

УДК 621.646

DOI: 10.31675/1607-1859-2018-20-5-111-118

*П.С. ИВАНОВ, А.С. ПЛЯСКИН,**Томский государственный архитектурно-строительный университет*

## **ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ СООТНОШЕНИЙ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ПРИ ПОВОРОТЕ ГЛАВНЫХ ЦЕНТРАЛЬНЫХ ОСЕЙ**

Одним из направлений дальнейшего развития и совершенствования строительных конструкций является создание конструкций со сложной внутренней структурой, т. е. комбинированных сечений, выполненных из различных материалов, работающих в единой конструктивной форме [1–3]. В связи с этим возникает необходимость поиска новых инженерных методов, учитывающих особенности работы таких конструкций. Запись соотношений моментов инерции в форме тригонометрических функций может не только повысить эффективность вычислительных процессов, особенно в расчетах на сложное сопротивление, но и позволит найти новые подходы к разработке инженерных методов расчета строительных конструкций со сложной внутренней структурой.

Целью работы является расширение диапазона расчетных формул по определению соотношений моментов инерции на основе преобразования тригонометрических функций.

Предложено новое применение соотношений моментов инерции на основе использования тригонометрических функций.

Результаты теоретических исследований могут быть использованы при разработке инженерных методов расчета строительных конструкций со сложной внутренней структурой.

В статье предлагается новый подход к применению соотношений моментов инерции при повороте главных центральных осей сечения на основе концентрических «кругов инерции». Получен ряд новых формул и зависимостей, вытекающих из известных преобразований тригонометрических функций на основе учета свойств главных центральных осей в инерциальной системе.

Данный подход расширяет область использования тригонометрических функций в определении соотношений моментов инерции при повороте центральных осей, что, в свою очередь, повышает аналитические возможности при решении задач на сложное сопротивление.

**Ключевые слова:** момент инерции; главные центральные оси; тригонометрические функции.

**Для цитирования:** Иванов П.С., Пляскин А.С. Геометрическая интерпретация соотношений моментов инерции при повороте главных центральных осей // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. 2018. Т. 20. № 5. С. 111–118.

*P.S. IVANOV, A.S. PLYASKIN,**Tomsk State University of Architecture and Building*

## **GEOMETRIC INTERPRETATION INERTIA MOMENT CORRELATION AT CENTROIDAL PRINCIPAL AXIS ROTATION**

**Relevance:** One of the directions of further building development and improvement is the creation of structures with a complex internal structure, i. e. combined sections made of various materials operating in a single construction. It is necessary to search for new engineering methods that take into account the behavior of such structures. Trigonometric functions of in-

ertia moments not only increase the efficiency of computations, especially for complex resistance, but also provide new approaches to the development of engineering methods of building calculation with a complex internal structure. **Objective:** The aim of this work is to increase the calculation range for formulas of determining the ratios of inertia moments based on the transformation of trigonometric functions. **Results:** A new application of inertia ratios is proposed for the use of trigonometric functions. **Practical implications:** The results of theoretical studies can be used in the development of engineering methods for building calculations with a complex internal structure.

**Keywords:** inertia moment; centroidal principal axis.

**For citation:** Ivanov P.S., Plyaskin A.S. Geometricheskaya interpretatsiya sootnoshenii momentov inertsii pri povorote glavnykh tsentral'nykh osei [Geometric interpretation inertia moment correlation at centroidal principal axis rotation]. Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta – Journal of Construction and Architecture. 2018. V. 20. No. 5. Pp. 111–118.

В работе [4] показано, что одним из достаточно эффективных подходов к учету сопротивления физически нелинейных стержневых систем является подход, основанный на применении переменных приведенных геометрических характеристик расчетного сечения. Реализация данного подхода требует поиска новых физических и геометрических моделей для интерпретации закономерностей преобразования этих переменных величин при смещении и повороте главных центральных осей, особенно в расчетах на сложное сопротивление.

В то же время, например, сама существующая геометрическая интерпретация инерциальных свойств идеально упругой плоской фигуры, основанная на известных кругах Мора, не в полной мере отражает весь спектр соотношений моментов инерции.

На рис. 1 предложена полная геометрическая интерпретация, основанная на использовании концентрических «кругов инерции» и вписанных в них соответствующим образом геометрических плоских фигур в виде прямоугольников и образованных из их сторон и диагоналей треугольников. При этом все диагонали вписанных прямоугольников пересекаются в одной точке, являющейся общим центром всех трех окружностей. Кроме того, одна из диагоналей каждого из трех вписанных прямоугольников лежит на одной линии, являющейся одновременно главной осью всех вписанных окружностей.

Углы между диагоналями каждого из прямоугольников (рис. 1) представляют собой двойные углы, образованные при повороте этих прямоугольников относительно главной центральной оси.

Тригонометрические функции двойных углов численно равны следующим соотношениям моментов инерции:

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= \frac{\pi A(\alpha)}{2 A^o(r)} = \frac{2I_{zy}}{\Delta I_V}; & \cos 2\alpha &= \frac{A^o(r_1)}{A^o(r)} = \frac{r_1}{r} = \frac{\Delta I_z}{\Delta I_V}; \\ \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{\pi A(\alpha)}{2 A^o(r_1)} = \frac{2I_{zy}}{\Delta I_z}; & \sin 2\varphi &= \frac{\pi A(\varphi)}{2 A^o(R)} = \frac{2\sqrt{I_V \cdot I_u}}{I_P}; \\ \cos 2\varphi &= \frac{r}{R} = \frac{\Delta I_V}{I_P}; & \operatorname{tg} 2\varphi &= \frac{\pi A(\varphi)}{2 A^o(r)} = \frac{2\sqrt{I_V \cdot I_u}}{\Delta I_V}; \end{aligned}$$

$$\sin 2\beta = \frac{\pi A(\beta)}{2 A^o(R)} = \frac{2\sqrt{I_z \cdot I_y}}{I_\rho}; \quad \cos 2\beta = \frac{r_1}{R} = \frac{\Delta I_z}{I_\rho}; \quad (1)$$

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{\pi A(\beta)}{2 A^o(r_1)} = \frac{2\sqrt{I_z \cdot I_y}}{\Delta I_z}.$$

Здесь  $A(\alpha)$  – площадь малого прямоугольника, вписанного в окружность с радиусом  $r$ .  $A(\varphi)$  и  $A(\beta)$  – соответственно площадь среднего и большого прямоугольников, вписанных в окружность с радиусом –  $R$ ;  $A^o(r_1)$ ,  $A^o(r)$  и  $A^o(R)$  – соответственно площадь малого, среднего и большого «круга инерции».

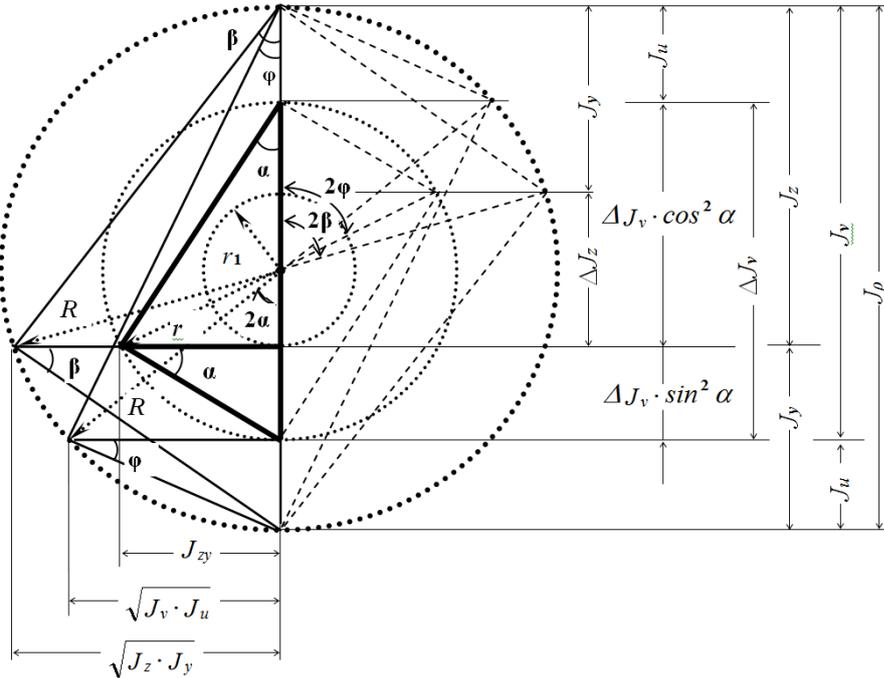


Рис. 1. Геометрическая модель соотношений моментов инерции сечения при повороте относительно центральных осей

Размеры и соотношения радиусов концентрических окружностей на рис. 1 выражают следующие зависимости и соотношения моментов инерции:

$$\left. \begin{aligned} 2R &= I_\rho = (I_v + I_u) = (I_z + I_y); & R - r &= I_u; \\ 2r &= \Delta I_v = (I_v - I_u) = (I_{\max} - I_{\min}); & R - r_1 &= I_y; \\ 2r_1 &= \Delta I_z = (I_z - I_y); & R^2 - r^2 &= I_v \cdot I_u; \\ R + r &= I_v; & R^2 - r_1^2 &= I_z \cdot I_y; \\ R + r_1 &= I_z; & r^2 - r_1^2 &= I_{zy}^2. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Из соотношений (2) имеем:

$$\left. \begin{aligned} I_{\rho} &= \Delta I_v + 2I_u; & \Delta I_v^2 &= I_{\rho}^2 - 4I_v \cdot I_u; & \Delta I_z^2 &= I_{\rho}^2 - 4I_z \cdot I_y; \\ I_{\rho} &= \Delta I_z + 2I_y; & \Delta I_v^2 &= \Delta I_z^2 + 4I_{zy}^2; & I_{zy}^2 &= I_z \cdot I_y - I_v \cdot I_u. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Последнюю зависимость в формулах (3) можно также записать в виде выражения для величины  $D_2$ , показанной в работе [5], которая не изменяется при повороте осей координат

$$D_2 = I_v \cdot I_u = I_z \cdot I_y - I_{zy}^2. \quad (4)$$

Ниже приводится ряд основных соотношений моментов инерции, полученных с помощью тригонометрических функций углов прямоугольных треугольников, вписанных в данные концентрические окружности (см. рис. 1):

$$\left. \begin{aligned} \sin \alpha &= \sqrt{\frac{(\Delta I_v - \Delta I_z)}{2\Delta I_v}}; & \sin \varphi &= \sqrt{\frac{I_u}{I_{\rho}}}; & \sin \beta &= \sqrt{\frac{I_y}{I_{\rho}}}; \\ \cos \alpha &= \sqrt{\frac{(\Delta I_v + \Delta I_z)}{2\Delta I_v}}; & \cos \varphi &= \sqrt{\frac{I_v}{I_{\rho}}}; & \cos \beta &= \sqrt{\frac{I_z}{I_{\rho}}}; \\ \operatorname{tg} \alpha &= \sqrt{\frac{(\Delta I_v - \Delta I_z)}{(\Delta I_v + \Delta I_z)}}; & \operatorname{tg} \varphi &= \sqrt{\frac{I_u}{I_v}}; & \operatorname{tg} \beta &= \sqrt{\frac{I_y}{I_z}}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Как видно из расчетов, предлагаемая геометрическая модель позволяет интерпретировать практически весь спектр соотношений моментов инерции. Большая разновидность этих соотношений выражается через тангенс угла  $\alpha$  (угол поворота относительно главных центральных осей):

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{I_{zy}}{(I_v - I_y)} = \frac{(I_v - I_z)}{I_{zy}} = \frac{I_{zy}}{(I_z - I_u)} = \frac{(I_y - I_u)}{I_{zy}} = \frac{\Delta I_v - \Delta I_z}{2I_{zy}} = \\ &= \frac{2I_{zy}}{\Delta I_v + \Delta I_z} = \sqrt{\frac{\Delta I_v - \Delta I_z}{\Delta I_v + \Delta I_z}}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Соотношения (1) и (3) также, в свою очередь, позволяют выразить экстремальные значения для осевых моментов инерции следующим рядом формул:

$$\left. \begin{aligned} I_{\max/\min} &= \frac{1}{2} \left[ I_{\rho} \pm \sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{zy}^2} \right]; & I_{\max/\min} &= \frac{1}{2} \left[ I_{\rho} \pm \frac{\Delta I_z}{\cos 2\alpha} \right]; \\ I_{\max/\min} &= \frac{1}{2} \left[ I_{\rho} \pm \sqrt{I_{\rho}^2 - 4(I_z \cdot I_y - I_{zy}^2)} \right]; & I_{\max/\min} &= \frac{1}{2} \left[ I_{\rho} \pm \frac{2I_{zy}}{\sin 2\alpha} \right]; \\ I_{\max/\min} &= \frac{I_{\rho}}{2} \left[ 1 \pm \frac{\cos 2\beta}{\cos 2\alpha} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Геометрическую модель для интерпретации приведенных выше соотношений моментов инерции можно представить в виде прямоугольной пирамиды, показанной на рис. 2, которую назовем «пирамидой развертки кругов инерции». В этой треугольной пирамиде длины боковых ребер равны соответ-

ствующим радиусам концентрических окружностей (см. рис. 1), а углы между ребрами в ее вершине (точке  $o$ ) – двойные углы, тригонометрические функции которых выражены формулами (1).

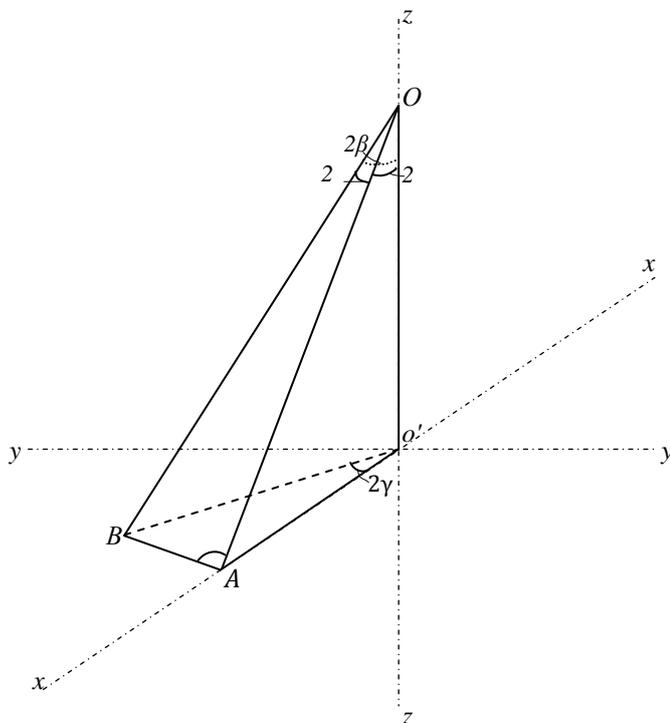


Рис. 2. «Пирамида развертки кругов инерции»

Размеры ребер пирамиды следующие:

длина боковых ребер:

$$oo' = r_1 = \frac{I_z - I_y}{2} = \frac{\Delta I_z}{2};$$

$$oA = r = \frac{I_v - I_u}{2} = \frac{\Delta I_v}{2};$$

$$oB = R = \frac{I_p}{2};$$

длина ребер в основании пирамиды:

$$o'A = I_{zy};$$

$$o'B = \sqrt{I_z \cdot I_y}; \quad (8)$$

$$AB = \sqrt{I_v \cdot I_u}.$$

Углы в вершине данной пирамиды связаны соотношением

$$\frac{\cos 2\alpha \cdot \cos 2\varphi}{\cos 2\beta} = 1. \quad (9)$$

Учитывая, что все боковые грани пирамиды – это прямоугольные треугольники (рис. 2), а также используя последнюю зависимость в формулах (3), получаем следующие соотношения:

$$\cos 2\gamma = \cos 2\varphi \frac{\sin 2\beta}{\sin 2\alpha} = \frac{I_{zy}}{\sqrt{I_z \cdot I_y}} = \sqrt{1 - \frac{I_v \cdot I_u}{I_z \cdot I_y}}. \quad (10)$$

Для геометрической интерпретации соотношений моментов инерции можно также использовать эллипс инерции, показанный на рис. 3, в котором малая и большая полуось связаны соотношением

$$\frac{r}{R} = \frac{I_v - I_u}{I_\rho} = e. \quad (11)$$

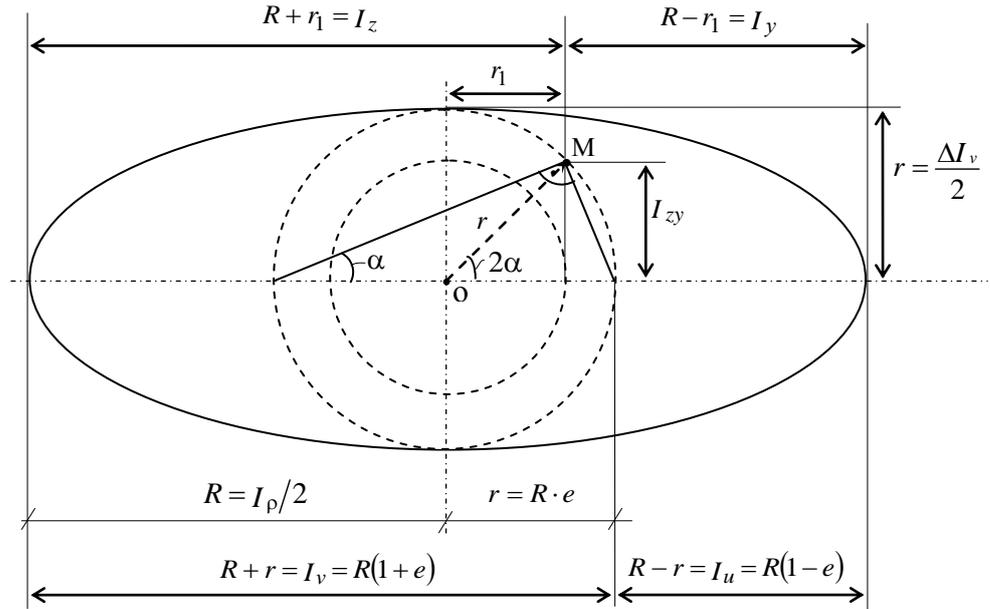


Рис. 3. Геометрическая модель соотношений моментов инерции на основе эллипса инерции

Проведем две концентрические окружности внутри данного эллипса с радиусами  $r$  и  $r_1$ , имеющие общий центр в точке  $O$ . Пересечение касательной с окружностью с радиусом  $r_1$ , проведенной параллельно малой полуоси эллипса с окружностью радиусом  $r$ , дает точку  $M$ . Рассматривая точку  $M$  в качестве общей вершины всех прямоугольных треугольников, вписанных в окружность с радиусом  $r$ , получаем следующие зависимости:

$$2r \cdot \sin \alpha \cos \alpha = r \sin 2\alpha = r_1 \operatorname{tg} 2\alpha = \sqrt{r^2 - r_1^2} = I_{zy}. \quad (12)$$

Согласно принятым обозначениям на рис. 3, можно записать следующие зависимости:

$$\left. \begin{aligned} I_z &= 2r \cos^2 \alpha + R(1 - e) = R(1 + e) - 2r \sin^2 \alpha; \\ I_y &= 2r \sin^2 \alpha + R(1 - e) = R(1 + e) - 2r \cos^2 \alpha; \\ I_z - I_y &= 2r(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = 2r_1 = \Delta I_z. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Выражение для величины  $D_2$  в формуле (4), учитывая формулы (2), можно записать в следующем виде:

$$D_2 = R^2(1 - e^2) = (R^2 - r_1^2) - I_{zy}^2. \quad (14)$$

Зависимость между полярным моментом инерции и моментом инерции при кручении эллиптического сечения также можно выразить через параметр  $e$

$$\frac{I_d}{I_p} = 1 - e^2 = 1 - \frac{r^2}{R^2}. \quad (15)$$

Предложенная геометрическая интерпретация на основе концентрических «кругов инерции» позволяет исследовать некоторые качественные признаки, связанные с трансформацией сечения.

Так, если  $e \rightarrow 1$  (см. рис. 3), то  $r \rightarrow R$ ,  $I_u \rightarrow 0$  и сечение вырождается в узкую полосу. В данном случае  $\alpha \rightarrow \beta$ ,  $\varphi \rightarrow 0$  (см. рис. 1),  $I_{zy} \rightarrow \sqrt{I_z \cdot I_y}$ .

В то же время, согласно формуле (12):  $I_{zy} = \sqrt{r^2 - r_1^2} \rightarrow \sqrt{R^2 - r_1^2} = R \cdot \sin 2\alpha$ .

Здесь при  $\alpha \rightarrow 45^\circ$ ,  $r_1 \rightarrow 0$ ,  $I_{zy} \rightarrow R \cong \frac{I_v}{2}$ .

Если  $e \rightarrow 1$  (см. рис. 3) и  $r_1 \rightarrow r$ , то сечение стремится к идеально круглой форме, и в данном случае  $I_{zy} \rightarrow 0$ .

Необходимо отметить, что в области строительной механики стержневых систем момент инерции рассматривается авторами настоящей работы не столько как характеристика, отображающая собой геометрию поперечного сечения, сколько как характеристика, которая показывает степень влияния геометрических особенностей на сопротивление стержня деформациям изгиба, кручения и т. д.

В более общем случае, когда упругие свойства стержня в расчетном поперечном сечении различны, можно либо изменять геометрию поперечного сечения в соответствии с изменением параметров упругости, либо пользоваться приведенными моментами инерции, определяемыми с помощью известных коэффициентов приведения.

В том случае, когда параметры упругости становятся переменными в процессе деформирования, можно воспользоваться переменными приведенными моментами инерции, определяемыми с помощью соответствующих корректирующих функций, которые учитывают изменение параметров упругости в расчетном сечении стержня в процессе его деформирования [6].

Использование вышеприведенных тригонометрических функций в определении соотношений моментов инерции может существенно облегчить вычислительный процесс при нахождении переменных приведенных моментов инерции, особенно в упругопластических задачах на сложное сопротивление.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Копаница Д.Г., Клопотов А.А., Устинов А.М. Экспериментальное исследование методом корреляции цифровых изображений напряженно-деформированных состояний поверх-

ности прокатного двутавра, усиленного углепластиком // Инновационные технологии в машиностроении: сб. трудов VIII Международной научно-практической конференции / Юргинский технологический институт. Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2017. 322 с.

2. Plevkov V., Klopotov A., Potekaev A., Ustinov A., Marchenko E. Evolution of the reinforced I-beam strain state // MATEC Web of Conferences. 2018. V. 143. P. 01017.
3. Копаница Д.Г., Моисеенко Р.П., Пляскин А.С. Собственные колебания сжатой сталебетонной колонны // Известия высших учебных заведений. Технология текстильной промышленности. 2017. Т. 371. № 5. С. 259–261.
4. Иванов П.С. О некоторых аспектах решения физически нелинейных задач методами строительной механики // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. 2000. № 2. С. 118–122.
5. Копаница Д.Г., Песцов Д.Н., Тё А. Определение геометрических характеристик плоских фигур. Томск: STT, 2004. 140 с.
6. Иванов П.С. Упругопластический расчет и оптимизация моностальных и бистальных балок. Томск: Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2013. 220 с.

#### REFERENCES

1. Kopanica D.G., Klopotov A.A., Ustinov A.M. Jeksperimental'noe issledovanie, metodom korrelyacii cifrovyh izobrazhenij, naprjazhenno-deformirovannyh sostojanij poverhnosti prokatnogo dvutavra, usilenного углепластиком [Method of correlating digital images of stress-strain states of rolled I-beam surface reinforced with carbon-filled plastic]. Innovacionnye tehnologii v mashinostroenii: sbornik trudov VIII Mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoj konferencii. Jurginskij tehnologicheskij institut. (Proc. 7<sup>th</sup> Int. Sci. Conf. 'Innovative Technologies in Engineering'). Tomsk: TPU, 2017. 322 p. (rus)
2. Plevkov V., Klopotov A., Potekaev A., Ustinov A., Marchenko E. Evolution of the reinforced I-beam strain state. MATEC Web of Conferences. 2018. V. 143. P. 01017.
3. Kopanica D.G., Moiseenko R.P., Plyaskin A.S. Sobstvennye kolebanija szhatoj stalebetonnoj kolonny [Natural vibrations of compressed steel concrete column]. Izvestija vysshih uchebnyh zavedenij. Tehnologija tekstil'noj promyshlennosti. 2017. V. 371. No. 5. Pp. 259–261. (rus)
4. Ivanov P.S. O nekotorykh aspektakh resheniya fizicheski nelineinykh zadach metodami stroitel'noi mekhaniki [Solving physically nonlinear problems of structural mechanics methods]. Vestnik of Tomsk State University of Architecture and Building. 2000. No. 2. Pp. 118–122. (rus)
5. Kopanitsa D.G., Pestsov D.N., Te A. Opredelenie geometricheskikh kharakteristik ploskikh figure. [Determination of geometric characteristics of plane figures]. Tomsk: STT, 2004. 140 p. (rus)
6. Ivanov P.S. Uprugoplasticheskij raschet i optimizacija monostal'nyh i bital'nyh balok [Elasto-plastic calculation and optimization of mono and bi-steel beams]. Tomsk: TSUAB, 2013. 220 p. (rus)

#### Сведения об авторах

*Иванов Петр Степанович*, канд. техн. наук, доцент, Томский государственный архитектурно-строительный университет, 634003, г. Томск, пл. Соляная, 2, Pyotrivanov@mail.ru

*Пляскин Андрей Сергеевич*, канд. техн. наук, доцент, Томский государственный архитектурно-строительный университет, 634003, г. Томск, пл. Соляная, 2, Plyaskinandrei@mail.ru

#### Authors Details

*Petr S. Ivanov*, PhD, A/Professor, Tomsk State University of Architecture and Building, 2, Solyanaya Sq., 634003, Tomsk, Russia, Plyaskinandrei@mail.ru

*Andrei S. Plyaskin*, PhD, A/Professor, Tomsk State University of Architecture and Building, 2, Solyanaya Sq., 634003, Tomsk, Russia, Pyotrivanov@mail.ru