

УДК 624.072.2/.7:624.042.7.001.5

*КУМПЯК ОЛЕГ ГРИГОРЬЕВИЧ, докт. техн. наук, профессор,
ogkumpyak@yandex.ru*

*КОКОРИН ДЕНИС НИКОЛАЕВИЧ, инженер,
kokorindenn@yandex.ru*

*Томский государственный архитектурно-строительный университет,
634003, г. Томск, пл. Соляная, 2*

ФИЗИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ЖЕЛЕЗОБЕТОНА С ТРЕЩИНАМИ ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКОГО РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ

На основе личных исследований авторов с учетом обобщения опыта отечественных и зарубежных исследований в статье на основе равновесия плосконапряженного элемента с трещинами представлена физическая модель динамического деформирования железобетона. Модель учитывает влияние таких факторов, как скорость деформирования, косвенное армирование, характер трещинообразования на прочностные свойства бетона и арматуры, сопротивление бетона по берегам трещины при её подвижке, нагельный эффект и другие факторы.

Ключевые слова: динамическое упрочнение; нелинейный расчет; физическая модель железобетона; динамическая модель железобетона с трещинами.

OLEG G. KUMPYAK, DSc, Professor,

ogkumpyak@yandex.ru

DENIS N. KOKORIN, Engineer,

kokorindenn@yandex.ru

*Tomsk State University of Architecture and Building,
2, Solyanaya Sq., 634003, Tomsk, Russia*

CRACKED CONCRETE PHYSICAL EQUATIONS FOR DYNAMIC STRUCTURAL ANALYSIS

The paper presents the physical model of the dynamic deformation of reinforced concrete. The model is constructed on the basis of research and generalized experience of national and international research. The model considers such factors as the rate of deformation, confinement reinforcement, crack formation affecting strength properties of the reinforced concrete, concrete resistance by crack edges, driftbolt effect, and others.

Keywords: dynamic strengthening; non-linear design analysis; reinforced concrete model; dynamic model of reinforced cracked concrete.

Необходимым условием совершенствования методов расчета железобетонных конструкций является развитие физических моделей, позволяющих описать напряженно-деформированное состояние железобетона на всех стадиях деформирования конструкции, от начала приложения нагрузки до разрушения. Физические модели, как правило, основываются на анализе и обобщении экспериментальных данных. Различные модели расчета железобетона при статическом нагружении позволяют получать достаточно сопоставимые

между собой результаты. К сожалению, при интенсивном динамическом нагружении модели, адекватно описывающие поведение железобетона, требуют существенного развития.

Среди исследователей нет единого подхода к описанию железобетонной модели в расчетных схемах. Ряд исследователей [3, 11, 12, 14–16] предлагают вводить дополнительный расчетный параметр в матрицу упругости материала, в котором учитывается жесткость элемента с трещинами. Другие исследователи предлагают формировать матрицу упругости на основе деформирования железобетона с трещинами, учитывая возможность сопротивления железобетона на разных стадиях [1, 2, 5, 7, 8, 10].

В излагаемом материале на основе теории профессора Н.И. Карпенко [2] приводится вывод коэффициентов матрицы податливости $[c]$ обобщенного закона Гука с учетом особенностей динамического деформирования железобетона с трещинами [2, 4, 9], $\{\varepsilon\} = [c] \cdot \{\sigma\}$, где $\{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}$ – вектор деформаций; $\{\sigma\}^T = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}$ – вектор напряжений;

$$|c| = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Также при выводе физических уравнений приняты следующие предпосылки:

- трещины образуются и развиваются по площадкам, на которых действуют главные растягивающие напряжения;
- арматура в трещинах полностью воспринимает растягивающие усилия;
- при смещении берегов трещины возникают нормальные и касательные напряжения, которые учитываются в расчете как функция от ширины раскрытия трещины (a_{crc}) и сдвигового смещения ее берегов ($\Delta_{сд}$);
- сопротивление арматуры срезу (нагельный эффект) учитывается в сечении с трещиной. На участке между трещинами его значением пренебрегаем;
- поперечные деформации для полос бетона между трещинами не учитываются (коэффициент Пуассона $\nu_b = 0$).

Рассматривается общая схема армирования: арматура расположена во взаимно ортогональных направлениях, совпадающих с координатными осями x и y , а также имеется наклонная арматура, расположенная под углом β к горизонтальной оси (рис. 1).

Направление критического хода трещин примем на основе исследований В.П. Митрофанова, R.C. Fenwick, T. Paulay, J.C. Walraven [6, 14, 17]:

$$\frac{d \Delta_{сд}}{d a_{crc}} = a_{crc}^{0,18} (1,65 + 2,1 a_{crc}) - 1,5 \Delta_{сд}. \quad (2)$$

В качестве расчетной предпосылки для определения касательных и нормальных напряжений, возникающих по берегам трещины при её смеще-

нии, примем теорию прочности бетонных «зубьев», предложенную J. Мое [17], P. Stroeven [18], J.C. Walraven [19].

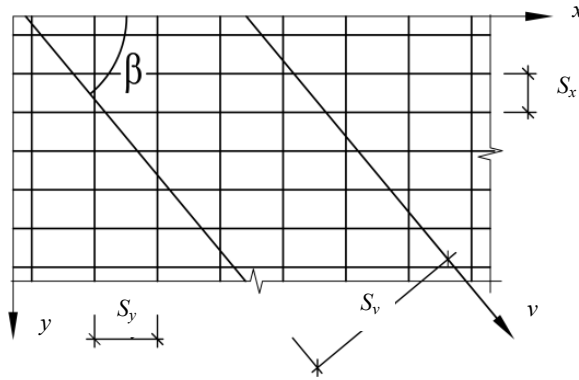


Рис. 1. Схема армирования железобетонного элемента:
 S_x, S_y, S_v – шаг арматуры в соответствующем направлении x, y, v

Функциональные зависимости для определения касательных ($\tau_{b,3}$) и нормальных ($\sigma_{b,3}$) напряжений, возникающих по берегам трещины, представлены в работе [4].

Рассматриваем непересекающиеся трещины, наиболее распространенные при плоском напряженном состоянии. Определим зависимости между напряжениями в арматуре, пересекающей трещину, касательными τ_{xy}, τ_{yx} и нормальными σ_x, σ_y полными напряжениями, действующими по граням характерной пластинки.

Изменениями напряжений по длине граней пластинки и по ее толщине пренебрегаем. Рассмотрим равновесие треугольной призмы aob , наклонная грань которой (ab) проходит по трещине, а две другие совпадают с направлениями осей x и y (рис. 2).

Длину грани ab примем равной единице. Уравнения равновесия примут вид:

$$\begin{aligned} \sigma_x \sin \alpha + \tau_{yx} \cos \alpha &= \sigma_{sx} \sin \alpha \mu_{sx} - \tau_{xy} \cos \alpha \mu_{sy} - \tau_{b,3} \cos \alpha + \\ &+ \sigma_{b,3} \sin \alpha + \sigma_{sv} \mu_{sv} \sin(\alpha + \beta) \cos \beta - \tau_{sv} \mu_{sv} \sin(\alpha + \beta) \sin \beta; \\ \sigma_y \cos \alpha + \tau_{xy} \sin \alpha &= \sigma_{sy} \cos \alpha \mu_{sy} + \tau_{sx} \sin \alpha \mu_{sx} + \tau_{b,3} \sin \alpha + \\ &+ \sigma_{b,3} \cos \alpha + \sigma_{sv} \mu_{sv} \sin(\alpha + \beta) \sin \beta + \tau_{sv} \mu_{sv} \sin(\alpha + \beta) \cos \beta, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ – компоненты полных напряжений, действующих по плоским граням элемента, равные сумме усредненных напряжений в бетоне ($\sigma_{bx}, \sigma_{by}, \tau_{bxy}$) и напряжений в арматуре ($\sigma_{sx}, \sigma_{sy}, \tau_{sxy}$).

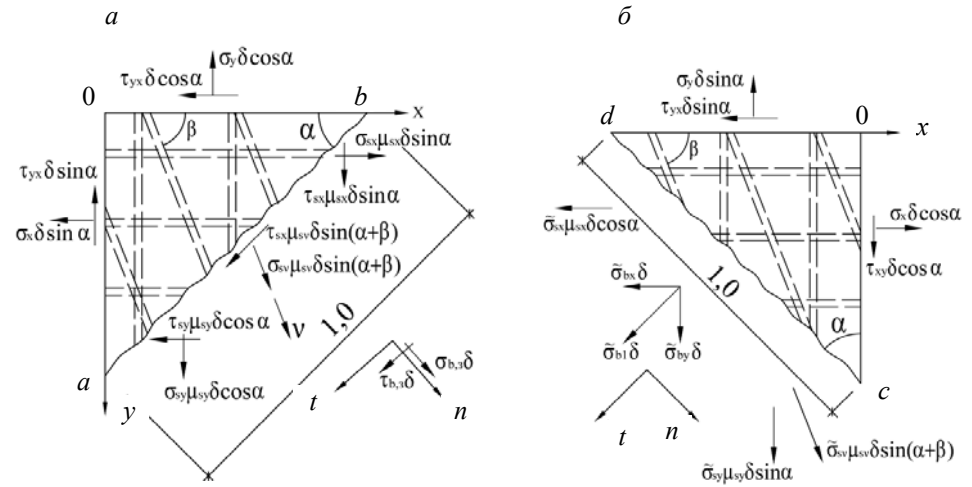


Рис. 2. К определению напряжений в арматуре в сечении с трещиной (а) и на участке между трещинами (б)

$$\sigma_x = \sigma_{bx} + \sigma_{sx}; \sigma_y = \sigma_{by} + \sigma_{sy}; \tau_{xy} = \tau_{bxy} + \tau_{sxy}, \quad (4)$$

где

$$\sigma_{sx} = E'_{sx} \epsilon_{sx} \mu_{sx} + E'_{sv} \epsilon_{sv} \mu_{sv} \cos \beta; \quad \sigma_{sy} = E'_{sy} \epsilon_{sy} \mu_{sy} + E'_{sv} \epsilon_{sv} \mu_{sv} \sin \beta;$$

$$\tau_{sxy} = 0,2(\mu_{sx} E'_{sx} + \mu_{sv} E'_{sv} \cos \beta + \mu_{sy} E'_{sy} + \mu_{sv} E'_{sv} \sin \beta) \gamma_{xy},$$

где

$E'_{sx}, E'_{sy}, E'_{sv}$ – секущие модули деформации арматуры соответствующего направления.

Из системы уравнений (3) выразим напряжения в горизонтальной (σ_{sx}) и вертикальной (σ_{sy}) арматуре в сечении с трещиной:

$$\sigma_{sx} = \frac{\sigma_x + \tau_{yx} \operatorname{ctg} \alpha - \sigma_{sv} \mu_{sv} \sin(\alpha + \beta) \cos \beta / \sin \alpha}{\mu_{sx} - \Phi_y \cos \alpha - \Phi_{bx} \cos \alpha + \Omega_x - \Phi_{sx} \mu_{sv} \sin(\alpha + \beta) \sin \beta / \sin \alpha}; \quad (5)$$

$$\sigma_{sy} = \frac{\sigma_y + \tau_{yx} \operatorname{ctg} \alpha - \sigma_{sv} \mu_{sv} \sin(\alpha + \beta) \sin \beta / \cos \alpha}{\mu_{sy} + \Phi_x \sin \alpha + \Phi_{by} \sin \alpha + \Omega_y + \Phi_{sy} \mu_{sv} \sin(\alpha + \beta) \cos \beta / \cos \alpha},$$

где $\Phi_x, \Phi_y, \Phi_{sx}, \Phi_{sy}$ – функциональные зависимости, характеризующие сопротивление арматуры срезу, представлены в работе [4].

Для определения напряжений в наклонной арматуре принимаем условие совместности деформаций арматуры в трещине, полученное в работе [2], которое имеет вид

$$\frac{\sigma_{sv}}{E'_{sv} \sin(\alpha+\beta)} = \frac{\sigma_{sx} \cos \beta}{E'_{sx} \sin \alpha} + \frac{\sigma_{sy} \sin \beta}{E'_{sx} \cos \alpha}. \quad (6)$$

Напряжения в наклонной арматуре получаем из (6) с учетом (5)

$$\sigma_{sv} = \frac{(\sigma_x + \tau_{xy} \operatorname{ctg} \alpha) \cos \beta}{AE'_{sx} \sin \alpha \Omega^*} + \frac{(\sigma_{yx} + \tau_{yx} \operatorname{tg} \alpha) \sin \beta}{BE'_{sy} \cos \alpha \Omega^*}, \quad (7)$$

Ω^* , A , B – выражения, принятые согласно [4].

Подставляя (7) в (5), получим окончательные выражения для σ_{sx} и σ_{sy} :

$$\begin{aligned} \sigma_{sx} &= \frac{\sigma_x + \tau_{yx} \operatorname{ctg} \alpha}{A} - \frac{(\sigma_x + \tau_{yx} \operatorname{ctg} \alpha) \mu_{sv} \sin(\alpha+\beta) \cos^2 \beta}{A^2 E'_{sx} \sin^2 \alpha \Omega^*} - \\ &\quad - \frac{(\sigma_y + \tau_{yx} \operatorname{tg} \alpha) \mu_{sv} \sin(\alpha+\beta) \sin^2 \beta}{ABE'_{sy} \sin 2\alpha \Omega^*}; \\ \sigma_{sy} &= \frac{\sigma_y + \tau_{xy} \operatorname{tg} \alpha}{B} - \frac{(\sigma_x + \tau_{yx} \operatorname{ctg} \alpha) \mu_{sv} \sin(\alpha+\beta) \sin 2\beta}{ABE'_{sx} \sin 2\alpha \Omega^*} - \\ &\quad - \frac{(\sigma_y + \tau_{yx} \operatorname{tg} \alpha) \mu_{sv} \sin(\alpha+\beta) \sin^2 \beta}{B^2 E'_{sy} \cos 2\alpha \Omega^*}. \end{aligned} \quad (8)$$

Средние относительные деформации арматуры на участке между трещинами определим из выражений:

$$\varepsilon_{smx} = \frac{\sigma_{sx} \Psi_{sx}}{E'_{sx}}; \quad \varepsilon_{smy} = \frac{\sigma_{sy} \Psi_{sy}}{E'_{sy}}. \quad (9)$$

Подставляя (8) в (9), получим

$$\varepsilon_{smx} = c_{s11} \sigma_x + c_{s12} \sigma_y + c_{s13} \tau_{xy}; \quad \varepsilon_{smy} = c_{s21} \sigma_x + c_{s22} \sigma_y + c_{s23} \tau_{xy}, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} c_{s11} &= \frac{\Psi_{sx}}{E'_{sx}} \left(\frac{1}{A} - \frac{\mu_{sv} \sin(\alpha+\beta) \cos^2 \beta}{A^2 E'_{sx} \sin^2 \alpha \Omega^*} \right); \quad c_{s12} = -\frac{\Psi_{sx} \mu_{sv} \sin(\alpha+\beta) \sin 2\beta}{E'_{sx} ABE'_{sy} \sin 2\alpha \Omega^*}; \\ c_{s13} &= -\frac{\Psi_{sx}}{E'_{sx}} \left(\frac{\operatorname{ctg} \alpha}{A} - \frac{\mu_{sv} \operatorname{ctg} \alpha \sin(\alpha+\beta) \cos^2 \beta}{A^2 E'_{sx} \sin^2 \alpha \Omega^*} - \frac{\mu_{sv} \operatorname{tg} \alpha \sin(\alpha+\beta) \sin 2\beta}{ABE'_{sx} \sin 2\alpha \Omega^*} \right); \\ c_{s21} &= -\frac{\Psi_{sy} \mu_{sv} \sin(\alpha+\beta) \sin 2\beta}{E'_{sx} ABE'_{sy} \sin 2\alpha \Omega^*}; \quad c_{s22} = \frac{\Psi_{sy}}{E'_{sy}} \left(\frac{1}{B} - \frac{\mu_{sv} \sin(\alpha+\beta) \sin^2 \beta}{B^2 E'_{sy} \cos^2 \alpha \Omega^*} \right); \\ c_{s23} &= -\frac{\Psi_{sy}}{E'_{sy}} \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha}{B} - \frac{\mu_{sv} \operatorname{ctg} \alpha \sin(\alpha+\beta) \sin 2\beta}{ABE'_{sx} \sin 2\alpha \Omega^*} - \frac{\mu_{sv} \operatorname{tg} \alpha \sin(\alpha+\beta) \sin^2 \beta}{B^2 E'_{sy} \cos^2 \alpha \Omega^*} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Для определения угла сдвига γ_{smxy} принята зависимость, аналогичная выражению, связывающему γ_{smxy} со средними линейными деформациями арматуры ε_{smx} , ε_{smy} при кратковременном действии статической нагрузки [2]:

$$\gamma_{smxy} = \varepsilon_{smx} \operatorname{ctg} \alpha + \varepsilon_{smy} \operatorname{tg} \alpha. \quad (12)$$

Подставляя (10) в (12) при условии $\tau_{yx} = \tau_{xy}$, получим

$$\gamma_{smxy} = c_{s31} \sigma_x + c_{s32} \sigma_y + c_{s33} \tau_{xy}, \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} c_{s31} &= c_{s11} \operatorname{ctg} \alpha + c_{s21} \operatorname{tg} \alpha; c_{s32} = c_{s12} \operatorname{ctg} \alpha + c_{s22} \operatorname{tg} \alpha; \\ c_{s33} &= c_{s13} \operatorname{ctg} \alpha + c_{s23} \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned} \quad (14)$$

Анализ матрицы податливости показывает, что симметричные коэффициенты относительно главной диагонали не равны между собой, что связано с анизотропией, возникающей вследствие разной неравномерности деформаций арматуры в горизонтальном и вертикальном направлениях.

Для установления влияния деформаций полос бетона между трещинами на общие деформации элемента рассмотрим равновесие треугольной призмы ocd (рис. 2). Призма ocd выделена таким образом, что наклонная грань $cd = 1$ перпендикулярна грани ab . По наклонной грани cd действуют главные сжимающие напряжения в бетоне $\tilde{\sigma}_{b1}$ и напряжения в арматуре $\tilde{\sigma}_{sx}$, $\tilde{\sigma}_{sy}$, $\tilde{\sigma}_{sv}$. Уравнения равновесия имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_x \cos \alpha - \tau_{xy} \sin \alpha &= \tilde{\sigma}_{sx} \cos \alpha \mu_{sx} + \tilde{\sigma}_{bx} - \tilde{\sigma}_{sv} \mu_{sv} \sin(\alpha + \beta) \cos \beta; \\ \sigma_y \sin \alpha - \tau_{xy} \cos \alpha &= \tilde{\sigma}_{sy} \sin \alpha \mu_{sy} + \tilde{\sigma}_{by} - \tilde{\sigma}_{sv} \mu_{sv} \sin(\alpha + \beta) \sin \beta, \end{aligned} \quad (15)$$

где $\tilde{\sigma}_{bx}$, $\tilde{\sigma}_{by}$ – проекции главного напряжения ($\tilde{\sigma}_{b1}$) на оси x и y ; $\tilde{\sigma}_{sx}$, $\tilde{\sigma}_{sy}$, $\tilde{\sigma}_{sv}$ – напряжения в арматуре между трещинами.

Приведенное усилие, воспринимаемое наклонной арматурой, определяется с площади грани δl , где $l = 1 \cdot \sin(\alpha + \beta)$ (рис. 3).

Для того чтобы выразить правые части уравнений (15) как функции деформаций бетона в направлении осей x и y , необходимо записать условия совместности деформаций арматуры на участке между трещинами и выразить их с учетом напряжения в арматуре $\tilde{\sigma}_{sx}$ и $\tilde{\sigma}_{sv}$.

Деформации бетона в направлении осей x и y определяются на основании общих зависимостей механики сплошной среды.

Взаимно ортогональные площадки cd и ab (см. рис. 2) являются главными, вследствие чего касательные напряжения для них равны нулю ($\tau_m = 0$; $\tau_n = 0$).

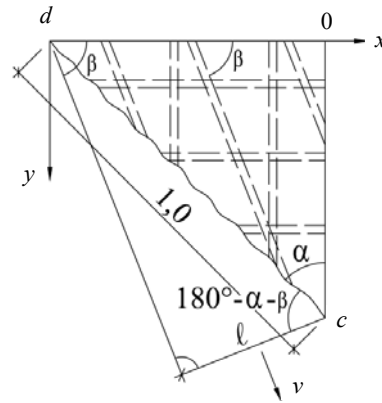
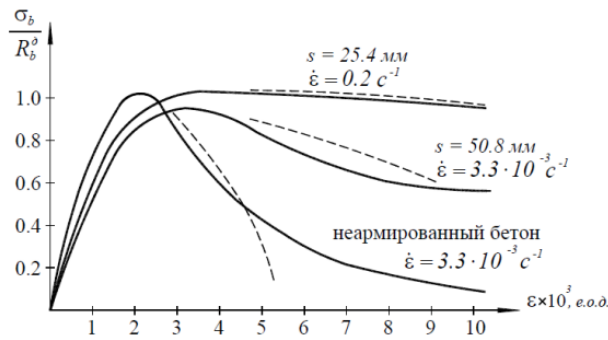


Рис. 3. Определение усилия, воспринимаемого наклонной арматурой

Тогда, принимая деформации бетона в направлении трещины (n) равными нулю, получим [4]

$$\tilde{\varepsilon}_{by} = \frac{\tilde{\sigma}_{bt}}{E'_{bt}} \sin^2 \alpha = \frac{\tilde{\sigma}_{by}}{E'_{bt}} \sin \alpha; \quad \tilde{\varepsilon}_{bx} = \frac{\tilde{\sigma}_{bt}}{E'_{bt}} \cos^2 \alpha = \frac{\tilde{\sigma}_{bx}}{E'_{bt}} \cos \alpha; \quad \tilde{\varepsilon}_{sx} = \tilde{\varepsilon}_{bx}; \quad \tilde{\varepsilon}_{sy} = \tilde{\varepsilon}_{by}, \quad (16)$$

где $\tilde{\varepsilon}_{sx}$, $\tilde{\varepsilon}_{sy}$ – деформации арматуры на участке между трещинами в направлении осей x и y ; E'_{bt} – секущий модуль деформации бетона, устанавливается на основании диаграмм деформирования, учитывающих влияние скорости деформирования и косвенного армирования на прочностные и деформативные свойства бетона [13] (рис. 4), где t – обозначение главной оси (см. рис. 2).

Рис. 4. Опытные и теоретические диаграммы σ - ε бетона, железобетона [13]:

— эксперимент; --- теория; $\dot{\varepsilon}$ – скорость деформирования; s – шаг косвенного армирования

С учетом того, что коэффициент Пуассона для полос бетона между трещинами в направлении оси v равен нулю, деформации бетона запишутся в виде

$$\tilde{\varepsilon}_{bv} = \tilde{\varepsilon}_{by} \sin^2 \beta + \tilde{\varepsilon}_{bx} \cos^2 \beta + \frac{1}{2} \tilde{\gamma}_{bxy} \sin 2\beta. \quad (17)$$

Так как $\tilde{\varepsilon}_{sv} = \tilde{\varepsilon}_{bv}$, то $\tilde{\sigma}_{sv} = \tilde{\varepsilon}_{bv} \cdot E'_{sv}$. Уравнения (15) с учетом условий совместности деформации бетона и арматуры (16), (17) примут вид:

$$\begin{aligned} \sigma_x \cdot \cos \alpha - \tau_{yx} \sin \alpha &= E'_{sx} \mu_{sx} \cos \alpha \tilde{\varepsilon}_{bx} + \frac{E'_{bt}}{\cos \alpha} \tilde{\varepsilon}_{bx} - \\ &- E'_{sv} \mu_{sv} \sin(\alpha + \beta) \cos \beta \left(\tilde{\varepsilon}_{by} \sin^2 \beta + \tilde{\varepsilon}_{bx} \cos^2 \beta + \frac{1}{2} \tilde{\gamma}_{bxy} \sin 2\beta \right); \\ \sigma_y \cdot \sin \alpha - \tau_{bx} \cos \alpha &= E'_{sy} \mu_{sy} \sin \alpha \tilde{\varepsilon}_{by} + \frac{E'_{bt}}{\sin \alpha} \tilde{\varepsilon}_{by} + \\ &+ E'_{sv} \mu_{sv} \sin(\alpha + \beta) \sin \beta \left(\tilde{\varepsilon}_{by} \sin^2 \beta + \tilde{\varepsilon}_{bx} \cos^2 \beta + \frac{1}{2} \tilde{\gamma}_{bxy} \sin 2\beta \right). \end{aligned} \quad (18)$$

В двух уравнениях (18) три неизвестных $\tilde{\varepsilon}_{bx}, \tilde{\varepsilon}_{by}, \tilde{\gamma}_{bxy}$. Для определенности задачи введем соотношение между углом сдвига бетона $\tilde{\gamma}_{bxy}$ и деформациями бетона в направлении осей x и y : $\tilde{\varepsilon}_{bx}, \tilde{\varepsilon}_{by}$.

$$\tilde{\gamma}_{bxy} = -(\tilde{\varepsilon}_{bx} \operatorname{tg} \alpha + \tilde{\varepsilon}_{by} \operatorname{ctg} \alpha) \quad [4]. \quad (19)$$

Из системы (18) с учетом соотношения (19) можно получить зависимости, связывающие деформации бетона на участке между трещинами с напряжениями по граням элемента:

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{bx} &= c_{b11} \sigma_x + c_{b12} \sigma_y + c_{b13} \tau_{yx}; \\ \tilde{\varepsilon}_{by} &= c_{b21} \sigma_x + c_{b22} \sigma_y + c_{b23} \tau_{xy}. \end{aligned} \quad (20)$$

Определение коэффициентов c_{bij} системы уравнений следующее: из уравнения (20) с учетом уравнений (19) выражаем из первого уравнения (18) $\tilde{\varepsilon}_{bx}$, и данное выражение подставляется во второе уравнение (18).

Определенные таким образом коэффициенты влияния деформаций по- лос бетона между трещинами на общие деформации элемента (c_{bij}) представляются довольно сложными математическими выражениями, по- видимому, малопримемыми для практического применения.

Влиянием деформаций наклонной арматуры на деформации бетона в направлении трещины $\tilde{\varepsilon}_{bx}$ и $\tilde{\varepsilon}_{by}$ для практических расчетов пренебрегаем. Коэффициенты c_{bij} примут вид:

$$\begin{aligned}
c_{b11} &= \frac{\cos^2 \alpha}{E'_{sx} \cos^2 \alpha \mu_{sx} + E'_{bt}}; \quad c_{b13} = -\frac{\sin 2\alpha}{2(E'_{sx} \cos^2 \alpha \mu_{sx} + E'_{bt})}; \\
c_{b22} &= \frac{\sin^2 \alpha}{E'_{sy} \sin^2 \alpha \mu_{sy} + E'_{bt}}; \quad c_{b23} = -\frac{\sin 2\alpha}{2(E'_{sy} \sin^2 \alpha \mu_{sy} + E'_{bt})}; \\
c_{b12} &= 0; \quad c_{b21} = 0.
\end{aligned} \quad (21)$$

Зависимость (19) с учетом (20) примет вид

$$\tilde{\gamma}_{bxy} = c_{b31} \sigma_x + c_{b32} \sigma_y + c_{b33} \tau_{xy}, \quad (22)$$

где

$$c_{b31} = c_{b13}; \quad c_{b32} = c_{b23}; \quad c_{b33} = \frac{\cos^2 \alpha}{E'_{sy} \sin^2 \alpha \mu_{sy} + E'_{bt}} + \frac{\sin^2 \alpha}{E'_{sx} \cos^2 \alpha \mu_{sx} + E'_{bt}}. \quad (23)$$

Относительные деформации железобетонного элемента складываются из средних относительных деформаций арматуры, связанных с раскрытием трещин и сдвигом их берегов $(\varepsilon_{smx}, \varepsilon_{smy}, \gamma_{smxy})$, и средних относительных деформаций полос бетона между трещинами $(\tilde{\varepsilon}_{bx}, \tilde{\varepsilon}_{by}, \tilde{\gamma}_{bxy})$:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{smx} + \tilde{\varepsilon}_{bx}; \quad \varepsilon_y = \varepsilon_{smy} + \tilde{\varepsilon}_{by}; \quad \gamma_{xy} = \gamma_{smxy} + \tilde{\gamma}_{bxy}$$

или

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= c_{11} \sigma_x + c_{12} \sigma_y + c_{13} \tau_{yx}; \quad \varepsilon_y = c_{21} \sigma_x + c_{22} \sigma_y + c_{23} \tau_{yx}; \\
\gamma_{xy} &= c_{31} \sigma_x + c_{32} \sigma_y + c_{33} \tau_{yx},
\end{aligned} \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned}
c_{11} &= c_{s11} + c_{b11}; \quad c_{12} = c_{s12}; \quad c_{13} = c_{s13} + c_{b13}; \quad c_{22} = c_{s22} + c_{b22}; \quad c_{21} = c_{s21}; \\
c_{31} &= c_{s31} + c_{b31}; \quad c_{32} = c_{s32} + c_{b23}; \quad c_{23} = c_{s23} + c_{b23}; \quad c_{33} = c_{s33} + c_{b33}.
\end{aligned} \quad (25)$$

Коэффициенты c_{sij} и c_{bij} определяются по формулам (11), (14), (21) и (23). При отсутствии наклонной арматуры выражения (11) и (14) упрощаются и принимают вид:

$$\begin{aligned}
c_{s11} &= \frac{\Psi_{sx}}{E'_{sx} A^*}; \quad c_{s12} = 0; \quad c_{s13} = \frac{\Psi_{sx} \operatorname{ctg} \alpha}{E'_{sx} A^*}; \quad c_{s21} = 0; \quad c_{s22} = \frac{\Psi_{sy}}{E'_{sy} B^*}; \\
c_{s23} &= \frac{\Psi_{sy} \operatorname{tg} \alpha}{E'_{sy} B^*}; \quad c_{s31} = c_{s13}; \quad c_{s32} = c_{s23}; \quad c_{s33} = c_{s11} \operatorname{ctg}^2 \alpha + c_{s22} \operatorname{tg}^2 \alpha,
\end{aligned} \quad (26)$$

где

$$A^* = \mu_{sx} - \Phi_y \cos \alpha - \Phi_{bx} \cos \alpha + \Omega_x; \quad B^* = \mu_{sy} - \Phi_x \sin \alpha - \Phi_{by} \sin \alpha + \Omega_y.$$

При отсутствии наклонной арматуры коэффициенты c_{ij} системы уравнений (24) определяются в соответствии с (25), при этом коэффициенты c_{sij} при-

нимаются по (26). Матрица коэффициентов податливости c_{sij} симметрична относительно главной диагонали. Анализ коэффициентов c_{ij} показывает, что они представляют собой функции переменных величин, определяющих нелинейный процесс динамического сопротивления железобетона: образование и раскрытие трещин; развитие нормальных и касательных напряжений, возникающих по берегам трещины при их смещении; неравномерность деформаций арматуры в сечении с трещиной и на участке между ними; влияние скорости деформирования и процента косвенного армирования, выражаемое через секущий модуль деформаций бетона, неупругие деформации арматуры и др.

Таким образом, получены коэффициенты матрицы податливости обобщенного закона Гука для железобетонного элемента с трещинами. Данные зависимости в наилучшей степени отражают физический процесс динамического деформирования железобетона с трещинами.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Балан, Т.А.* Модель деформирования бетона при кратковременном нагружении / Т.А. Балан // *Строительная механика и расчет сооружений*. – 1986. – № 4. – С. 32–36.
2. *Карпенко, Н.И.* Теория деформирования железобетона с трещинами / Н.И. Карпенко. – М. : Стройиздат, 1976. – 208 с.
3. *Кудашов, В.И.* Расчет пространственных железобетонных конструкций с учетом физической нелинейности и трещинообразования / В.И. Кудашов, В.М. Устинов // *Строительная механика и расчет сооружений*. – 1981. – № 4. – С. 6–10.
4. *Кумпяк, О.Г.* Совершенствование методов расчета железобетонных плоскостных конструкций при статическом и кратковременном динамическом нагружении : дис. ... докт. техн. наук. – Томск, 1996. – 473 с.
5. *Кумпяк, О.Г.* Прочность и деформативность железобетонных сооружений при кратковременном динамическом нагружении / О.Г. Кумпяк, Д.Г. Копаница. – Томск : СТТ, 2002. – 336 с.
6. *Митрофанов, В.П.* Напряженно-деформированное состояние прочности и трещинообразования железобетонных элементов при поперечном изгибе : автореф. дис. ... канд. техн. наук. – М., 1982. – 41 с.
7. *Мухамедиев, Т.А.* Методы расчета статически неопределимых железобетонных стержневых и плоскостных конструкций с учетом нелинейных диаграмм деформирования материала : автореф. дис. ... докт. техн. наук. – Москва, 1990. – 47 с.
8. *Петров, А.Н.* Деформационная модель нелинейной ползучести железобетона и ее приложение к расчету плосконапряженных элементов и систем из них: дис. ... докт. техн. наук. – М., 2001. – 322 с.
9. *Попов, Н.Н.* Вопросы динамического расчета железобетонных конструкций / Н.Н. Попов, О.Г. Кумпяк, В.С. Плевков. – Томск : Изд-во ТГУ, 1990. – 288 с.
10. *Попов, Н.Н.* Расчет железобетонных элементов на кратковременные динамические нагрузки с учетом реальных свойств материалов / Н.Н. Попов, Б.С. Расторгуев, О.Г. Кумпяк // *Строительная механика и расчет сооружений*. – 1979. – № 3. – С. 43–46.
11. *Смолянин, А.Г.* Математическое моделирование динамического разрушения балок и оболочек из железобетона при ударе: автореф. дис. ... канд. техн. наук. – Москва, 1985. – 24 с.
12. *Colville J., Abbasi J.* Plan stress reinforced concrete finite elements / J. Colville, J. Abbasi // *J. Struct. Div. Proc. Amer. Soc. Civ. Eng.* – 1974. – V. 100. – № 5. – P. 1067–1083.
13. *Dilger, W.H.* Ductility of Plain and Confined Concrete under Different Strain Rates / W.H. Dilger, R. Koch, R. Kowalczyk // *J. of the American Concrete Institute*. – 1984. – V. 81. – № 1. – P. 73–81.
14. *Fenwick, R.C.* Discussion of the paper by J.N.J. Kani / R.C. Fenwick, T. Paulay // *ACI Journal*, 1964. – Proc. V. 61. – № 12.

15. Huang, Y. Nonlinear analysis of reinforced concrete structures / Y. Huang // A Thesis Presented for the Degree of Doctor of Philosophy at the University of Hong Kong. – 1993. – P. 275.
16. Hyo-Gyoung Kwak. Finite element analysis of reinforced concrete structures under monotonic loads / Hyo-Gyoung Kwak, Filip C. Filippou // Report No. UCB/SEMM-90/14 Structural Engineering, Mechanics and Materials Department of Civil Engineering University of California, Berkeley. – 1990. – P. 120.
17. Moe, J. Discussion: Shear and Diagonal Tension by ACI-ASCE Committee 426 / J. Moe // ACI Journal, 1962. – Proc. V. 59. – № 9.
18. Stroeven, P. Some morphometric aspect of load transfer in cracked sections of sfrc / P. Stroeven // Механика и технология на композиционном материале. Докл. 3 нац. конф. Варна, 1982. – С. 568–571.
19. Walrawen, J.C. Scheurverstanding / J.C. Walrawen // Cement. – 1981. – XXXIII. – № 6. – P. 406–412.

REFERENCES

1. Balan T.A. Model deformirovaniya betona pri kratkovremennom nagruzhении [The model of deformation of concrete in short-time loading]. *Stroit. mekh. i raschet sooruzhenii*. 1986. No. 4. Pp. 32–36 (rus).
2. Karpenko N.I. Teoriya deformirovaniya zhelezobetona s treshchinami [The theory of deformation of reinforced concrete with cracks]. Moscow : Stroyizdat, 1976. 208 p. (rus).
3. Kudashov V.I., Ustinov V.M. Raschet prostranstvennykh zhelezobetonnykh konstruktсий s uchetom fizicheskoy nelineynosti i treshchinoobrazovaniya [Calculation of spatial reinforced concrete structures and physical nonlinearity and cracking]. *Stroit. mekh. i raschet sooruzhenii*. 1981. No. 4. Pp. 6–10 (rus).
4. Kumpyak O.G. Sovershenstvovanie metodov rascheta zhelezobetonnykh ploskostnykh konstruktсий pri staticheskom i kratkovremennom dinamicheskom nagruzhении [Improving methods of calculating concrete planar structures under static and dynamic short-time loading. DSc Thesis]. Tomsk, 1996. 473 p. (rus).
5. Kumpyak O.G., Kopanitsa D.G. Prochnost i deformativnost zhelezobetonnykh sooruzheniy pri kratkovremennom dinamicheskom nagruzhении [The strength and deformation of reinforced concrete structures under dynamic loading]. Tomsk : STT Publ., 2002. 336 p. (rus).
6. Mitrofanov V.P. Napryazhenno-deformirovannoe sostoyanie prochnosti i treshchinoobrazovaniya zhelezobetonnykh elementov pri poperechnom izgibe. Avtoref. dis. kand. tekhn. Nauk [Stress-state of strength and cracking of concrete elements under transverse bending. PhD Thesis]. Moscow, 1982. 41 p. (rus).
7. Mukhamediev T.A. Metody rascheta staticheskimi neopredelimykh zhelezobetonnykh sterzhnevyykh i ploskostnykh konstruktсий s uchetom nelineynykh diagramm deformirovaniya materiala. Avtoref. dis. d-ra [Methods of analysis of statically indeterminate reinforced concrete rod and planar structures and nonlinear diagrams of material deformation. DSc Thesis]. Moscow : 1990. 47 p. (rus).
8. Petrov A.N. Deformatsionnaya model nelineynoy polzuchesti zhelezobetona i ee prilozhenie k raschetu ploskonapryazhennykh elementov i sistem iz nikh: Diss. dok. tekhn. Nauk [Deformational nonlinear creep model and its concrete application to the calculation of plane stress elements and systems. DSc thesis]. Moscow, 2001. 322 p. (rus).
9. Popov N.N., Kumpyak O.G., Plevkov V.S. Voprosy dinamicheskogo rascheta zhelezobetonnykh konstruktсий [Problems of dynamic analysis of reinforced concrete structures]. Tomsk : TSU Publ., 1990. 288 p. (rus).
10. Popov N.N., Rastorguev B.S., Kumpyak O.G. Raschet zhelezobetonnykh elementov na kratkovremennyye dinamicheskie nagruzki s uchetom realnykh svoystv materialov. *Stroit. mekh. i raschet sooruzhenii*. 1979. № 3. Pp. 43–46. (rus).
11. Smolyanin, A.G. Matematicheskoe modelirovanie dinamicheskogo razrusheniya balok i obolochek iz zhelezobetona pri udare: avtoref. dis. ... kand. tekhn. nauk [Mathematical simulation of dynamic fracture of beams and concrete coverings. PhD Thesis]. Moscow, 1985. 24 p. (rus).

12. Colville J., Abbasi J. Plan stress reinforced concrete finite elements. *J. Struct. Div. Proc. Amer. Soc. Civ. Eng.* 1974. V. 100. No. 5. Pp. 1067–1083.
13. Dilger W.H., Koch R., Kowalczyk R. Ductility of plain and confined concrete under different strain rates. *J. American Concrete Institute*. 1984. V. 81. No. 1. Pp. 73–81.
14. Fenwick R.C., Paulay T. Discussion of the paper by J.N.J. Kani. *Proc. ACI Journal*, 1964. V. 61. No. 12.
15. Huang Y. Nonlinear analysis of reinforced concrete structures. DSc Thesis, University of Hong Kong. 1993. P. 275.
16. Hyo-Gyoung Kwak, Filip C. Filippou. Finite element analysis of reinforced concrete structures under monotonic loads. Report No. UCB/SEMM-90/14 Structural Engineering, Mechanics and Materials Department of Civil Engineering University of California, Berkeley. 1990. P. 120.
17. Moe J. Discussion: Shear and Diagonal Tension by ACI-ASCE Committee 426. *Proc. ACI Journal*, 1962. V. 59. No. 9.
18. Stroeve, P. Some morphometric aspect of load transfer in cracked sections of sfrc. *Proc. 3rd Nat. Conf.*, Varna, 1982. Pp. 568–571.
19. Walraven J.C. Scheurverstanding. *Cement*. 1981. V. XXXIII. No. 6. Pp. 406–412.