальных оси шва ( $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{mort}$ ,  $\mathbf{G} = \mathbf{0}$ ), другой (тип 3.2) обеспечивает работу с передачей напряжений сдвига ( $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{G} = \mathbf{G}_{mort}$ ). Предложенная технология моделирования позволяет раздельно реализовать механизм деградации путем снижения (на несколько порядков) того параметра жесткости, который соответствует превышенному критерию прочности, но по другим параметрам модель шва будет обеспечивать работу в составе расчетной схемы.

В горизонтальном растворном шве реализуется механизм адгезии. Величина адгезионной прочности  $R_{adh}$  (прочность нормального сцепления) зависит от многих факторов и существенно различна (см. исследования С.В. Полякова [26]). Натурными исследованиями каменных конструкций существующих зданий, в которых автор принимал непосредственное участие, установлено, что в большинстве зданий уровень адгезионной прочности  $R_{adh} \leq 40$  кПа (в отдельных случаях  $R_{adh} \leq 10$  кПа), в небольшой группе зданий  $R_{adh} \leq 80$  кПа, в отдельных зданиях  $R_{adh} \approx 100$  кПа. Значения нормального сцепления, превышающие 100 кПа, обнаружены только в отдельных конструктивных

элементах и не являются представительными для здания в целом. В экспериментальных исследованиях используются образцы кладки, выполненные в лабораторных условиях, что обеспечивает величину нормального сцепления  $R_{adh} \geq 130$  кПа, в отдельных образцах достигнут уровень  $R_{adh} \geq 400$  кПа.

Экспериментальными исследованиями [27–29] режима работы кладки по горизонтальному шву установлено, что реализуются следующие виды работы шва:

- работа на чистое сжатие/растяжение;
- работа шва на сдвиг в условиях действия напряжений, нормальных оси шва (сжатие/растяжение).

Поскольку совместная работа базовых материалов (кирпич и раствор) в горизонтальном шве определяется условиями их взаимодействия [26], то ключевую роль в моделировании работы горизонтального растворного шва играют интерфейсные элементы. Работа интерфейсного элемента, реализующего взаимодействие кирпича и раствора горизонтального шва, определяется напряжениями, сформировавшимися в каждом адгезионном слое (интерфейсном элементе) под нагрузкой.

А. При наличии напряжений **растяжения** в интерфейсном элементе горизонтального растворного шва, нормальных оси шва ( $\sigma > 0$ ), возможны следующие варианты (рис. 4):

А1.  $\sigma > R_{adh}$  – в этом случае адгезия разрушается, и интерфейсный элемент не обеспечивает взаимодействия кирпича и раствора горизонтального шва по всем видам напряжений (рис. 4, а).

А2.  $\sigma \leq R_{adh}$  при величине напряжений сдвига  $T = N_1 - N_2$ , не превышающих величину удерживающих напряжений  $[T] = f(K\sigma)$ , в этом случае интерфейсный элемент обеспечивает взаимодействие кирпича и раствора горизонтального шва как монолитного соединения по напряжениям, нормальным оси шва, и по напряжениям сдвига (рис. 4, б).

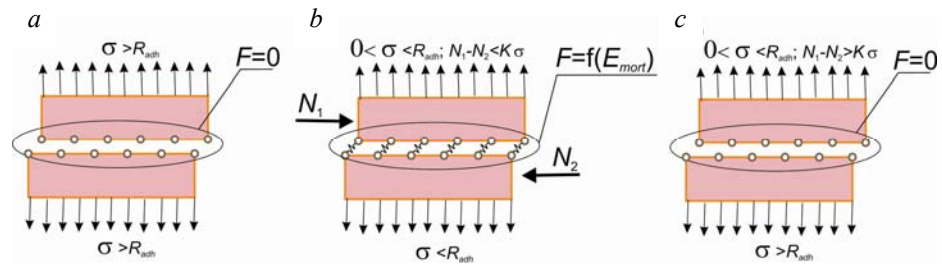


Рис. 4. Варианты поведения растянутого ( $\sigma > 0$ ) интерфейсного элемента горизонтального шва

В. При наличии напряжений **сжатия** в интерфейсном элементе горизонтального растворного шва, нормальных оси шва ( $\sigma < 0$ ), возможны следующие варианты (рис. 5):

В1.  $\sigma < 0$  при величине напряжений сдвига  $T = N_1 - N_2$ , не превышающих величину удерживающих напряжений  $[T]$  (определяются адгезионной

прочностью, величиной напряжений сжатия и коэффициентом внутреннего трения), в этом случае интерфейсный элемент обеспечивает взаимодействие кирпича и раствора горизонтального шва как монолитного соединения по напряжениям, нормальным оси шва, и по напряжениям сдвига (рис. 5, *a*).

В2.  $|\sigma| < 0$  при величине напряжений сдвига  $T = N_1 - N_2$ , превышающих величину удерживающих напряжений  $[T]$ , в этом случае адгезия разрушается, и происходит сдвиг в режиме сухого трения по плоскости шва, при этом интерфейсный элемент обеспечивает взаимодействие кирпича и раствора горизонтального шва только по напряжениям, нормальным оси шва (рис. 5, *b*).

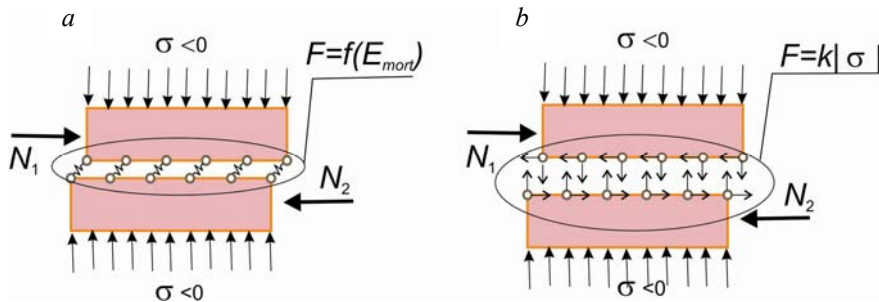


Рис. 5. Варианты поведения сжатого ( $\sigma < 0$ ) интерфейсного элемента горизонтального шва

В работе [29] выполнены экспериментальные исследования, позволившие определить величину коэффициента сухого трения по горизонтальному шву в каменной кладке. Установлено, что для кладки из полнотелого керамического кирпича коэффициент сухого трения равен 0,74, что существенно превышает рекомендуемое Eurcod значение, равное 0,4 (European Committee for Standardisation, EC6, Design of masonry structures).

В работах С.В. Полякова [26] экспериментально определена величина коэффициента внутреннего трения. Установлено, что для каменной кладки из полнотелого керамического кирпича коэффициент внутреннего трения равен 1,18.

Для корректного моделирования работы и процесса структурных изменений интерфейсного элемента, реализующего взаимодействие кирпича и раствора горизонтального шва, конечноэлементная модель должна обеспечивать раздельную работу элемента по виду напряжений (по напряжениям, нормальным оси шва, и по напряжениям сдвига по плоскости шва). В рамках условий BK SCAD, использованного при выполнении численных исследований, моделирование интерфейсных элементов в горизонтальных растворных швах выполнено с заменой одного КЭ типа 4 (рис. 1, *f*) на два КЭ, установленных параллельно – тип 4.1 и тип 4.2. Один из таких КЭ (тип 4.1) обеспечивает работу с передачей напряжений, нормальных оси шва ( $E = E_{mort}$ ,  $G = 0$ ), другой (тип 4.2) обеспечивает работу с передачей напряжений сдвига ( $E = 0$ ,  $G = G_{mort}$ ). Предложенная технология моделирования позволяет реализовать механизм деградации интерфейсного элемента путем снижения параметра жесткости, соответствующего превышенному критерию прочности, но по

другим параметрам модель шва будет обеспечивать работу в составе расчетной схемы.

Прочностной анализ выполняется для всех элементов модели на каждом этапе расчета. В случае изменения напряженного состояния КЭ может быть выполнена корректировка жесткостных параметров такого конечного элемента. Например, при изменении знака напряжений, нормальных оси шва, в интерфейсном элементе горизонтального растворного шва (т. е. при переходе от растяжения на этапе  $n$  к сжатию на этапе  $n + 1$ ) жесткость на сжатие такого элемента может быть увеличена до первоначального уровня. Такое редуцирование жесткости элемента позволит обеспечить его работу по критерию напряжений, нормальных оси шва.

Формирование разрушений в кирпиче имеет специфическую картину. Анализ результатов физических экспериментов [5–7] с использованием керамических полнотелых кирпичей показывает, что трещина в таких кирпичах формируется в пределах тела кирпича (от одной грани до другой) при одном уровне нагрузки. Наблюдаемая в физических экспериментах схема трещинообразования в кирпиче должна иметь адекватное отражение в численных исследованиях, что представляет определенную особенность моделирования. Указанная особенность заключается в том, что в пределах одного этапа расчета (с определенным уровнем нагружения модели) анализ прочности КЭ, моделирующих кирпич, выявляет, как правило, малое число КЭ, в которых превышен критерий прочности. Такие «разрушенные» КЭ располагаются у грани кирпича, но не формируют трассу сквозной трещины. «Разрушение» КЭ, расположенных у грани кирпича, определяется работой растворных швов под нагрузкой, в которых формируется НДС, создающее условия для увеличения напряжений в малой локальной зоне кирпича. По существу, «разрушение» малого числа КЭ кирпича на  $n$  этапе нагружения модели представляет собой явление зарождения трещины. Однако в рамках физически линейного расчета, выполняемого на  $n$  этапе численного исследования, не представляется возможным установить факт сквозного разрушения кирпича, соответствующего реальному физическому процессу.

С учетом доказанного [21] факта влияния изменения жесткости одного элемента на НДС системы в целом (см. выше) представляется возможным исследовать процесс трещинообразования в кирпиче на основе разработанной в расчетной технологии [18], позволяющей учесть влияние редуцирования (снижения) жесткости на НДС ансамбля модели. Для этого (после выявления на  $n$  этапе расчета первой группы «разрушенных» КЭ, аппроксимирующих кирпич) следует выполнить серию из  $m$  этапов расчета модели, сохраняя при этом уровень нагрузки, соответствующий  $n$  этапу нагружения. На каждом из  $m_j$  этапов выполняется анализ прочности КЭ, что позволяет установить приращение объема «разрушенных» КЭ, т. е. отследить процесс трассы разрушения в кирпиче. Если на отдельном  $m_j$  этапе расчета формируется некоторое дополнительное к предыдущему этапу число «разрушенных» КЭ, аппроксимирующих кирпич, то трещина в кирпиче растет, и выполняется следующий этап расчета без увеличения нагрузки. Если на этапе расчета  $m_{j=k}$  увеличение числа «разрушенных» КЭ не происходит, то такая ситуация расценивается как

«затухание» трещины. «Затухание» трещины определяется недостаточным уровнем энергии, который соответствует уровню нагрузки на модель, зафиксированному на  $n$  этапе расчета.

Для продолжения расчетов с увеличением нагрузки на  $n + i$  этапе расчетная структурная модель кирпича принимается со сквозной (от грани до грани) трещиной, которая определена в процессе многоэтапного расчета типа  $m$  (без увеличения нагрузки). В случае «затухания» трещины, выявленного в процессе многоэтапного расчета типа  $m$ , расчетная структурная модель кирпича передается на этап расчета с увеличением нагрузки (этап  $n + 1$ ) в виде, включающем начальную группу «разрушенных» КЭ, установленных на  $n$  этапе расчета. При увеличении нагрузки (т. е. при выполнении расчета этапа  $n + 1$ ), как правило, происходит рост трещины.

Таким образом, разработанная дискретная модель каменной кладки для условий двухосного напряженного состояния полностью соответствует структуре материала – двухкомпонентный кусочно-однородный разномодульный композит. Предлагаемая дискретная модель позволяет исследовать как упругую, так и пластическую фазы деформирования, используя при этом систему критериев прочности, разработанную на основе данных экспериментальных исследований.

#### **Верификация дискретной модели каменной кладки и анализ результатов численного эксперимента**

Верификация предложенного метода дискретного моделирования каменной кладки в условиях двухосного напряженного состояния выполнена путем сопоставления результатов численного эксперимента и данных физического эксперимента, выполненного в работе [14].

Характеристики прочности для элементов модели, принятые в численном эксперименте (обозначения характеристик соответствуют принятым в работе [10]):

- прочность кирпича на сжатие  $R1$  – 13,25 МПа;
- прочность раствора на сжатие  $R2$  – 16,058 МПа;
- прочность на растяжение адгезионного узла соединения кирпича и раствора в горизонтальном растворном шве –  $R3$  – 0,128 МПа.

Диаграммы деформирования образцов по результатам экспериментальных исследований [14] представлены на рис. 6. Диаграммы деформирования образцов, полученные в результате численного эксперимента по методике, представленной в настоящей работе, представлены на рис. 6.

Необходимо отметить, что в физическом эксперименте измерение деформаций сжатия не представляет особых затруднений. Некоторые проблемы, связанные с уровнем точности используемых приборов, возникают только на начальных этапах нагружения, что хорошо видно на рис. 6, где до уровня нагрузки 0,4 от разрушающей перемещения не зафиксированы. Очевидно, что при использовании иных – более точных – методов измерения могут быть получены необходимые данные.

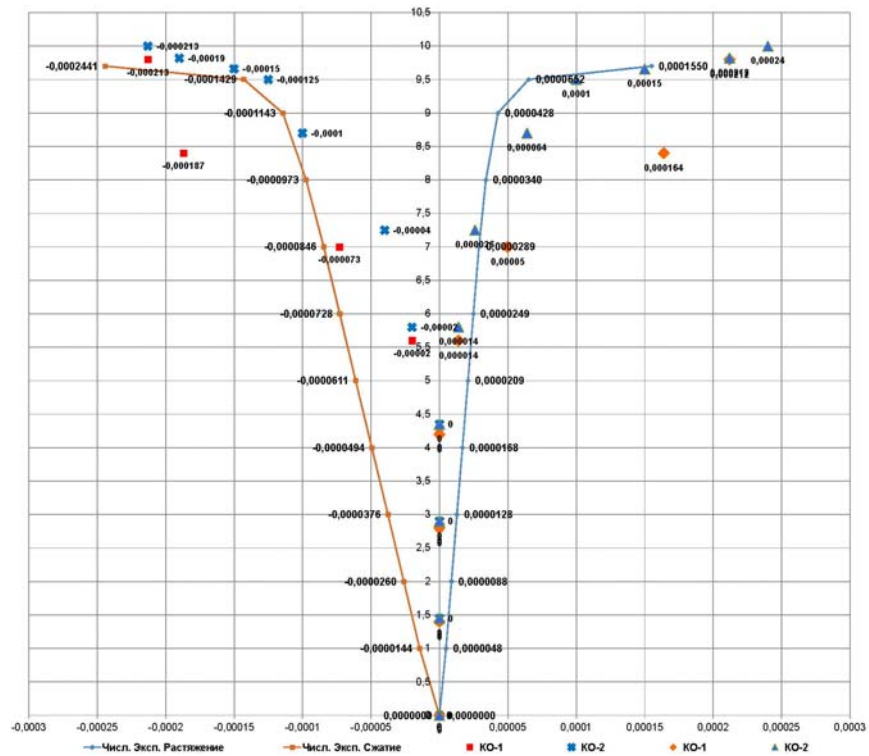


Рис. 6. Диаграмма деформирования расчетной модели каменной кладки, соответствующей образцу [14], с дискретным конечноэлементным моделированием

Измерение деформаций растяжения имеет некоторые особенности, причиной которых являются как наличие локальных пустот в кладке, так и неравномерность плотностей раствора в горизонтальных и вертикальных швах. В наибольшей степени неравномерность плотности раствора в швах проявляется в кладке со средним и низким качеством выполнения работ. Косвенным показателем качества (по мнению С.В. Полякова [26]) является показатель адгезионной прочности – при величине  $R_{adh} \leq 180$  кПа (соответствует I категории кладки по сейсмическим свойствам) качество выполнения работ может быть отнесено к среднему или низкому уровню. Указанные особенности кладки приводят к увеличенным (по отношению к теоретическим значениям) величинам деформаций растяжения. Величина отклонения от теоретических значений тем больше, чем ниже качество кладки. Хаотично сформировавшиеся локальные пустоты и неравномерности плотностей раствора крайне сложно учесть в численных исследованиях.

Вместе с тем экспериментально доказано [13], что на самом первом этапе нагружения происходит уплотнение материала кладки вдоль сжатой диагонали, что приводит к обмятию всех точечных контактов раствора и кирпича и закрытию локальных полостей в кладке. Факт уплотнения материала под нагрузкой подтверждается существенным увеличением частоты собственных колебаний образца после первого этапа нагружения. Это позволяет принять

в качестве критерия деформационных свойств каменной кладки параметр деформаций сжатия.

Сопоставление результатов физического и численного экспериментов показывает, что разработанные метод дискретного моделирования и расчетная технология (отслеживание НДС при поэтапной деградации модели под нагрузкой) позволяют адекватно отразить в численном эксперименте процесс упругой и пластической фаз деформирования. Диаграммы деформирования, полученные в рамках физического и численного экспериментов, идентичны. Величины предельных относительных деформаций упругой и упруго-пластической фаз деформирования вдоль сжатой диагонали образца имеют хорошую корреляцию (таблица).

#### Результаты экспериментальных исследований образца из каменной кладки (физический и численный эксперименты)

Тип эксперимента	Предельная нагрузка $P_{ult}$ [кН]	Деформация упругопластической стадии (предельная нагрузка)	
		Сжатие ( $10^{-5}$ ) $\epsilon_{pl}^{comp}$	Растяжение ( $10^{-5}$ ) $\epsilon_{pl}^{tens}$
Численный	95,16 (100 %)	24,41 (100 %)	15,5 (100 %)
КО-1 [14]	100 (105,1 %)	21,3 (87,3 %)	24 (154,8 %)
КО-2 [14]	98,0 (103,0 %)	21,3 (87,3 %)	21,2 (136,8 %)

Анализ численного эксперимента показывает: в процессе пошагового нагружения в расчетной модели формируется несколько стадий напряженно-деформированного состояния: стадия упругой работы под нагрузкой, стадия формирования микроразрушений, стадия слияния микроразрушений в макро-разрушения и стадия полного разрушения модели. Таким образом, схема работы модели в численном эксперименте хорошо коррелирует с данными, полученными в процессе физического эксперимента.

Численное исследование позволяет определить порядок включения элементов каменной кладки в процесс пластической фазы деформирования. Анализ формирования локальных разрушений в различных группах КЭ модели позволяет установить степень влияния различных типов элементов каменной кладки как двухкомпонентного композита, включая элементы, обеспечивающие взаимодействие базовых материалов, в формировании локальных разрушений, магистральных трещин и собственно в разрушении образца (модели).

Так, в течение упругой фазы деформирования (до уровня нагрузки  $P = 58,9$  кН) происходит раскрытие-закрытие трещин в вертикальных растворных швах периферийных зон модели. При уровне нагрузки  $P = 58,9$  кН формируются первые группы и одиночные «разрушенные» КЭ в адгезионных слоях горизонтальных растворных швов (критерий – сдвиг в условиях сжатия).

При уровне нагрузки  $P = 68,7$  кН формируются начальные зоны «разрушения» в адгезионных слоях горизонтальных растворных швов, расположенных в центре модели (критерий – сдвиг в условиях растяжения и сжатия). В нескольких КЭ адгезионного слоя горизонтальных швов превышена адгезионная прочность по критерию напряжений растяжения.

При уровне нагрузки  $P = 78,5$  кН возрастает объем локальных «разрушений» КЭ в адгезионных слоях горизонтальных растворных швов в большей степени по критерию сдвига в условиях сжатия, в меньшей – по критерию сдвига в условиях растяжения.

При уровне нагрузки  $P = 88,3$  кН формируются протяженные зоны «разрушенных» КЭ адгезионных слоев горизонтальных швов (критерий – сдвиг в условиях сжатия и растяжения); формируются первые начальные участки «разрушенного» горизонтального растворного шва (критерий Кюпфера); образуются первые «разрушенные» КЭ кирпича (критерий Кюпфера), расположенные на грани, контактирующей с горизонтальным швом (рис. 7). Наиболее вероятной причиной появления начальных разрушений кирпича является накопленный объем «разрушений» адгезионных слоев, что приводит к формированию локальных зон повышенных напряжений в КЭ кирпича.

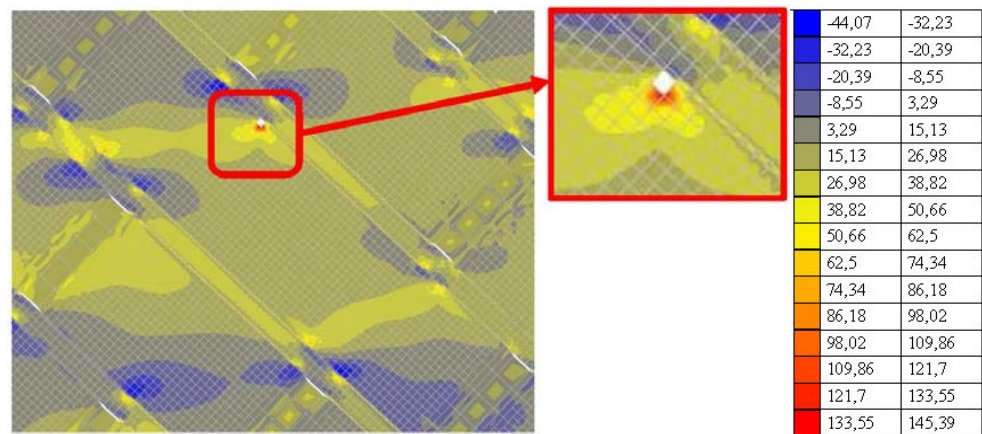


Рис. 7. Формирование первых локальных «разрушений» в кирпиче. Слева – схема изополей напряжений в КЭ модели, справа – цветовая шкала напряжений (размерность – т/м<sup>2</sup>)

С учетом приведенных выше обоснований при уровне нагрузки  $P = 88,3$  кН выполнен цикл промежуточных этапов расчета с целью учета влияния локальных разрушений в кирпиче на НДС прилегающих элементов модели. Установлено, что «разрушения» в кирпиче развиваются по ожидаемой трассе, которая совпадает с положением площадок главных растягивающих напряжений. При этом в одной из зон, прилегающих к начальным локальным «разрушениям» кирпича, наблюдается увеличение объема таких «разрушений» на каждом этапе расчета (при постоянной нагрузке), что позволяет трактовать указанное явление как формирование сквозной трещины в кирпиче (рис. 8). В других зонах начальных «разрушений» КЭ кирпича



нарастание объема «разрушенных» КЭ прекращается на одном из начальных этапов расчета при постоянной нагрузке, что позволяет установить факт «затухания» трещины.

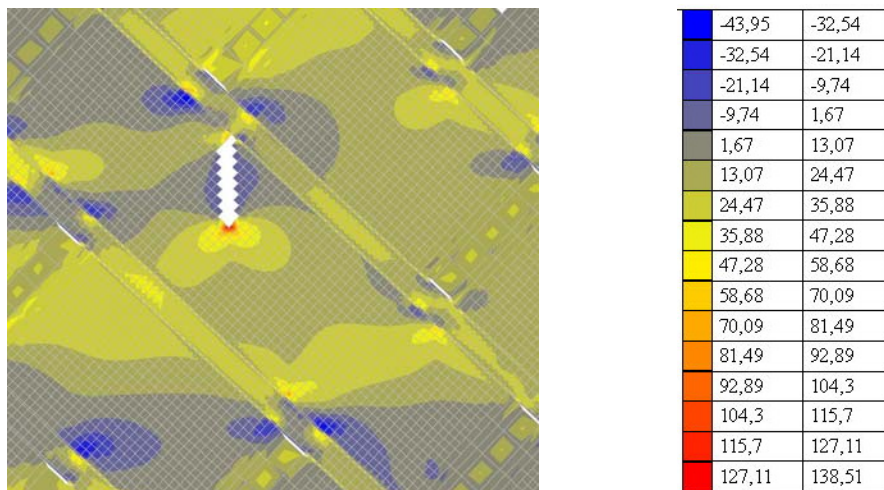


Рис. 8. Трасса трещины в кирпиче (увеличение объема локальных «разрушений») при постоянной нагрузке. Слева – схема «разрушенных» КЭ кирпича и изополя напряжений в КЭ модели при постоянной нагрузке, справа – цветовая шкала напряжений (размерность –  $\text{т/м}^2$ )

Следует отметить, что на каждом промежуточном этапе расчета при постоянной нагрузке с отслеживанием накопления «разрушений» максимальные значения напряжений снижаются (рис. 7, 8). Такое снижение напряжений определяется постоянным уровнем нагрузки и ростом объема локальных «разрушений». В отдельных зонах локальных «разрушений» напряжения могут снизиться до уровня, при котором не происходит превышения критериев прочности, и трещина «затухает».

По результатам расчетов при уровне нагрузки  $P = 88,3$  кН установлено, что два кирпича в центральной зоне образца получили «сквозную трещину». Это было учтено в модели, переданной на расчет при следующем (увеличенном) уровне нагрузок (рис. 9).

При уровне нагрузки  $P = 93,2$  кН объем локальных «разрушений» возрастает в каждой группе КЭ. В наибольшей степени увеличен объем «разрушенных» адгезионных слоев горизонтальных швов (критерий – сдвиг в условиях сжатия и растяжения), увеличилось число «разрушенных» КЭ, аппроксимирующих раствор в горизонтальном шве, возросло число «разрушенных» КЭ, аппроксимирующих кирпич. С учетом новых объемов локальных «разрушений» кирпича выполнен цикл промежуточных этапов расчета (с постоянной нагрузкой) с целью учета влияния локальных разрушений, в результате которых установлено формирование сквозных трещин в шести кирпичах.

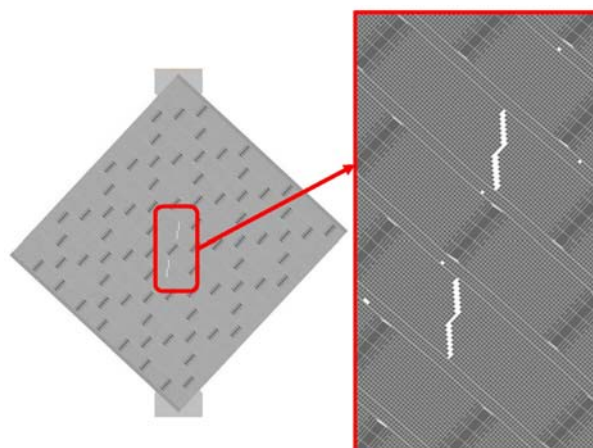


Рис. 9. Модель образца с кирпичами, получившими сквозные трещины

При уровне нагрузки  $P = 96,14$  кН рассматривалась модель со сквозными трещинами в кирпиче (2 кирпича – на этапе нагрузки  $P = 88,3$  кН и 6 кирпичей на этапе нагрузки  $P = 93,2$  кН). По результатам расчета установлено слияние локальных «разрушений» в структурных элементах кладки в магистральную трещину с переходом к «разрушению» образца. Деформированное состояние модели на этапе разрушения представлено на рис. 10.

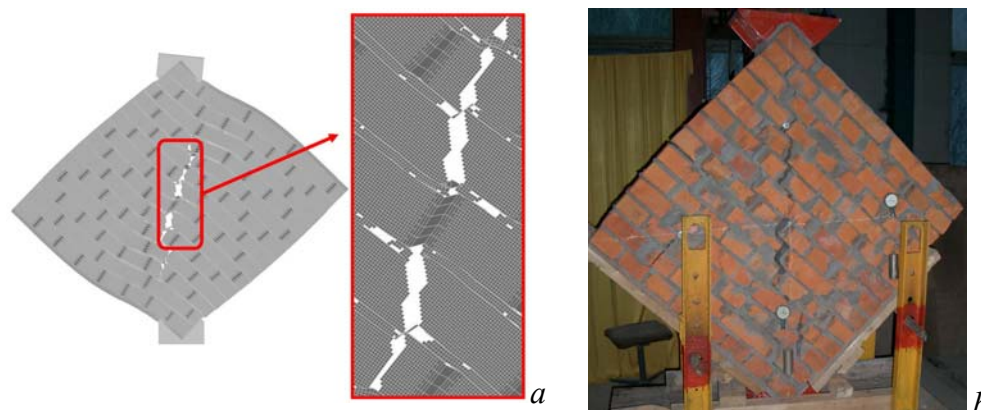


Рис. 10. Деформированное состояние модели образца на этапе разрушения:  
*a* – общий вид деформированного состояния модели с детализацией центральной зоны; *b* – разрушение образца в физическом эксперименте [14]

Сопоставление результатов экспериментальных исследований позволяет сделать вывод о хорошей корреляции результатов физического и численного экспериментов. Уровни разрушающих нагрузок достаточно близки – различия составляют 3–5 %. Схемы деформирования образца и дискретной модели под нагрузкой совпадают. Величины деформаций сжатия образцов под возрастающей нагрузкой имеют хорошую корреляцию (в пределах 12–13 %). Пластическая фаза деформирования образца и дискретной модели происходит

по совпадающей схеме – стадия формирования микроразрушений, стадия слияния локальных разрушений в трещины, стадия формирования магистральных трещин и стадия полного разрушения.

Таким образом, разработанная дискретная модель каменной кладки корректно отражает процессы упругопластического деформирования и разрушения в условиях двухосного напряженного состояния.

### Выводы

Разработанная дискретная модель каменной кладки для условий двухосного напряженного состояния и предложенная система критериев прочности обеспечивают корректное моделирование процесса деформирования в упругой и пластической фазах с переходом к стадии разрушения.

Численные исследования, выполненные на основе разработанной дискретной модели каменной кладки, позволяют оценить степень влияния любого параметра (деформационного или прочностного) на схему упругопластического деформирования модели. Результаты таких исследований могут служить основанием для формулирования научно обоснованных критериев предельных состояний каменной кладки при различных механических характеристиках базовых материалов и связей между ними. Критерии предельных состояний каменной кладки, обоснованные численными исследованиями, позволяют получить достоверную оценку сейсмостойкости каменных зданий, а также определить резервы несущей способности каменных конструкций для других особых режимов эксплуатационного периода.

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Kabantsev, O.* Modeling Nonlinear Deformation and Destruction Masonry under Biaxial Stresses. Part 1. Masonry as Simulation Object / O. Kabantsev // *Applied Mechanics and Materials*. (2015), 725–726. – P. 681–696.
2. *Kabantsev, O.* Modeling Nonlinear Deformation and Destruction Masonry under Biaxial Stresses. Part 2. Strength Criteria and Numerical Experiment / O. Kabantsev. *Applied Mechanics and Materials*. (2015), 725–726. – P. 808–819.
3. *Кашеварова, Г.Г.* Численный анализ эффективных упругих свойств материала кирпичной кладки / Г.Г. Кашеварова, Н.А. Труфанов // *Механика композиционных материалов и конструкций*. – Т. 11. – № 1. – М., 2005. – С. 49–60.
4. *Пангаев, В.В.* Модельные исследования напряженно-деформированного состояния каменной кладки при сжатии / В.В. Пангаев [и др.] // *Известия вузов. Строительство*. – 2003. – № 2. – С. 24–29.
5. *Page, A.W.* A non-linear analysis of the composite action of masonry walls on beams / A.W. Page // *Proc. Inst. Civ. Eng.* 1979. – Vol. 67. – March. – P. 93–100.
6. *Lemos, J.V.* Discrete Element Modeling of Masonry Structures / José V. Lemos // *International Journal of Architectural Heritage*. – 2007. – 1. – P. 190–213.
7. *Gabor, A.* Modelling approaches of the in-plane shear behaviour of unreinforced and FRP strengthened masonry panels / A. Gabor, A. Bennani, E. Jacquelin, F. Lebon // *Composite Structures* 74 (2006). P. 277–288.
8. *Lourenco, P.B.* Computational strategies for masonry structures / P.B. Lourenco // Ph. D. Thesis. Delft University of Technology. Delft. The Netherlands, 1996.

9. *Гениев, Г.А.* О критерии прочности каменной кладки при плоском напряженном состоянии / Г.А. Гениев // Строит. механика и расчет сооружений. – 1979. – № 2. – С. 7–11.
10. *Кабанцев, О.В.* Частные критерии прочности каменной кладки для анализа упруго-пластического деформирования / О.В. Кабанцев // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. – М., 2013. – № 3. – С. 36–41.
11. *Онищик, Л.И.* Каменные конструкции промышленных и гражданских зданий / Л.И. Онищик. – М.; Л. : Государственное издательство строительной литературы, 1939. – 208 с.
12. *Тонких, Г.П.* Экспериментальные исследования несущей способности комбинированной каменной кладки при главных нагрузках / Г.П. Тонких, В.В. Кошаев, О.В. Кабанцев // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. – 2007. – № 6. – С. 12–16.
13. *Копаница, Д.Г.* Экспериментальные исследования фрагментов кирпичной кладки на действие статической и динамической нагрузки / Д.Г. Копаница, О.В. Кабанцев, Э.С. Усеинов // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. – 2012. – № 4. – С. 157–178.
14. *Экспериментальные исследования сейсмоусиления каменной кладки наружными бетонными аппликациями* / Г.П. Тонких, О.В. Кабанцев, О.А. Симаков, А.Б. Симаков, С.М. Баев, П.С. Панфилов // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. М., 2011. – № 2. – С. 35–42.
15. *SCAD Office.* Версия 21. Вычислительный комплекс SCAD++ / В.С. Карпиловский, Э.З. Криксунов, А.А. Маляренко, М.А. Микитаренко, А.В. Перельмутер, М.А. Перельмутер. – М. : Издательство СКАД СОФТ, АСВ. – 2015. – 808 с.
16. *Вильдеман, В.Э.* Механика неупругого деформирования и разрушения композиционных материалов / В.Э. Вильдеман, Ю.В. Соколкин, А.А. Ташкинов ; под ред. Ю.В. Соколкина. – М. : Наука. Физматлит. – 1997. – 228 с.
17. *Перельмутер, А.В.* Расчетные модели сооружений и возможность их анализа / А.В. Перельмутер, В.И. Сливкер. – М. : СКАДСОФТ, АСВ, ДМК Пресс. – 2011. – 709 с.
18. *Кабанцев, О.В.* Учет изменений расчетной схемы при анализе работы конструкции / О.В. Кабанцев, А.Г. Тамразян // Инженерно-строительный журнал. – 2014. – № 5. – С. 15–26.
19. *Бураго, Н.Г.* Моделирование разрушения упругопластических тел / Н.Г. Бураго // Вычислительная механика сплошных сред. – 2008. – Т. 1. – № 4. – С. 5–20.
20. *Ильюшин, А.А.* Механика сплошной среды / А.А. Ильюшин. – М. : Издательство Московского университета. – 1978. – 287 с.
21. *Кабанцев, О.В.* Учет изменения жесткостей элементов в процессе монтажа и эксплуатации / О.В. Кабанцев, А.В. Перельмутер // Инженерно-строительный журнал. – 2015. – № 5. – С. 6–14.
22. *Сергеев, Н.Д.* Расчет статически неопределимых систем при их многократной последовательной модификации / Н.Д. Сергеев // Строительная механика и расчет сооружений. – 1975. – № 6. – С. 11–16.
23. *Мажид, К.И.* Оптимальное проектирование конструкций / К.И. Мажид. – М. : Высшая школа, 1979. – 237 с.
24. *Küpfer, H.B.* Das nicht-lineare Verhalten des Betons bei zweiachsiger Beanspruchung / H.B. Küpfer // Beton und Stahlbetonbau. – 1973. – № 11. – P. 269–273.
25. *Sousa, R.* Guedes Diagonal compressive strength of masonry samples – experimental and numerical approach / R. Sousa, J. H/Sousa, // Materials and Structures. – 2013. – № 46. – P. 765–786.
26. *Поляков, С.В.* Монолитность каменной кладки / С.В. Поляков, С.М. Сафаргалиев. – Алма-Ата, 1991. – 160 с.
27. *Fattal, S.* Failure hypothesis for masonry shear walls / S. Fattal, F. Jokel // Proceedings of ASCE. – 1976. – Vol. 102. – № ST3. – P. 515–532.
28. *Schubert, P.* Schubfestigkeit von Mauerwerk aus Leichtbetonsteinen / P. Schubert, D. Bohene // das Mauerwerk Heft 3, Ernst & John. – 2002. – P. 98–102.

29. Capozucca, R. Shear behaviour of historic masonry made of clay bricks / R. Capozucca // The Open Construction and Building Technology Journal. – 2011. – № 5 (Suppl 1-M6). – P. 89–96.

## REFERENCES

1. Kabantsev O. Modeling nonlinear deformation and destruction masonry under biaxial stresses. Part 1. Masonry as simulation object. *Applied Mechanics and Materials*. 2015. 725–726. Pp. 681–696.
2. Kabantsev O. Modeling nonlinear deformation and destruction masonry under biaxial stresses. Part 2. Strength criteria and numerical experiment. *Applied Mechanics and Materials*. 2015. 725–726. Pp. 808–819.
3. Kashevarova G.G., Trufanov N.A. Chislennyi analiz effektivnykh uprugikh svoystv materiala kirpichnoi kladki [Numerical analysis of effective elastic properties of masonry]. *Journal on Composite Mechanics and Design*, V. 11. 2005. No. 1. Pp. 49–60. (rus)
4. Pangaev V.V. Model'nye issledovaniya napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya kamennoi kladki pri szhatii [Model studies of the stress-strain state of the masonry in compression]. *News of Higher Educational Institutions. Construction*. 2003. No. 2. Pp. 24–29. (rus)
5. Page A.W. A non-linear analysis of the composite action of masonry walls on beams. *Proc. Inst. Civ. Eng.* 1979. V. 67. Pp. 93–100.
6. Lemos J.V. Discrete Element Modeling of Masonry Structures. *International Journal of Architectural Heritage*. 2007. No. 1. Pp. 190–213.
7. Gabor A., Bennani A., Jacquelin E., Lebon F. Modelling approaches of the in-plane shear behaviour of unreinforced and FRP strengthened masonry. *Composite Structures*, 2006. No. 74. Pp. 277–288.
8. Lourenco P.B. Computational strategies for masonry structures. PhD Thesis. Delft University of Technology. Delft. The Netherlands. 1996.
9. Geniev G.A. O kriterii prochnosti kamennoi kladki pri ploskom napriazhennom sostoianii [Strength criteria of masonry with plane stress state]. *Stroitel'stvo. mekh. i raschet sooruzhenii*. 1979. No. 2. Pp. 7–11.
10. Kabantsev O.V. Chastnyye kriterii prochnosti kamennoi kladki dlya analiza uprugoplasticheskogo deformirovaniya [Partial criteria of masonry strength for elastoplastic deformation]. *Seismostoiikoe stroitel'stvo. Bezopasnost sooruzhenii*. 2013. No 3. Pp. 36–41. (rus).
11. Onishchik L.I. Kamennye konstrukcii promyshlennykh i grazhdanskikh zdaniy [Stone construction of industrial and civil buildings]. Moscow, Leningrad. Gosizdatel'stvo stroitel'noi literatury. 1939. 208 p. (rus).
12. Tonkikh G.P., Kabantsev O.V., Koshayev V.V. Metodika eksperimentalnykh issledovaniy po usileniyu zdaniy iz kamennoi kladki zhelezobetonnyimi aplikatsiyami [Experimental research methodology for masonry building strengthening with concrete applications]. *Seismostoiikoe stroitel'stvo. Bezopasnost sooruzhenii*. 2005. No. 6. Pp. 63–65. (rus).
13. Kopanitsa D.G., Kabantsev O.V., Useinov E.S. Eksperimentalnye issledovaniia fragmentov kirpichnoi kladki na deistvie staticheskoi i dinamicheskoi nagruzki [Experimental research of masonry fragments under static and dynamic loads]. *Vestnik TSUAB*. 2012. No. 4. Pp. 157–178. (rus).
14. Tonkikh G.P., Kabantsev O.V., Simakov O.A., Simakov A.B., Baev S.M., Panfilov P.S. Eksperimentalnye issledovaniia seismosileniia kamennoi kladki naruzhnymi betonnyimi aplikatsiyami [Experimental research of seismic reinforcement of masonry by exterior concrete applications]. *Seismostoiikoe stroitel'stvo. Bezopasnost sooruzhenii*. 2011. No. 2. Pp. 35–42 (rus).
15. Karpilovskiy V.S., Kriksunov E.Z., Malyarenko A.A., Mikitarenko M.A., Perelmuter A.V., Perelmuter M.A. SCAD office. Versiya 21. Vychislitel'nyy kompleks SCAD++ [SCAD office. Edition 21. System SCAD++]. Moscow : SCAD SOFT, ASV Publ., 2015. 808 p. (rus)
16. Vildeman V.E., Sokolkin Iu.V., Tashkinov A.A. Mekhanika neuprugogo deformirovaniia i razrusheniia kompozitsionnykh materialov. Pod red. Iu.V. Sokolkina [Mechanics of inelastic deformation and destruction composite materials]. Moscow: Nauka Publ., Fizmatlit Publ., 1997. 228 p. (rus)

17. *Perelmuter A.V., Slivker V.I.* Raschetnyie modeli sooruzheniy i vozmozhnost ih analiza [Design models of structures and their analysis]. Moscow : SKADSOFT, ASV, DMK Press. 2011. 709 p. (rus).
18. *Kabantsev O.V., Tamrazyan A.G.* Uchet izmeneniy raschetnoy skhemy pri analize raboty konstruktсии [Structural behavior analysis considering changes in design model]. *Magazine of Civil Engineering*. 2014. No. 5. Pp. 15–26. (rus).
19. *Burago N.G.* Modelirovanie razrusheniia uprugoplasticheskikh tel [Destruction model of elastoplastic bodies]. *Computational Continuum Mechanics*. 2008. V. 1. No. 4. Pp. 5–20. (rus).
20. *Iliushin A.A.* Mekhanika sploshnoi sredy [Mechanics of Continuum]. MSU Publ., 1978. 287 p. (rus).
21. *Kabantsev O.V., Perelmuter A.V.* Uchet izmeneniya zhestkosti elementov v protsesse montazha i ekspluatatsii [Element stiffness change during mounting and operation]. *Magazine of Civil Engineering*. 2015. No. 1. Pp. 6–14. (rus)
22. *Sergeev N.D.* Raschet staticheskii neopredelimiyy sistem pri ih mnogokratnoy posledovatelnoy modifikatsii [Calculation of statically indeterminate systems with their multiple sequential modification]. *Stroit. mekh. i raschet sooruzhenii*. 1975. No. 6. Pp. 11–16. (rus).
23. *Mazhid K.I.* Optimal'noe proektirovanie konstruktсии [Optimum structural design]. Moscow : Vysshaya Shkola Publ., 1979. 237 p. (rus)
24. *Küpfer H.B.* Das nicht-lineare Verhalten des Betons bei zweiachsiger Beanspruchung . *Beton und Stalhbetonbau*. 1973. No. 11. Pp. 269–273.
25. *Sousa R., Sousa H., Guedes J.* Diagonal compressive strength of masonry samples – experimental and numerical approach. *Materials and Structures*. 2013. No. 46. Pp. 765–786.
26. *Polyakov S.V., Safargaliyev S.M.* Monolitnost kamennoy kladki [Monolithic masonry]. Alma-Ata. 1991. 160 p. (rus).
27. *Fattal S., Jokel F.* Failure hypothesis for masonry shear walls. *Proceedings of ASCE*. 1976. V. 102. No. ST3. Pp. 515–532.
28. *Schubert P., Bohene D.* Schubfestigkeit von Mauerwerk aus Leichtbetonsteinen. Das Mauerwerk Heft 3, Ernst & John. 2002. Pp. 98–102.
29. *Capozucca R.* Shear behavior of historic masonry made of clay bricks. *The Open Construction And Building Technology Journal*. 2011. No. 5. (Suppl 1-M6). Pp. 89–96.