

СТРОИТЕЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ, ЗДАНИЯ И СООРУЖЕНИЯ

УДК 624.047:534.014.1

*ЛЯХОВИЧ ЛЕОНИД СЕМЕНОВИЧ, докт. техн. наук, профессор,
lls@tsuab.ru, lsl@sibmail.com
Томский государственный архитектурно-строительный университет,
634003, г. Томск, пл. Соляная, 2*

МОДИФИКАЦИЯ ПОРЯДКА ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДОВ ИЗМЕНЕНИЯ ПЕРВОЙ ЧАСТОТЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПУТЕМ ОПТИМИЗАЦИИ ВЕЛИЧИН И МЕСТ РАСПОЛОЖЕНИЯ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ИЛИ СНИМАЕМЫХ МАСС

Ранее автором предложены методы изменения первой собственной частоты путем оптимизации величин и мест расположения дополнительных или снимаемых масс. Методы, основанные на использовании особых свойств форм собственных колебаний, позволяют гарантированно достигать оптимального решения лишь тогда, когда все ограничения на величины дополнительных или снимаемых масс выполняются в виде строгих неравенств. В остальных случаях методы обеспечивают поэтапное движение к оптимальным решениям, но гарантировать их абсолютное достижение не могут.

В данной статье предлагается изменить порядок применения методов таким образом, чтобы на циклах расчета выявлялась лишь одна узловая точка, наименее чувствительная к размещению дополнительных масс в задаче нагружения и наиболее чувствительная к уменьшению массы в задаче повышения частоты. Такая *модификация* позволяет на этапах учитывать различие в чувствительности выявляемых узлов, что приближает решение к оптимальному.

Ключевые слова: частоты собственных колебаний; узловые точки; внешние массы; дополнительные и снимаемые массы; ограничения; оптимизация; особые свойства.

*LEONID S. LYAKHOVICH, DSc, Professor,
lls@tsuab.ru
Tomsk University of Architecture and Building,
2, Solyanaya Sq., 634003, Tomsk, Russia*

MODIFICATION OF METHOD APPLICATION PROCEDURE FOR EIGEN FREQUENCY CHANGED BY OPTIMIZED VALUES AND LOCATIONS OF ADDITIONAL LOADS

Earlier the author suggested methods of modifying the first eigen frequency by optimization of values and locations of additional loads. Methods based on the use of specific properties of eigen frequency allow achieving the optimum solution only when all limits for additional loads values have the form of strict inequalities. In all other cases these methods provide the stage-by-stage movement to optimum solutions but do not ensure their absolute accomplishment.

The paper suggests to change the procedure of method applications such that only one nodal point would be detected at design stages which is less sensible to the location of additional loads in the loading task and more sensible to the mass decrease in the task of the frequency increase. This *modification* allows taking into consideration the difference between sensibilities of nodal points that approximates the solution to its optimum.

Keywords: eigen frequency; nodal point; external loads; additional loads; limits; optimization; specific properties.

Предложенные в работах [1, 2] методы основаны на использовании особых свойств форм собственных колебаний и нацелены на решение двух задач.

В первой задаче требуется выбрать из числа возможных узловых точек места размещения, количество и величины дополнительных масс ($m_{1d}[i]$ ($i = 1, 2, \dots, n_1$)) таким образом, чтобы первая собственная частота $\omega[1]$ не оказалась меньше величины заданного значения ω_{01} , не противоречащего ограничениям задачи

$$\omega[1] \geq \omega_{01}, \quad (1)$$

а сумма дополнительных масс

$$M_{1d} = \sum_{i=1}^{n_1} m_{1d}[i] \quad (2)$$

была бы максимальной. При этом дополнительные массы должны удовлетворять условиям

$$dm_{1d}[i] \geq m_{1d}[i] \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n_1). \quad (3)$$

Здесь $dm_{1d}(i)$ – заданные значения, ограничивающие величины дополнительных масс.

Во второй задаче требуется выбрать из числа возможных узловых точек места, количество и величины снимаемых масс ($m_{2d}[i]$ ($i = 1, 2, \dots, n_2$)) таким образом, чтобы первая собственная частота $\omega[1]$ оказалась не меньше величины заданного значения ω_{02} , не противоречащего ограничениям задачи

$$\omega[1] \geq \omega_{02}, \quad (4)$$

а сумма снимаемых масс

$$M2_d = \sum_{i=1}^{n1} m2_d[i] \quad (5)$$

была бы минимальной. При этом снимаемые массы должны удовлетворять условиям

$$dm2[i] \geq m2_d[i] \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n2). \quad (6).$$

Здесь $dm2[i]$ – заданные значения, ограничивающие величины снимаемых масс.

Особые свойства форм собственных колебаний [1, 2], на которых основаны рассматриваемые методы, позволяют гарантированно достигать абсолютного максимума в первой задаче и абсолютного минимума во второй лишь тогда, когда все ограничения на величины дополнительных (3) или снимаемых (6) масс выполняются в виде строгих неравенств. В остальных случаях методы обеспечивают поэтапное движение к оптимальным решениям, но гарантировать их абсолютное достижение не могут.

Методы решения задач [1, 2] реализуются по этапам. При решении первой задачи на каждом этапе определяются узловые точки, размещение в которых дополнительных масс наименьшим образом влияет на величину собственной частоты. Если метод предлагает размещать в этих узлах массы большие, чем допускаемые $dm1(i)$, то дополнительные массы принимаются равными им и на следующих этапах считаются заданными. Аналогичные действия выполняются и при решении второй задачи. Таким образом, некоторые из ограничений (3) в первой задаче или (6) во второй выполняются в виде равенств. При этом чувствительность выявленных узлов к размещению в них дополнительных масс в первой задаче и снимаемых во второй может различаться.

В данной статье предлагается разделить расчет на циклы, на каждом из которых применять предложенные в [1, 2] методы таким образом, чтобы на цикле расчета выявлялась лишь одна узловая точка, наименее чувствительная к размещению дополнительных масс в первой задаче и наиболее чувствительная к уменьшению массы во второй. При этом сами методы не изменяются, а меняется лишь порядок их использования. Такая *модификация* позволяет на этапах учитывать различие в чувствительности выявляемых узлов, что приближает решение к оптимальному.

Приведем дополнительные обозначения. Пусть $\omega_0[1]$ – первая собственная частота исходной системы, а $\omega_k[1]$ – системы, рассматриваемой на конкретном, например k -м, цикле расчета. Обозначим коэффициент понижения первой собственной частоты для первой задачи через $\alpha_{\omega 1}$, а коэффициент повышения – для второй через $\alpha_{\omega 2}$. Значения, ограничивающие величины дополнительных и снимаемых масс $dm1[i]$ и $dm2[i]$, принимаются в доле от действующей в соответствующем узле внешней массы $dm1_d[i] = \alpha_1[i] \cdot m[i]$, $dm2_d[i] = \alpha_2[i] \cdot m[i]$.

Рассмотрим вначале модификацию метода решения первой задачи.

Модификация методов реализуется выполнением нескольких циклов расчета. На каждом цикле выявляется *одна* узловая точка, наименее чувствительная к расположению в ней дополнительной массы, а затем выполняются дальнейшие действия текущего цикла.

Если рассматривается k -й цикл расчета, то на этом цикле система отличается от исходной тем, что на предыдущих $(k-1)$ циклах в выявленных на них узловых точках размещены предельно допустимые дополнительные массы $m_{d[i]} = dm[i]$. Первая собственная частота этой системы – $\omega_{k-1}[1]$.

Структура k -го цикла расчета состоит из четырех шагов.

1. Выбирается достаточно малое значение коэффициента понижения первой собственной частоты $\alpha_{\omega 1}$. Достаточность малости величины $\alpha_{\omega 1}$ определится на втором шаге.

2. При выбранном значении $\alpha_{\omega 1}$ методом решения первой задачи [1, 2] понижаем собственную частоту $\omega_{k-1}[1]$ до значения $\alpha_{\omega 1} \cdot \omega_{k-1}[1]$. Если при этом действии выявится лишь одна узловая точка, в которой размещена дополнительная масса, то значение $\alpha_{\omega 1}$ выбрано достаточно малым. Если же таких точек окажется больше, то необходимо вернуться к первому шагу цикла и величину $\alpha_{\omega 1}$ уменьшить.

3. Если на втором шаге при понижении частоты от $\omega_{k-1}[1]$ до $\alpha_{\omega 1} \cdot \omega_{k-1}[1]$ выявлен один дополнительный загружаемый узел № t , то в нем размещается предельно допустимая дополнительная масса $m_{d[t]} = dm[t]$, и с учетом этой массы определяется первая собственная частота этой системы – $\omega_k[1]$. Если окажется, что $\omega_k[1] \leq \omega_{01}$, то четвертый шаг этого цикла не выполняется, и цикл является последним. В этом случае за окончательное решение принимается тот результат, из числа полученных на четвертых шагах предыдущих циклов, для которого сумма дополнительных масс наибольшая. Если $\omega_k[1] > \omega_{01}$, то переходим к четвертому шагу этого цикла.

4. Принимаем коэффициент понижения частоты $\omega_k[1]$ до заданного значения ω_{01} равным $\alpha_{\omega 1} = \omega_{01} / \omega_k[1]$ и методом решения первой задачи [1, 2] понижаем собственную частоту. Если при реализации метода на этом шаге окажется, что на каждом его этапе появлялось лишь по одному предельно загруженному узлу, то расчет закончен. Также расчет заканчивается, если он реализован в один этап и при этом все выявленные массы оказались меньше предельных. В этих случаях за окончательное решение принимается тот результат, из числа полученных на четвертых шагах всех циклов, для которого сумма дополнительных масс наибольшая. Если же на каком-либо этапе этого метода предельно загруженных узлов оказывалось больше, чем один, то переходим к следующему $(k+1)$ -му циклу.

Система, которая рассматривается в $(k+1)$ -м цикле, отличается от исходной тем, что на предыдущих k циклах, в выявленных в них k узловых точках, размещены предельно допустимые дополнительные массы

$m_{1d}[i] = dm[i]$. Первая собственная частота этой системы – $\omega_k[1]$. Шаги на этом цикле аналогичны шагам предыдущего цикла.

Проиллюстрируем предлагаемую модификацию примером. Так как модифицируется порядок применения методов [1, 2], иллюстрацию проведем на примере № 4.26 из [2]. Выбор примера из [2] позволит не только компактно провести иллюстрацию модификации, но и показать ее эффект.

За объект иллюстрации принят двухпролетный стержень постоянного сечения. Схема стержня и пролеты показаны на рис. 1, а. Сечение стержня – составной двутавр. Размеры сечения: высота $b_1 = 0,2$ м, ширина $b_2 = 0,12$ м, толщина стенки $\delta_{st} = 0,02$ м, толщина полки $\delta_p = 0,02$ м. Модуль упругости материала $E = 206\,000$ МПа. Удельная масса $\rho = 7850$ кг/м³. Принята дискретная модель из 24 участков. Стержень несет внешнюю распределенную массу интенсивностью в первом пролете $m = 100$ кг/м, а во втором $m = 120$ кг/м. Распределенная масса приведена к узлам и составляет соответственно в первом пролете $m[i] = (100 \cdot 5,25) / 10,5 = 50$ кг, а во втором $m[i] = (120 \cdot 6,75) / 13,5 = 60$ кг (рис. 1, а). С учетом массы стержня в первом пролете $m[i] = 81,40$ кг, а во втором $m[i] = 91,40$ кг. Величина первой круговой собственной частоты равна $\omega[1] = 80,20$. В первой задаче примера требуется разместить в любых узлах кроме опорных (узлы с номерами 0, 11, 24 и 25) максимально возможную сумму дополнительных масс, не уменьшив при этом первую собственную частоту более чем на 10 % ($\alpha_{\omega 1} = 0,9$). Таким образом, в стержне с дополнительными массами должно выполняться условие $\omega[1] \geq \omega_{01} = 0,9 \cdot 80,20 = 72,18$. Ограничения на величины дополнительных масс (3) первой задачи для узлов первого пролета заданы в виде $dm[i] = 35$ кг $\geq m_{1d}[i] \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, 10$), а для узлов второго пролета – в виде $dm[i] = 42$ кг $\geq m_{1d}[i] \geq 0$ ($i = 12, 13, \dots, 23$).

Результаты решения этой задачи методом [1, 2] без модификации приведены на рис. 1.

Расчет содержал 5 этапов. На первых четырех этапах выявлялось по четыре узловых точки, в которых размещались предельно допустимые дополнительные массы (рис. 1, б – д). Для этих дополнительных масс ограничения (3) выполняются в виде равенств. На пятом этапе дополнительные массы (рис. 1, е, узлы 5 и 19) меньше предельных. Сумма дополнительных масс

$$M_{1d} = \sum_{i=1}^{n1} m_{1d}[i] = 639,50 \text{ кг.}$$

Так как на первых четырех этапах выявлялось

более одной предельно допустимой массы, можно предположить, что чувствительность выявленных на каждом из этапов узлов к размещению в них дополнительных масс может различаться. Поэтому применим к данному примеру изложенную выше модификацию, при которой на каждом цикле расчета выявляется одна узловая точка, наименее чувствительная к расположению в ней дополнительной массы. Очевидно, что узловые точки, выявленные на

начальных этапах расчета, менее чувствительны к размещению масс, чем выявленные на последующих этапах.

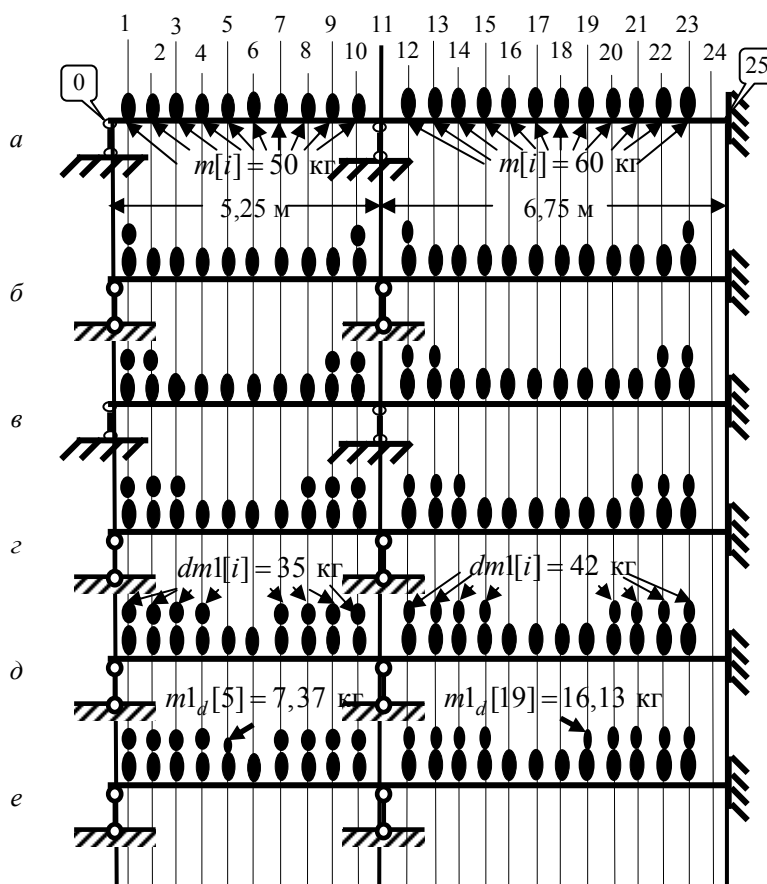


Рис. 1

Применение модификации начнем не с исходного состояния системы (рис. 1, а), а с состояния третьего этапа (рис. 1, г, 2, а).

Для этого состояния первая частота собственных колебаний $\omega_0[1] = 76,1988$. Начальный цикл модификации обозначим первым номером.

1. Задаем малое значение коэффициента понижения первой частоты собственных колебаний $\alpha_{\omega 1} = 0,999$.

2. Методом решения первой задачи [1, 2] понижаем собственную частоту $\omega_0[1]$ до значения $\alpha_{\omega 1} \cdot \omega_0[1] = 0,999 \cdot 76,1988 = 76,227$. Выявлена одна дополнительная масса $m1_d[20] = 4,40$ кг. На рис. 2, б выявленная узловая точка помечена $\star$. Так как выявилась лишь одна узловая точка, в которой размещена дополнительная масса, то значение $\alpha_{\omega 1}$ выбрано достаточно малым.

3. В выявленном дополнительном узле (№ 20) размещаем предельно допустимую массу $m_{1d}[20] = 42$ кг (рис. 2, в). Для этого состояния первая частота собственных колебаний $\omega_1[1] = 75,4662$.

4. Принимаем коэффициент понижения частоты $\omega_1[1]$ до заданного значения $\omega_{01} = 72,1839$ равным $\alpha_{\omega 1} = \omega_{01} / \omega_1[1] = 72,1839 / 75,4662 = 0,9565$ и методом решения первой задачи [1, 2] понижаем собственную частоту. При этом сумма дополнительных масс по сравнению с начальным состоянием (рис. 1, а, 2, а) составляет $M_{1d} = \sum_{i=1}^{n1} m_{1d}[i] = 646,52$ кг. Метод был реализован

за три этапа. Уже на первом выявились две дополнительные узловые точки, загруженные предельно допустимыми массами (4 и 19). Так как число таких точек больше, чем одна, переходим ко второму циклу.

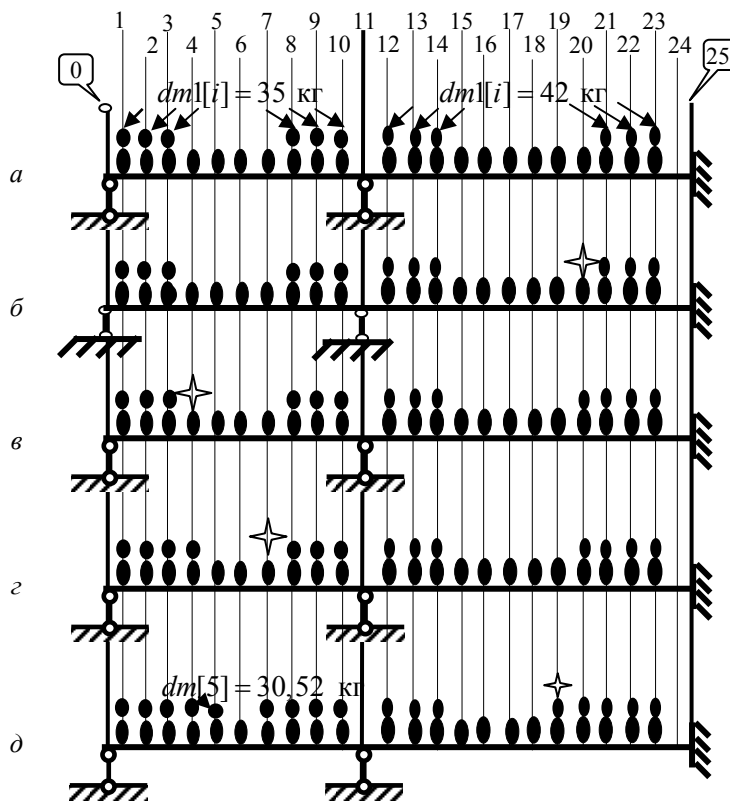


Рис. 2

Во втором цикле за начальное принимаем состояние шага 3 предыдущего цикла (рис. 2, в). Для этого состояния первая частота собственных колебаний $\omega_1[1] = 75,4662$.

1. Задаем значение коэффициента понижения первой частоты собственных колебаний $\alpha_{\omega 1} = 0,999$.

2. Методом решения первой задачи [1, 2] понижаем собственную частоту $\omega_1[1]$ до значения $\alpha_{\omega 1} \cdot \omega_1[1] = 0,999 \cdot 75,4662 = 75,3907$. Выявлена одна дополнительная масса $m_{1d}[4] = 3,8966$ кг. На рис. 2, в выявленная узловая точка помечена $\star$. Так как выявилась лишь одна узловая точка, в которой размещена дополнительная масса, то значение $\alpha_{\omega 1}$ выбрано достаточно малым.

3. В выявленном дополнительном узле (№ 4) размещаем предельно допустимую массу $m_{1d}[4] = 35$ кг (рис. 2, в). Для этого состояния первая частота собственных колебаний $\omega_2[1] = 74,7749$.

4. Принимаем коэффициент понижения частоты $\omega_1[1]$ до заданного значения $\omega_{01} = 72,1839$ равным $\alpha_{\omega 1} = \omega_{01} / \omega_2[1] = 72,1839 / 74,7749 = 0,9653$ и методом решения первой задачи [1, 2] понижаем собственную частоту. При этом сумма дополнительных масс по сравнению с начальным состоянием (рис. 1, а, 2, а) составляет $M_{1d} = \sum_{i=1}^{n1} m_{1d}[i] = 646,52$ кг. Метод был реализован

за три этапа. Уже на первом выявились две дополнительные узловые точки, загруженные предельно допустимыми массами (7 и 19). Так как число таких точек больше, чем одна переходим к третьему циклу.

В третьем цикле за начальное принимаем состояние шага 3 предыдущего цикла (рис. 2, з). Для этого состояния первая частота собственных колебаний $\omega_2[1] = 74,7749$.

1. Задаем значение коэффициента понижения первой частоты собственных колебаний $\alpha_{\omega 1} = 0,999$.

2. Методом решения первой задачи [1, 2] понижаем собственную частоту $\omega_2[1]$ до значения $\alpha_{\omega 1} \cdot \omega_2[1] = 0,999 \cdot 74,7749 = 74,7001$. Выявлена одна дополнительная масса $m_{1d}[7] = 3,1285$ кг. На рис. 2, в выявленная узловая точка помечена $\star$. Так как выявилась лишь одна узловая точка, в которой размещена дополнительная масса, то значение $\alpha_{\omega 1}$ выбрано достаточно малым.

3. В выявленном дополнительном узле (№ 7) размещаем предельно допустимую массу $m_{1d}[7] = 35$ кг (рис. 2, з). Для этого состояния первая частота собственных колебаний $\omega_3[1] = 73,9320$.

4. Принимаем коэффициент понижения частоты $\omega_3[1]$ до заданного значения $\omega_{01} = 72,1839$ равным $\alpha_{\omega 1} = \omega_{01} / \omega_3[1] = 72,1839 / 73,9320 = 0,9763$ и методом решения первой задачи [1, 2] понижаем собственную частоту. При этом сумма дополнительных масс по сравнению с начальным состоянием (рис. 1, а, 2, а) составляет $M_{1d} = \sum_{i=1}^{n1} m_{1d}[i] = 646,52$ кг. Метод был реализован

за два этапа. При этом была выявлена только одна дополнительная узловая

точка, загруженная предельно допустимой массой (19). Таким образом, полученный здесь результат является окончательным.

На рассмотренных трех циклах сумма дополнительных масс по сравнению с начальным состоянием (рис. 1, а, 2, а) оказалась одинаковой

$$M1_d = \sum_{i=1}^{n1} m1_d[i] = 646,52 \text{ кг}, \text{ но большей, чем при использовании метода без}$$

модификации, где $M1_d = \sum_{i=1}^{n1} m1_d[i] = 639,50 \text{ кг}$. Разница составляет 1,086 %.

Таким образом, модификация метода позволяет получать решение если не абсолютно оптимальное, то более близкое к нему.

Модификация метода решения второй задачи аналогична предыдущей.

Она также реализуется выполнением нескольких циклов расчета. На каждом цикле выявляется одна узловая точка, наиболее чувствительная к снятию в ней массы, а затем выполняются дальнейшие действия текущего цикла.

Если рассматривается k -й цикл расчета, то на этом цикле система отличается от исходной тем, что на предыдущих $(k-1)$ циклах в выявленных на них узловых точках сняты предельно допустимые массы $m2_d[i] = dm2[i]$. Первая собственная частота этой системы – $\omega_{k-1}[1]$.

Структура k -го цикла расчета состоит из четырех шагов.

1. Выбирается достаточно малое значение коэффициента повышения первой собственной частоты $\alpha_{\omega 2}$. Достаточность малости величины $\alpha_{\omega 2}$ определится на втором шаге.

2. При выбранном значении $\alpha_{\omega 2}$ методом решения второй задачи [1, 2] повышаем собственную частоту $\omega_{k-1}[1]$ до значения $\alpha_{\omega 2} \cdot \omega_{k-1}[1]$. Если при этом действии выявится лишь одна узловая точка, в которой снята масса, то значение $\alpha_{\omega 2}$ выбрано достаточно малым. Если же таких точек окажется больше, то необходимо вернуться к первому шагу цикла и величину $\alpha_{\omega 2}$ уменьшить.

3. Если на втором шаге при повышении частоты от $\omega_{k-1}[1]$ до $\alpha_{\omega 2} \cdot \omega_{k-1}[1]$ выявлен один дополнительный узел № t , то в нем снимается предельно допустимая масса $m2_d[t] = dm2[t]$, и с учетом этой массы определяется первая собственная частота этой системы – $\omega_k[1]$. Если окажется, что $\omega_k[1] \geq \omega_{02}$, то четвертый шаг этого цикла не выполняется, и цикл является последним. В этом случае за окончательное решение принимается тот результат, из числа полученных на четвертых шагах предыдущих циклов, для которого сумма снятых масс наименьшая. Если $\omega_k[1] < \omega_{02}$, то переходим к четвертому шагу этого цикла.

4. Принимаем коэффициент повышения частоты $\omega_k[1]$ до заданного значения ω_{02} равным $\alpha_{\omega 2} = \omega_{02} / \omega_k[1]$ и методом решения второй задачи [1, 2] повышаем собственную частоту. Если при реализации метода на этом

шаге окажется, что на каждом его этапе появлялось лишь по одному узлу с предельной величиной снятых масс, то расчет закончен. Также расчет заканчивается, если он реализован в один этап и при этом все выявленные массы оказались меньше предельных. В этих случаях за окончательное решение принимается тот результат, из числа полученных на четвертых шагах всех циклов, для которого сумма снятых масс наименьшая. Если же на каком-либо этапе метода число узлов, в которых снятые массы равны предельным, оказывалось больше, чем единица, то переходим к следующему $(k+1)$ -му циклу.

Система, которая рассматривается в $(k+1)$ -м цикле, отличается от исходной тем, что на предыдущих k циклах в выявленных в них k узловых точках сняты предельно допустимые массы $m_{2_d}[i] = dm_2[i]$. Первая собственная частота этой системы – $\omega_k[1]$. Шаги на этом цикле аналогичны шагам предыдущего цикла.

Проиллюстрируем предлагаемую модификацию примером. Так как модифицируется порядок применения методов [1, 2], иллюстрацию проведем на примере № 4.27 из [2]. Выбор примера из [2] позволит не только компактно провести иллюстрацию модификации, но и показать ее эффект.

Рассмотрим шарнирно опертую квадратную пластинку размером $l_1 = 6$ м и $l_2 = 6$ м. Толщина пластинки 0,12 м, модуль упругости $E = 24\,000$ МПа. Удельная масса $\rho = 2400$ кг/м³. На пластинку нанесем сетку из 36 ячеек (рис. 3). Величины узловых масс в кг приведены в табл. 1 и схематично показаны на рис. 3, а. С учетом собственной массы пластинки к каждой узловой массе добавится 288 кг. Величина первой круговой собственной частоты равна $\omega[1] = 41,94$.

Таблица 1

	1	2	3	4	5
1	200	200	200	200	200
2	200	400	200	600	200
3	200	200	200	200	200
4	200	800	200	1000	200
5	200	200	200	200	200

Во второй задаче данного примера требуется снять в любых узлах пластины минимально возможную сумму масс, увеличив при этом первую собственную частоту на 10 %. Таким образом, если принять $\alpha_{2_\omega} = 1,1$, то в пластине после снятия масс должно выполняться условие $\omega[1] \geq \omega_{02} = 1,1 \cdot 41,94 = 46,13$. При минимальной сумме снятых масс это условие выполняется в виде равенства. Ограничения второй задачи (6) для всех узлов заданы в виде $dm_2[i] = 0,8 \cdot m[i, k]$, где $m[i, k]$ узловая масса без учета собственной массы пластины. Таким образом, для всех узлов кроме 2,2, 2,4, 4,2, 4,4 ограничения имеют вид $dm_2[i, k] = 160$ кг $\geq m_{2_d}[i, k] \geq 0$. Для узлов 2,2

2,4, 4,2, 4,4 соответственно – $dm2[2,2]=320$ кг, $dm2[2,4]=480$ кг, $dm2[4,2]=640$ кг и $dm2[4,4]=800$ кг.

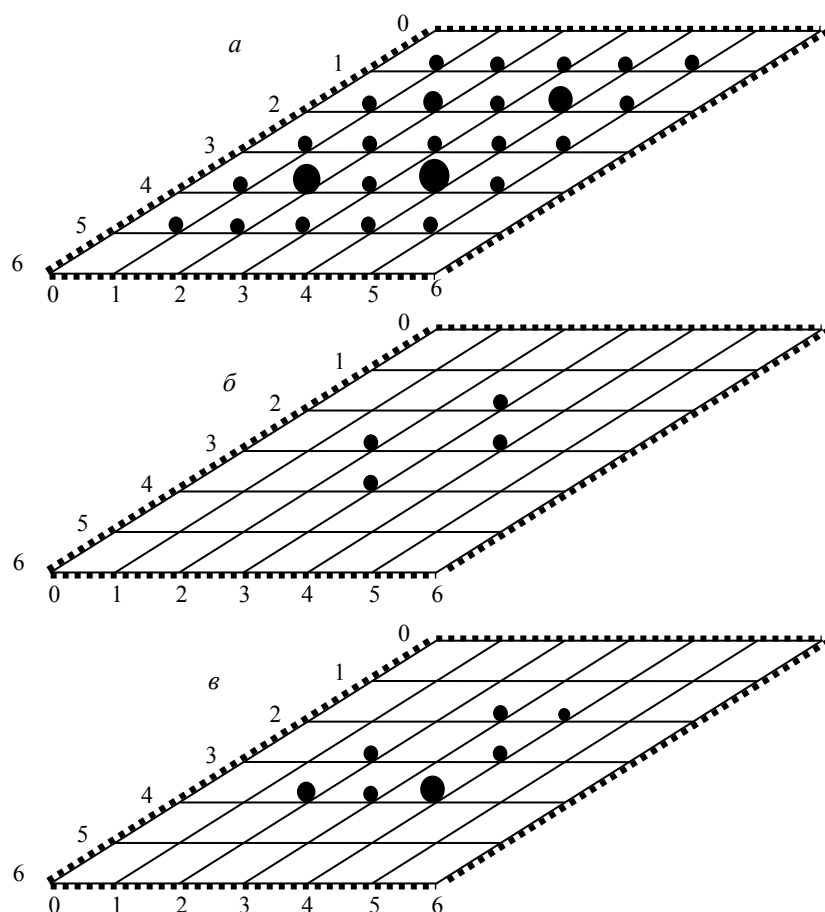


Рис. 3

Результаты решения этой задачи методом [1, 2] без модификации приведены на рис. 3, б, в. Расчет состоял из двух этапов. На первом этапе выявлено четыре узловых точки, в которых снимались предельно допустимые массы (рис. 3, б, узлы 2,3, 3,2, 3,4, 4,3). Для этих снятых масс ограничения (6) выполняются в виде равенств (160 кг). На втором этапе сняты массы меньше предельных (рис. 3, в, узлы 2,4, 4,2, и 4,4). Итак, в узлах 2,3, 3,2, 3,4, 4,3 сняты предельные массы по 160 кг. В узле 2,4 снята масса $m2_d[2,4]=60,38$ кг, в узле 4,2 $m2_d[4,2]=260,38$ кг, а в узле 4,4 – $m2_d[4,4]=513,95$ кг. Функция

цели составила $M2_d = \sum_{i=1}^{n2} m2_d[i] = 1474,71$ кг (табл. 2).

Таблица 2

	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0
2	0	0	160	60,38	0
3	0	160	0	160	0
4	0	260,38	160	513,95	0
5	0	0	0	0	0

Так как на первом этапе выявилось более одной предельно допустимой массы, можно предположить, что чувствительность выявленных узлов к снятию в них масс может различаться. Поэтому применим к данному примеру изложенную выше модификацию, при которой на каждом цикле расчета выявляется *одна* узловая точка, наиболее чувствительная к снятию в ней массы.

Для начального состояния первая частота собственных колебаний $\omega[1] = 41,94$. Начальный цикл модификации обозначим первым номером.

Выполняем шаги первого цикла.

1. Задаем малое значение коэффициента повышения первой частоты собственных колебаний $\alpha_{\omega 2} = 1,001$.

2. Методом решения второй задачи [1, 2] повышаем собственную частоту $\omega_0[1]$ до значения $\alpha_{\omega 2} \cdot \omega_0[1] = 1,001 \cdot 41,94 = 41,9807$. Выявлена одна узловая точка, в которой снята масса $m_{2_d}[4,3] = 14,3397$ кг. На рис. 4, а выявленная узловая точка помечена цифрой 1. Так как выявилась лишь одна узловая точка, в которой снята масса, то значение $\alpha_{\omega 2}$ выбрано достаточно малым.

3. В выявленном узле 4,3 снимаем предельно допустимую массу $m_{2_d}[4,3] = 160$ кг. Для этого состояния первая частота собственных колебаний $\omega_1[1] = 42,4112$.

4. Принимаем коэффициент повышения частоты $\omega_1[1]$ до заданного значения $\omega_{01} = 46,13$ равным $\alpha_{\omega} = \omega_{01} / \omega_1[1] = 46,13 / 42,4112 = 1,0877$ и методом решения второй задачи [1, 2] повышаем собственную частоту. При этом сумма снятых масс по сравнению с начальным состоянием (рис. 3, а) составит $M_{2_d} = \sum_{i=1}^{n1} m_{1_d}[i] = 1473,7057$ кг. Метод был реализован за два этапа.

Уже на первом выявились три дополнительные узловые точки, в которых были сняты предельно допустимые массы (2,3, 3,2 и 3,4). Так как число таких точек больше, чем одна, переходим ко второму циклу.

Выполняем шаги второго цикла. На этом цикле учитываем, что на предыдущем цикле была снята масса $m_{2_d}[4,3] = 160$ кг и что теперь с учетом этого обстоятельства первая частота собственных колебаний равна $\omega_1[1] = 42,4112$.

1. Задаем малое значение коэффициента повышения первой частоты собственных колебаний $\alpha_{\omega 2} = 1,001$.

2. Методом решения второй задачи [1, 2] повышаем собственную частоту $\omega_0[1]$ до значения $\alpha_\omega 2 \cdot \omega_0[1] = 1,001 \cdot 42,4112 = 42,4536$. Выявлена одна узловая точка, в которой снята масса $m_{2_d}[3,4] = 14,2268$ кг. На рис. 4, а выявленная узловая точка помечена цифрой 2. Так как выявилась лишь одна узловая точка, в которой снята масса, то значение $\alpha_\omega 2$ выбрано достаточно малым.

3. В выявленном узле 3,4 снимаем предельно допустимую массу $m_{2_d}[3,4] = 160$ кг. Для этого состояния первая частота собственных колебаний $\omega_1[1] = 42,8925$.

4. Принимаем коэффициент повышения частоты $\omega_1[1]$ до заданного значения $\omega_{01} = 46,13$ равным $\alpha_\omega = \omega_{01} / \omega_1[1] = 46,13 / 42,8925 = 1,0755$ и методом решения второй задачи [1, 2] повышаем собственную частоту. При этом сумма снятых масс по сравнению с начальным состоянием (рис. 3, а) составит $M_{2_d} = \sum_{i=1}^{n1} m_{1_d}[i] = 1362,9786$ кг. Метод был реализован за три этапа.

Уже на первых двух этапах выявились три дополнительные узловые точки, в которых были сняты предельно допустимые массы (2,3, 3,2 и 3,3). Так как число таких точек больше, чем по одной в каждом этапе, переходим к третьему циклу.

Выполняем шаги третьего цикла. На этом цикле учитываем, что на предыдущих циклах были сняты массы $m_{2_d}[4,3] = 160$ кг и $m_{2_d}[3,4] = 160$ кг и что теперь с учетом этого обстоятельства первая частота собственных колебаний равна $\omega_1[1] = 42,8925$.

1. Задаем малое значение коэффициента повышения первой частоты собственных колебаний $\alpha_\omega 2 = 1,001$.

2. Методом решения второй задачи [1, 2] повышаем собственную частоту $\omega_0[1]$ до значения $\alpha_\omega 2 \cdot \omega_0[1] = 1,001 \cdot 42,8925 = 42,9354$. Выявлена одна узловая точка, в которой снята масса $m_{2_d}[3,2] = 14,2625$ кг. На рис. 4, а выявленная узловая точка помечена цифрой 3. Так как выявилась лишь одна узловая точка, в которой снята масса, то значение $\alpha_\omega 2$ выбрано достаточно малым.

3. В выявленном узле 3,2 снимаем предельно допустимую массу $m_{2_d}[3,2] = 160$ кг. Для этого состояния первая частота собственных колебаний $\omega_1[1] = 43,3776$.

4. Принимаем коэффициент повышения частоты $\omega_1[1]$ до заданного значения $\omega_{01} = 46,13$ равным $\alpha_\omega = \omega_{01} / \omega_1[1] = 46,13 / 43,3776 = 1,0635$ и методом решения второй задачи [1, 2] повышаем собственную частоту. При этом сумма снятых масс по сравнению с начальным состоянием (рис. 3, а) составит $M_{2_d} = \sum_{i=1}^{n1} m_{1_d}[i] = 1359,1296$ кг. Метод был реализован за три этапа.

Так как на первых двух этапах выявились *лишь по одной* дополнительной узловой точке, в которых были сняты предельно допустимые массы (2,3

и 3,3), то процесс заканчивается. Сумма снятых масс

$M2_d = \sum_{i=1}^{n1} m1_d[i] = 1359,1296$ кг меньше, чем на четвертых шагах предыдущих

циклов, и меньше, чем при использовании метода без модификации, где

$M2_d = \sum_{i=1}^{n2} m2_d[i] = 1474,71$ кг. Разница составляет 8,5 %.

Итак, в узлах 2,3, 3,2, 3,3, 3,4 и 4,4 сняты предельные массы по 160 кг. В узле 2,4 снята масса $m2_d[2,4] = 47,89$ кг, в узле 4,2 – $m2_d[4,2] = 155,62$ кг, а в узле 4,4 – $m2_d[4,4] = 355,62$ кг (табл. 3). Схематично снятые массы показаны на рис. 4, б.

Таблица 3

	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0
2	0	0	160	47,89	0
3	0	160	160	160	0
4	0	155,62	160	355,62	0
5	0	0	0	0	0

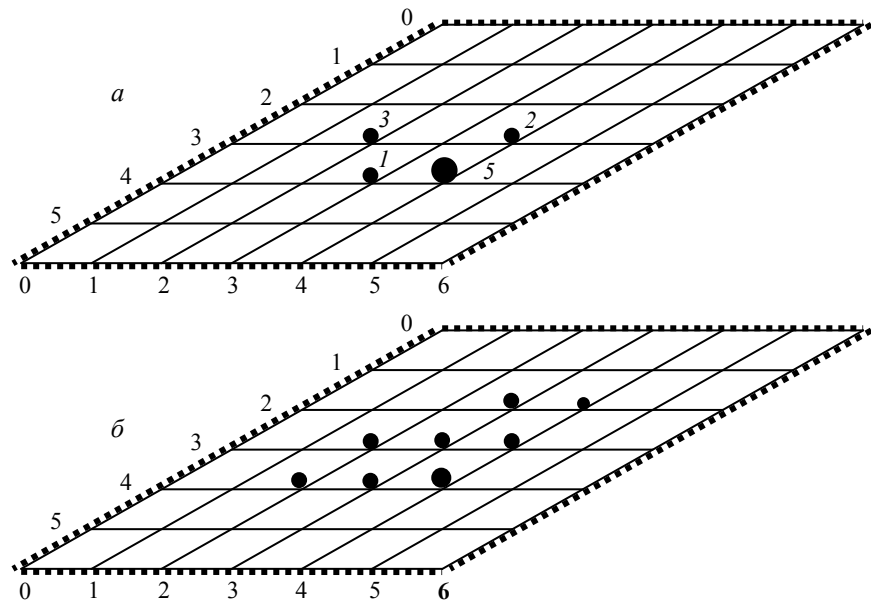


Рис. 4

Как уже отмечалось, особое свойство форм собственных колебаний при оптимальном размещении масс [1, 2] обеспечивает достижение абсолютного оптимума лишь тогда, когда все ограничения (3) в первой задаче и (6) во второй выполняются в виде строгих неравенств. В [1, 2] на основе этого свойства

предложены методы решения двух приведенных выше задач. Методы обеспечивают поэтапное движение к оптимальным решениям, но гарантировать их абсолютное достижение при соблюдении части ограничений (3) или (6) в виде равенств не могут. В предложенных методах на некоторых этапах расчета могут выявляться по несколько узловых точек, в которых ограничения (3) в первой задаче или (6) во второй выполняются в виде равенств. При этом чувствительность выявленных узлов к добавлению или снятию масс может различаться. Предлагаемая модификация методов предусматривает выявление на каждом цикле и этапе расчета добавление или снятие предельных значений масс лишь в *одном узле*. Предложенная модификация, выявляя последовательно по одной наиболее чувствительной узловой точке с предельной добавляемой или снимаемой массой, позволяет получать решения, более близкие к абсолютно оптимуму. Приведенные примеры подтверждают этот вывод.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Ляхович, Л.С.* Оптимизация изменений нагрузки при ограничениях на величину частоты собственных колебаний / Л.С. Ляхович, Н.А. Круль // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. – 2001. – № 1. – С. 8–9.
2. *Ляхович, Л.С.* Особые свойства оптимальных систем и основные направления их реализации в методах расчета сооружений : монография / Л.С. Ляхович. – Томск : Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2009. – 372 с.

REFERENCES

1. *Lyakhovich L.S., Krul' N.A.* Optimizatsiya izmenenii nagruzki pri ogranicheniyakh na velichinu chastoty sobstvennykh kolebanii [Optimization of load change at limited eigen frequency]. *Vestnik TSUAB*, 2001. No. 1. Pp. 8–9. (rus)
2. *Lyakhovich L.S.* Osobyie svoistva optimal'nykh sistem i osnovnye napravleniya ikh realizatsii v metodakh rascheta sooruzhenii : monografiya [Specific properties of optimum systems and their implementations in building design]. TSUAB Publ., 2009. 372 p. (rus)