УДК 624.072.014.2

ПРИТЫКИН АЛЕКСЕЙ ИГОРЕВИЧ, докт. техн. наук, доцент,
prit_alex@mail.ru
Калининградский государственный технический университет,
236000, г. Калининград, Советский проспект, 1
Балтийский федеральный университет им. Иммануила Канта,
236041, г. Калининград, ул. А. Невского, 14
ЛАВРОВА АННА СЕРГЕЕВНА, аспирант,
a.lavrova39@gmail.com
Калининградский государственный технический университет,
236000, г. Калининград, Советский проспект, 1

ПРОГИБЫ ПЕРФОРИРОВАННЫХ БАЛОК С КРУГЛЫМИ ВЫРЕЗАМИ

В настоящей работе рассматривается задача определения прогибов перфорированных двутавровых балок с круглыми вырезами под действием распределенной нагрузки по теории составных стержней, разработанной А.Р. Ржаницыным. Основная сложность применения этого метода состоит в нахождении коэффициента жесткости упругого слоя, образованного перемычками.

Тенденция максимального удешевления конструкций и снижения их веса приводит к уменьшению относительной ширины перемычек и увеличению относительной высоты вырезов, тем более что технология изготовления таких балок позволяет широко варьировать этими параметрами перфорации.

Определение коэффициента жесткости упругого слоя производилось с помощью численных исследований балки методом конечных элементов с использованием программного комплекса ANSYS. Расчету подвергались двутавровые балки высотой H = 75 см, выполненные по безотходной технологии из прокатного профиля № 50 с высотой вырезов d = 50 см. Ширина перемычек варьировалась в диапазоне $0{,}3 \le c / r \le 1$, а отношение длины к высоте изменялось в диапазоне $10 \le L / H \le 27$.

Результаты расчетов по ТСС неплохо согласуются с данными МКЭ.

Ключевые слова: прогиб; перфорированная двутавровая балка; круглые вырезы; ширина перемычек; теория составных стержней; МКЭ.

ALEKSEI I. PRITYKIN, DSc, A/Professor,
prit_alex@mail.ru
Kaliningrad State Technical University,
1, Sovetsky Ave., 236000, Kaliningrad, Russia,
Immanuel Kant Baltic Federal University
14, Nevskii Str., 236041, Kaliningrad, Russia,
ANNA S. LAVROVA, Research Assistant,
a.lavrova39@gmail.com
Kaliningrad State Technical University,
1, Sovetsky Ave., 236000, Kaliningrad, Russia

© Притыкин А.И., Лаврова А.С., 2015

DEFLECTIONS OF PERFORATED BEAMS WITH CIRCULAR OPENINGS

The paper presents the problem of deflection identification of perforated I-beams under the distributed load using the theory of compound bars and the finite element method. The comparative analysis is performed for the values under study at given perforation parameters. The analytical dependence is used to determine coefficients on the basis of beam deflection design using the finite element method.

This method is difficult to apply due to the stiffness ratio obtained for the elastic layer formed by straight arches. The maximum cost reduction and weight of the structures leads to the decrease of the relative width of straight arches and increase of relative height of perforated holes. Moreover, the I-beam technology allows varying perforation parameters.

The stiffness ratio is detected by numerical calculations of rolled section I-beam using the program package ANSYS. Experimental results are in good agreement with the finite element method.

Keywords: deflection; perforated I-beam; circular openings; width of land; compound bar theory; finite element method.

Как известно, одним из нормируемых параметров балок является величина их относительного прогиба. Эти требования содержатся и в СНиП II-23–81* «Стальные конструкции», и в Еврокоде 3 «EN 1993-1-5-2005. Проектирование стальных конструкций – Часть 1.5: Плоские элементы конструкции». Балки с круглыми вырезами широко применяются в строительстве, причем наблюдается широкое разнообразие конструктивных вариантов как по относительной высоте вырезов d/H, так и по относительной ширине перемычек c/r (рис. 1). Если еще недавно стандартным считалось соотношение между шириной перемычки и радиусом выреза $c/r = 1$ (рис. 1, *а*), то сейчас оно снизилось до величин $c/r = 0{,}3–0{,}5$ (рис. 1, *б*), в то время как относительная высота вырезов увеличилась с $d/H = 0{,}667$ до $d/H = 0{,}75$, а иногда и больше. В целом тенденция проектирования сводится к максимальному удешевлению стоимости конструкций и снижению их веса.

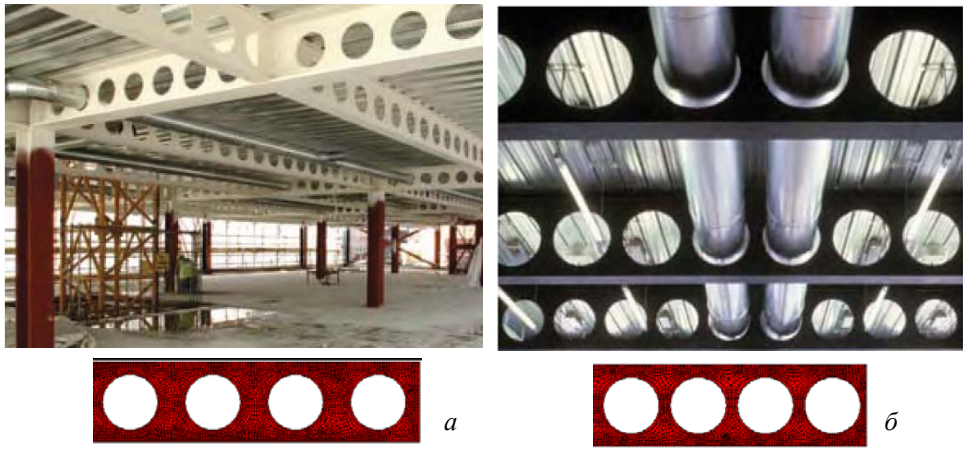
Понятно, что наличие вырезов снижает изгибную жесткость балок поразному в зависимости от формы вырезов и параметров перфорации. В работе ставилась задача получения удобной для инженерных расчетов зависимости для оценки прогибов балок с круглыми вырезами. Проверка надежности полученных результатов осуществлялась с помощью МКЭ.

Объекты исследования

В работе оценивались прогибы шарнирно опертых однорядно перфорированных двутавровых балок с круглыми вырезами, подверженных действию равномерно распределенной нагрузки, с разной относительной длиной l/H и разной относительной шириной перемычек c/r (рис. 1).

Исследовалось также влияние пропорционального изменения толщин стенки t_w и полок t_f на прогибы перфорированной балки. Во всех случаях относительная высота вырезов $\xi = d/H$ принималась равной 0,667.

Параметры перфорации принимались такими, которые могут быть обеспечены соответствующей безотходной технологией их изготовления.



а *б*

Рис. 1. Перфорированные балки с разной шириной перемычек:
а – $c/r = 1$; *б* – $c/r = 0{,}3$

Определение деформаций по теории составных стержней

Ранее в работе [1] был рассмотрен вопрос о деформации перфорированных балок с шестиугольными вырезами. В основе ее лежало аналитическое решение задачи для оценки прогибов перфорированных балок, полученное по теории составных стержней. Вид его достаточно удобен для инженерных расчетов:

$$w^{\text{ТСС}} = w^{\text{ТТ}} \frac{I / 2i + K_c^*}{1 + K_c^*}, \qquad (1)$$

где $w^{\text{ТТ}}$ – определяемый по технической теории изгиба прогиб монолитной балки с моментом инерции $I = I_{\text{спл}} - d^3 t_w / 12$, состоящей из двух тавровых поясов, соединенных абсолютно жесткими перемычками; $I_{\text{спл}}$ – момент инерции балки со сплошной стенкой; t_w – толщина стенки балки; d – высота (диаметр) вырезов; K_c^* – безразмерный коэффициент, зависящий от коэффициента жесткости упругого слоя K_c, образованного перемычками; i – момент инерции таврового пояса над вырезом относительно собственной нейтральной оси.

Как показали последующие расчеты, в подавляющем большинстве случаев величина $K_c^* > 100$, поэтому с достаточной для практики точностью зависимость (1) можно привести к виду

$$w^{\text{ТСС}} = w^{\text{ТТ}} (1 + I / (2iK_c^*)). \qquad (2)$$

В случае действия на балку распределенной нагрузки q величина $w^{\text{ТТ}}$ вычисляется как

$$w^{\text{ТТ}} = \frac{5ql^4}{384EI}. \qquad (3)$$

Для дальнейшего численного анализа выражения $w^{\text{ТСС}}$ (2) необходимо знание величины коэффициента K_c^*, который в общем случае определяется как

$$K_c^* = K_c l^2 I / (Efi\pi^2) . \qquad (4)$$

Здесь I – обозначенный выше момент инерции двутаврового сечения балки в районе выреза; E – модуль Юнга; f – площадь сечения таврового пояса [1].

Приведенные выше зависимости (2) и (4) носят универсальный характер и применимы для балок с любой перфорацией стенки. Особенности вида перфорации скрываются в коэффициенте жесткости упругого слоя K_c, который имеет вид

$$K_c = \frac{G t_w}{\gamma d \left(1 + 2 / \eta\right)}, \qquad (5)$$

где G – модуль сдвига; c – ширина перемычки; d – ширина выреза, а точнее, его диаметр; $\eta = c / r$ – относительная ширина перемычки; γ – числовой коэффициент, зависящий от вида закрепления балки (шарнирное опирание или жесткая заделка), относительной высоты и формы вырезов [3].

Для дальнейшего анализа прогибов потребуется знание числового коэффициента γ. Для шарнирно опертой балки с *шестиугольными* вырезами высотой $0{,}667H$ коэффициент γ, найденный с помощью расчетов балки методом конечных элементов, получился равным 1,73. Численные исследования проводились путем расчета балок МКЭ с помощью программного комплекса ANSYS. Расчету подвергались двутавровые балки (рис. 1) высотой H = 75 см, выполненные по безотходной технологии из прокатного профиля № 50 с высотой вырезов d = 50 см и шириной перемычек $c / b = 1$ ($b = 2a$, где a – сторона выреза).

Воспользуемся для шарнирно опертой балки с круглыми вырезами при относительной их высоте d/H = 0,667 тем же значением коэффициента γ, полученным в работе [1], что и для балки с шестиугольными вырезами. Расчеты произведем для балок с относительной длиной, лежащей в диапазоне $10 \le L / H \le 27$.

Оценку прогибов перфорированных двутавровых балок с круглыми вырезами будем выполнять при действии равномерно распределенной нагрузки $q = 10$ кН/м по зависимости (2) с учетом соотношений (3) − (5).

Описание балки удобно производить с помощью следующего условного обозначения: $l - H - t_w - b_f - t_f - \xi - \eta$, где первые пять параметров описывают габаритные размеры и поперечное сечение, а последующие два числа являются параметрами перфорации: ξ – относительной высотой вырезов, η – относительной шириной перемычек. Тот из параметров, который в процессе расчета изменяется, проставляется в буквенном виде. Например, обозначение $l - 75 - 1 - 17 - 1{,}52\,\text{см} - 0{,}667 - 1$ указывает на то, что в расчетах варьировалась длина балки при одинаковой высоте вырезов $h = 0{,}667H$ и относительной

ширине перемычек c/r = 1. Вначале проанализируем влияние на величину прогибов длины балки при указанных выше параметрах перфорации. Расчеты выполним по ТСС (2) и МКЭ, сопоставляя результаты для оценки точности вычисления прогибов разными методами. При этом в качестве достоверного будем принимать расчет МКЭ.

Влияние длины на прогибы перфорированной балки

В выражении (2) сомножитель в скобках представляет собой коэффициент, отражающий влияние сдвига на прогиб перфорированной балки. Как известно [2], с увеличением относительной длины l/H влияние сдвига на деформацию балки со сплошной стенкой уменьшается обратно пропорционально $(l/H)^2$. Посмотрим, как это влияние сказывается на перфорированной балке.

При определении прогибов МКЭ достаточная точность достигается при размерах конечных элементов $\Delta_{КЭ} = H/20$, поэтому в расчетах принималась величина $\Delta_{КЭ}$ = 4 см. Для удобства последующего анализа результаты расчетов МКЭ сведены в табл. 1. В этой же таблице для сравнения приведены и результаты вычислений прогибов по теории составных стержней по зависимости (2).

Как можно судить по значениям нижней строки табл. 1, расхождение в прогибах, подсчитанных по ТСС и МКЭ, не превышает 5 %, причем при малых длинах ($11 < l/H \le 15$) расчет по ТСС приводит к заниженным значениям, а при длинах в диапазоне $16 \le l / H \le 20$ – к завышенным значениям прогибов относительно величин, полученных МКЭ. Лишь для редко встречающихся коротких балок с $l / H = 10$ расчет по ТСС дает расхождение несколько выше 7 %. Заметим также, что расчет прогибов по ТСС в диапазоне относительных длин $13 \le l / H < 20$ приводит к погрешностям, не превышающим 2,5 %, что свидетельствует о приемлемой точности зависимости (2).

Таблица 1

Прогибы шарнирно опертой балки (*l*–75–1–17–1,52 см–0,667–1) с круглыми вырезами (нагрузка *q* = 10 кН/м)

Прогибы в мм, H = 75 см; c/r = 1; d/H = 0,667						
l/H	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*
МКЭ	**2,85**	**3,94**	**5,37**	**7,13**	**9,36**	**12,05**
ТСС (2)/ТТ	**2,64/–**	**3,74/–**	**5,18/–**	**6,99/–**	**9,25/–**	**12,04/–**
Расхождение, %	–7,4	–5,1	–3,5	–2,0	–1,2	–0,1
l/H	*16*	*17*	*18*	*19*	*20*	*21*
МКЭ	**15,3**	**19,2**	**23,9**	**29,3**	**35,7**	**42,9**
ТСС (2)/ТТ	**15,4/–**	**19,5/–**	**24,3/–**	**30,0/–**	**36,6/–**	–/42,2
Расхождение, %	0,7	1,6	1,7	2,4	2,5	–1,6
l/H	*22*	*23*	*24*	*25*	*26*	*27*
МКЭ	**51,0**	**60,5**	**71,4**	**83,7**	**97,6**	**113,0**
ТСС (2)/ТТ	–50,8	–/60,7	–/72,0	–/84,8	–/99,2	–/115,4
Расхождение, %	–0,4	0,3	0,8	1,3	1,6	2,1

Однако при относительной длине $l / H > 20$, когда влияние сдвига на полный прогиб балки заметно ослабевает, более надежные результаты дает зависимость (3), определяемая по технической теории изгиба, в которой момент инерции берется для сечения с вырезом.

Рассчитаем прогиб $w^{\text{ТТ}}$ по (3) для монолитной балки с моментом инерции

$$I = I_{\text{спл}} - d^3 t_w / 12, \qquad (6)$$

где момент инерции балки без вырезов $I_{\text{спл}}$ равен

$$I_{\text{спл}} = 2(b_f t_f^3 / 12 + b_f t_f (H - t_f)^2 / 4) + (H - 2t_f)^3 t_w / 12. \qquad (7)$$

Для перфорированной балки размерами *l*–75–1–17–1,52 см–0,667–1 момент инерции сечения *I* в соответствии с (6) и (7) определится как

$$I = 100820 - 50^3 \cdot 1 / 12 = 90400 \text{ см}^4.$$

Для балки с $l / H = 21$ получим $w^{\text{ТТ}} = 42,2$ мм, что в сравнении с расчетом МКЭ $w^{\text{МКЭ}} = 42,9$ мм (табл. 1) дает погрешность 1,6 %. Расчеты показывают, что в диапазоне длин $21 \le l / H \le 27$ удовлетворительную оценку прогиба можно получить по формуле (3), поскольку влияние сдвига становится несущественным.

В третьей строке табл. 1 вычисление прогибов производится либо по ТСС, либо по ТТ, в зависимости от того, что меньше. Таким образом, в диапазоне $13 \le l / H \le 20$ расхождение $w^{\text{ТСС}}$ с $w^{\text{МКЭ}}$ составляет не более 2,5 %, а при $21 \le l / H \le 27$ отклонение $w^{\text{ТТ}}$ от $w^{\text{МКЭ}}$ находится в пределах 2,1 %.

Проведем теперь расчеты перфорированных балок с относительной шириной перемычек $\eta = 0,3$ при неизменных остальных параметрах.

Влияние ширины перемычек на прогибы перфорированной балки

Для балки с относительной шириной перемычек *c*/*r* = 0,3 расчеты по зависимости (6) и МКЭ, аналогичные выполненным выше, сведены в табл. 2.

Таблица 2

Прогибы шарнирно опертой балки (*l*–75–1–17–1,52 см–0,667–0,3) с круглыми вырезами (нагрузка *q* = 10 кН/м)

Прогибы в мм, *H* = 75 см; *c*/*r* = 0,3; *d*/*H* = 0,667						
l/*H*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*
МКЭ	**3,38**	**4,61**	**6,27**	**8,27**	**10,9**	13,8
ТСС (2)	**3,36**	**4,62**	**6,22**	**8,22**	**10,7**	**13,7**
Расхождение, %	–0,6	0,2	–0,8	–0,6	–1,8	–0,7

Окончание табл. 2

Прогибы в мм, H = 75 см; c/r = 0,3; d/H = 0,667						
l/H	*16*	*17*	*18*	*19*	*20*	*21*
МКЭ	**17,3**	**21,3**	**26,7**	**32,3**	**38,9**	**46,4**
ТСС (2)	**17,3**	**21,6**	**26,7**	**32,6**	**39,5**	**47,5**
Расхождение, %	0	1,4	0	0,9	1,5	2,4
l/H	*22*	*23*	*24*	*25*	*26*	*27*
МКЭ	**55,2**	**65,0**	**77,1**	**89,6**	**103,7**	**119,7**
ТСС (2)	**56,6**	**67,1**	**78,9**	**92,3**	**107,3**	**124,1**
Расхождение, %	2,5	3,2	2,3	3,0	3,5	3,7

При одинаковой высоте вырезов различие в расчетах по ТСС балок с разной шириной перемычек будет заключаться в разной величине коэффициента жесткости упругого слоя K_c, т. е. в выражении (4) будет меняться коэффициент, зависящий от η, т. к. все остальные параметры остаются неизменными. Если при $\eta = 1$ коэффициент $(1 + 2/\eta) = 3$, то при $\eta = 0{,}3$ коэффициент $(1 + 2/\eta) = (1 + 2/0{,}3) = 7{,}67$. Таким образом, при уменьшении ширины перемычки уменьшается коэффициент жесткости упругого слоя K_c, что в конечном итоге ведет к росту прогибов.

Как видно из полученных результатов, для балки с узкими перемычками при $\eta = 0{,}3$ использование зависимости (2) удовлетворяет инженерной точности расчета практически во всем диапазоне рассмотренных длин. Особенно высокую точность они демонстрируют в диапазоне длин $10 \le l/H \le 20$, где погрешность не превышает 1,8 %. Лишь при относительных длинах $l/H > 25$ (табл. 2) расхождение в прогибах $w^{\text{ТСС}}$ и $w^{\text{МКЭ}}$ превышает 3 %.

Влияние толщины связей на прогибы перфорированной балки

Отметим одну из особенностей деформирования перфорированных балок при пропорциональном изменении толщин связей сечения t_w и t_f. Обратимся, прежде всего, к численному расчету. Например, если при толщинах $t_w = 1$ см и $t_f = 1{,}52$ см прогиб перфорированной балки размерами 1200–75–1–17–1,52 см–0,667–1 равен $w^{\text{МКЭ}} = 1{,}53$ см (табл. 1), то при толщинах, в 1,5 раза больших ($t_w = 1{,}5$ см и $t_f = 2{,}28$ см), прогиб составляет величину $w^{\text{МКЭ}} = 1{,}045$ см (рис. 2).

На основании этого и других аналогичных расчетов можно сделать вывод, что прогибы перфорированных балок изменяются примерно обратно пропорционально изменению толщин связей сечения t_w и t_f. Так, если толщину стенки t_w и толщину полок t_f одновременно увеличить в 1,5 раза, то прогиб балки уменьшится почти во столько же раз. Объясняется это тем, что

приближенно момент инерции двутавровой перфорированной балки по ослабленному вырезом сечению можно представить как

$$I_{\text{перф}} \approx H^2(b_f t_f + Ht_w/6)/2 - h^3 t_w/12, \qquad (8)$$

а момент инерции посредине перемычки в виде

$$I_{\text{спл}} \approx H^2(b_f t_f + Ht_w/6)/2. \qquad (9)$$

Рис. 2. Прогиб (см) ш. о. балки размерами 1200–75–1,5–17–2,28 см–0,667–1 под распределенной нагрузкой $q = 10$ кН/м

В обоих случаях моменты инерции пропорциональны толщинам t_w и t_f. Следовательно, если эти толщины увеличить в n раз, то прогиб балки уменьшится примерно во столько же раз. *Примерно* потому, что выражения (8) и (9) не являются точными, однако получаемая при этом погрешность невелика. Так, соотношение величин прогибов 1,53 и 1,045 составляет 1,464, т. е. погрешность по сравнению с 1,5 не превышает 2,5 %.

Подчеркнем, что указанное влияние толщин справедливо как для перфорированных балок, так и для балок без вырезов. Причем, как видно из (8), форма перфорации никакой роли не играет.

Выводы

1. Из проведенного анализа видно, что оценка прогибов перфорированных балок с круглыми вырезами по ТСС (2) неплохо коррелируется с результатами расчетов прогибов методом конечных элементов.

2. Уменьшение относительной ширины перемычек более чем в 3 раза с $c/r = 1$ до $c/r = 0{,}3$ повышает податливость балки всего на 13–18 %. Это указывает на целесообразность более частого расположения вырезов, если не будет противопоказаний с позиций местной устойчивости.

3. С увеличением относительной длины балки l/H влияние особенностей перфорации на прогибы балки снижается, т. к. уменьшается компонента сдвига в общем изгибе балки. При $l/H > 20$ и относительной ширине перемычек $\eta = 1$ прогибы перфорированной балки можно оценивать по технической теории изгиба, принимая момент инерции по ослабленному вырезом сечению. У балок с относительной шириной перемычек $\eta = 0{,}3$ удовлетворительные результаты зависимость (2) дает в диапазоне $10 \le l/H \le 27$.

4. Пропорциональное изменение толщин связей t_w и t_f приводит к обратно пропорциональному изменению прогиба перфорированной балки.

Библиографический список

1. *Притыкин, А.И.* Влияние сдвига на деформации перфорированных балок с шестиугольными вырезами / А.И. Притыкин // Изв. вузов. Строительство. – 2012. – № 3. – С. 111–118.
2. *Справочник* по строительной механике корабля. Т. 1 / Г.В. Бойцов [и др.]. – Л. : Судостроение, 1982. – 376 с.
3. *Ржаницын, А.Р.* Составные стержни и пластины / А.Р. Ржаницын. – М. : Стройиздат, 1986. – 316 с.

References

1. *Pritykin A.I.* Vlijanie sdviga na deformacii perforirovannyh balok s shestiugol'nymi vyrezami [Influence of shear on deformations of perforated beams with hexagonal holes]. *News of Higher Educational Institutions. Construction.* 2012. No. 3. Pp. 111–118. (rus)
2. *Boitsov G.V. et al.* Spravochnik po stroitel'noi mekhanike korablya [Handbook on ship structural mechanics]. Leningrad : Sudostroenie Publ., 1982. 376 p. (rus)
3. *Rzhanitsyn A.R.* Sostavnye sterzhny i plastiny [Compound rods and plates]. Moscow : Stroyizdat, 1986. 316 p. (rus)