

СТРОИТЕЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ, ЗДАНИЯ И СООРУЖЕНИЯ

УДК 624.045

DOI: 10.31675/1607-1859-2018-20-1-140-147

Р.П. МОИСЕЕНКО, О.О. КОНДРАТЕНКО,

Томский государственный архитектурно-строительный университет

АЛГОРИТМ ОПТИМИЗАЦИИ РЕБРИСТЫХ ТОНКИХ ПЛАСТИН МЕТОДОМ ЛАГРАНЖА

Представлены два итерационных алгоритма решения уравнений метода Лагранжа. На конкретном примере показано, что эти итерационные алгоритмы не сходятся. Для сравнения использованы оптимальные параметры ребристой пластины, полученные авторами другим способом. Этот способ основан на особом свойстве оптимальности ребристых пластин, сформулированном в результате анализа уравнений Лагранжа. В примере оптимальные параметры удовлетворили всем уравнениям Лагранжа. Выполнение уравнений свидетельствует о том, что оптимизация ребристых пластин возможна только с использованием особых свойств оптимальности.

Ключевые слова: пластина; ребро; частота собственных колебаний; свойство оптимальности; метод Лагранжа.

Для цитирования: Моисеенко Р.П., Кондратенко О.О. Алгоритм оптимизации ребристых тонких пластин методом Лагранжа // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. 2018. Т. 20. № 1. С. 140–147.

R.P. MOISEENKO, O.O. KONDRATENKO,

Tomsk State University of Architecture and Building

LAGRANGIAN METHOD FOR ALGORITHM OPTIMIZATION OF RIBBED THIN PLATES

The paper presents two iteration algorithms for the equation solution using the method of Lagrange multipliers. It is shown that these iteration algorithms do not converge. For comparison, we use the optimum parameters of a ribbed plate obtained by other methods. The proposed method is based on the specific properties of optimality of ribbed plates formulated as a result of the Lagrange equation analysis. These optimum parameters satisfy each of Lagrange equations. The solution of these equations shows that optimization of ribbed plates is possible only with the use of specific optimality properties.

Keywords: plate; rib; natural oscillation frequency; optimality property; Lagrangian method.

For citation: Moiseenko R.P., Kondratenko O.O. Algorithm optimizatsii rebristyykh tonkikh plastin metodom Lagranzha [Lagrangian method for algorithm optimization of ribbed thin plates]. Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta – Journal of Construction and Architecture. 2018. V. 20. No. 1. Pp. 140–147. (rus)

Введение

Метод Лагранжа занимает особое место среди методов оптимизации конструкций. Процедура метода Лагранжа позволяет сформулировать условия оптимальности в самом общем виде [1]. В литературе отмечается, что условия оптимальности и ограничения образуют систему уравнений, из которой теоретически определяются все параметры управления и множители Лагранжа. Однако на практике структура уравнений-ограничений не всегда позволяет решить систему [2, 3]. Поэтому в каждой конкретной задаче оптимизации требуется исследовать систему уравнений и в случае необходимости разработать дополнительные способы решения. В статье рассматривается эта общетеоретическая проблема применительно к расчёту ребристых тонких пластин.

Постановка задачи

Оптимизация ребристых тонких пластин методом Лагранжа сводится к следующим уравнениям [4]:

$$\text{Функция цели} \quad F = \sum_{i=1}^k B_i H_i - \min. \quad (1)$$

$$\text{Ограничение} \quad D^* = \left| U_0 + BH^3 \sum_{i=1}^k d_i c_i^3 U_i - \bar{\lambda} \left(T_0 + BH \sum_{i=1}^k c_i d_i T_i \right) \right| = 0, \quad (2)$$

где $\bar{\lambda} = \rho h l_x^2 \bar{\omega}^2 / D$; h – толщина пластины; l_x – длина кромки пластины, параллельной оси x ; U_i – матрица потенциальной энергии деформации i -го ребра; T_i – матрица кинетической энергии i -го ребра; U_0 – матрица потенциальной энергии деформации пластины без рёбер; T_0 – матрица кинетической энергии пластины без рёбер; D – цилиндрическая жёсткость пластины; $H_i = c_i H$, $B_i = d_i B$; $H = \frac{h_p}{h}$, $B = \frac{b_p}{l_x}$ – безразмерные параметры высоты и ширины поперечного сечения; h_p, b_p – высота и ширина поперечного сечения ребра; k – число рёбер.

Функция цели (1) показывает, что в качестве параметров управления приняты: B_i – относительная ширина поперечного сечения i -го ребра; H_i – относительная высота поперечного сечения i -го ребра. Минимизируется вес рёбер при постоянной толщине пластины.

Функция Лагранжа в соответствии с ограничением (2) записывается в виде

$$L = \sum_i B_i H_i - \lambda D^*, \quad (3)$$

где λ – множитель Лагранжа.

В математической и технической литературе одной буквой λ обозначаются две величины: множитель Лагранжа и собственное значение матрицы. Обе эти величины используются в данной статье, и смысл их обозначения устанавливается из контекста.

Минимум функции L (3) достигается при условиях

$$\frac{\partial L}{\partial B_i} = H_i - \lambda \frac{\partial D^*}{\partial B_i} = 0; \quad (4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial H_i} = B_i - \lambda \frac{\partial D^*}{\partial H_i} = 0. \quad (5)$$

Уравнения (4), (5) в математической литературе по теории оптимизации называются условиями оптимальности [1, 2]. Уравнения (2), (4), (5) образуют систему из $(2k + 1)$ уравнений относительно $(2k + 1)$ неизвестных: $H_i, B_i \rightarrow 2k; \lambda \rightarrow 1$.

Вместо уравнения (2) может использоваться уравнение [5]

$$I = a'(U - \bar{\lambda}T)a = 0. \quad (6)$$

Тогда уравнения (4), (5) принимают вид

$$\frac{\partial L}{\partial B_i} = H_i - \lambda \frac{\partial I}{\partial B_i} = 0; \quad (7)$$

$$\frac{\partial L}{\partial H_i} = B_i - \lambda \frac{\partial I}{\partial H_i} = 0. \quad (8)$$

Так как уравнения нелинейны, существует несколько вариантов численного решения системы.

Алгоритм № 1. Если определить множитель Лагранжа λ из первого уравнения (4), получится формула

$$\frac{\partial L}{\partial B_1} = H_1 - \lambda \frac{\partial D^*}{\partial B_1} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{H_1}{\frac{\partial D^*}{\partial B_1}}. \quad (9)$$

Тогда из остальных уравнений (4), (5) следуют выражения

$$H_{(i+1)} = \frac{H_1}{\frac{\partial D^*}{\partial B_1}} \frac{\partial D^*}{\partial B_{(i+1)}}; \quad B_i = \frac{H_1}{\frac{\partial D^*}{\partial B_1}} \frac{\partial D^*}{\partial H_i}. \quad (10)$$

При использовании уравнения (6) из уравнений (7), (8) следуют аналогичные выражения

$$\frac{\partial L}{\partial B_1} = H_1 - \lambda \frac{\partial I}{\partial B_1} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{H_1}{\frac{\partial I}{\partial B_1}}; \quad (11)$$

$$H_{(i+1)} = \frac{H_1}{\frac{\partial I}{\partial B_1}} \frac{\partial I}{\partial B_{(i+1)}}; \quad B_i = \frac{H_1}{\frac{\partial I}{\partial B_1}} \frac{\partial I}{\partial H_i}. \quad (12)$$

Последовательность решения уравнений, например, (6) – (8) состоит в следующем.

1. Назначаются величины: $c_i = 1$; $d_i = 1$; $B = B_0$; $\lambda = \bar{\lambda}$.

2. Из уравнения (2) определяется наибольший корень H :

$$D^* = \left| U_0 + BH^3 \sum_{i=1}^k d_i c_i^3 U_i - \bar{\lambda} \left(T_0 + BH \sum_{i=1}^k c_i d_i T_i \right) \right| = 0 \Rightarrow H = H_{\max}.$$

3. При известных значениях B , H решается задача на собственные значения, т. е. определяются первое собственное значение λ_1 и первый собственный вектор a_1 [6]. Если пункт 2 выполнен правильно, то получится результат: $\lambda_1 = \bar{\lambda}$ – первое собственное значение матрицы полной энергии системы равно заданному значению.

4. При известных значениях λ_1 и компонентах вектора a_1 вычисляются производные

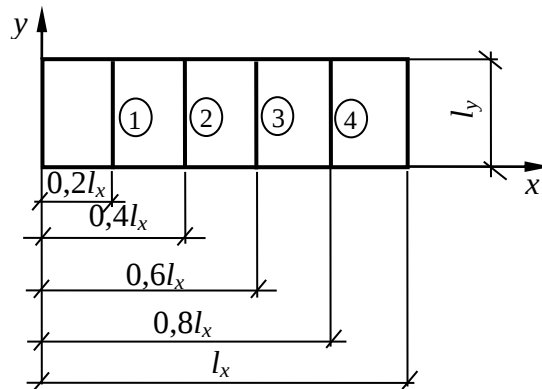
$$IB_i = \frac{\partial I}{\partial B_i}; \quad IH_i = \frac{\partial I}{\partial H_i}.$$

5. По выражениям (11), (12) вычисляются величины λ , $H_{(i+1)}$, B_i .

6. Вычисляются коэффициенты: $c_{(i+1)} = \frac{H_{(i+1)}}{H}$; $d_i = \frac{B_i}{B}$.

7. Переход к пунктам 2, 3, 4, 5, 6 и т. д. до получения результатов с заданной точностью.

Для реализации составленного алгоритма рассмотрен пример, представленный на рисунке.



Расчётная схема пластины

Пластина имеет шарнирные опоры. Расположение рёбер и их координаты показаны на рисунке. Соотношение сторон пластины: $l_y / l_x = 1/3$. Пластина рассчитана энергетическим методом по известной процедуре [7]. Заданное собственное значение принято в промежутке $\lambda_4^0 < \bar{\lambda}_1 = 1000 < \lambda_5^0$, что соответствует теореме о наложении связей (рёбер) на систему [8].

Результаты расчёта представлены в табл. 1. Приведены только две итерации, потому что сравнение соответствующих величин показывает, что процесс итераций расходится с самого начала. Наиболее наглядно об этом свидетельствует сравнение величин F – функция цели во второй итерации больше, чем в первой.

Таблица 1

Параметры ребристой пластины после двух итераций по первому алгоритму

Итерация	c_1	c_2	c_3	c_4	F	B_0
1	1	0,381966	0,381966	1	0,377517	0,03
2	1	–220,38	–220,38	1	0,64337	0,03
Итерация	d_1	d_2	d_3	d_4	H	λ_1
1	3,9968	1,526672	1,526672	3,9968	3,145975	1000
2	24,0121	–315,6	–315,6	24,0121	2,341225	170,48

Расчёт ребристой пластины в данном примере показал, что непосредственное решение уравнений метода Лагранжа с помощью итераций к цели не приводит.

Алгоритм № 2. Возможен другой вариант решения уравнений метода Лагранжа. Из уравнений (7), (8) следует

$$\lambda = \frac{H_i}{\frac{\partial I}{\partial B_i}} = \frac{B_i}{\frac{\partial I}{\partial H_i}} = \text{const} . \quad (13)$$

Условие (13) используется в процедуре метода итераций.

Пункты 1, 2, 3, 4 повторяются из предыдущей последовательности.

5. По выражениям (13) определяются величины множителей Лагранжа:

$$\lambda H_i = \frac{H_i}{\frac{\partial I}{\partial B_i}}; \quad \lambda B_i = \frac{B_i}{\frac{\partial I}{\partial H_i}} . \quad (14)$$

6. Определяется среднее значение множителя Лагранжа:

$$\lambda_m = \frac{1}{2k} \sum_{i=1}^k (\lambda H_i + \lambda B_i) . \quad (15)$$

7. Коэффициенты c_i, d_i определяются из условия выравнивания множителей Лагранжа [9]:

$$c_i = c_i + \alpha \frac{(\lambda H_i - \lambda_m)}{\lambda_m}; \quad d_i = d_i + \beta \frac{(\lambda B_i - \lambda_m)}{\lambda_m} . \quad (16)$$

8. Повторение пунктов 2, 3, 4, 5, 6, 7 до выполнения условия (13) с заданной точностью.

Результаты расчёта рассмотренного примера по первой и второй итерациям представлены в табл. 2. Итерации № 3, 4, 5 и т. д. показывают, что алгоритм № 2 не сходится, так же как алгоритм № 1.

Таблица 2

**Параметры ребристой пластины после двух итераций
по второму алгоритму**

Итерация	c_1	c_2	c_3	c_4	F	B_0
1	0,9884	1,1315	1,1315	0,9884	0,377517	0,03
2	0,8888	1,3451	1,3451	0,8888	0,3876	0,03
Итерация	d_1	d_2	d_3	d_4	H	λ_1
1	0,9221	0,9579	0,9579	0,9221	3,145975	1000
2	0,8222	0,9438	0,9438	0,8222	3,237725	999,997

В статье [4] данный пример решён по сходящемуся алгоритму. Параметры оптимального проекта представлены в табл. 3.

Таблица 3

Параметры оптимальной ребристой пластины

c_1	c_2	c_3	c_4	F	B_0
1,002668	0,997332	0,997332	1,002668	0,3765	0,02992
d_1	d_2	d_3	d_4	H	λ_1
1,000533	0,999466	0,999466	1,000533	3,145975	1000

Сходящийся алгоритм в статьях [4, 5] основан на свойстве оптимальной ребристой пластины

$$\frac{\partial^2 I}{\partial B_i \partial H_i} = \text{const} \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 D^*}{\partial B_i \partial H_i} = \text{const}. \quad (17)$$

В примере при параметрах из табл. 3 это свойство подтверждается результатом

$$\frac{\partial^2 I}{\partial B_1 \partial H_1} = \frac{\partial^2 I}{\partial B_2 \partial H_2} = \frac{\partial^2 I}{\partial B_3 \partial H_3} = \frac{\partial^2 I}{\partial B_4 \partial H_4} = 5402,9.$$

Параметры ребристой пластины из табл. 3 удовлетворяют также условию оптимальности (13).

$$\begin{aligned} \frac{H_1}{\frac{\partial I}{\partial B_1}} = \frac{B_1}{\frac{\partial I}{\partial H_1}} = 7,383 \cdot 10^{-4}; \quad \frac{H_2}{\frac{\partial I}{\partial B_2}} = \frac{B_2}{\frac{\partial I}{\partial H_2}} = 7,383 \cdot 10^{-4}; \\ \frac{H_3}{\frac{\partial I}{\partial B_3}} = \frac{B_3}{\frac{\partial I}{\partial H_3}} = 7,383 \cdot 10^{-4}; \quad \frac{H_4}{\frac{\partial I}{\partial B_4}} = \frac{B_4}{\frac{\partial I}{\partial H_4}} = 7,383 \cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

Следовательно, решение уравнений (6) – (8) существует, но определяется при использовании условия оптимальности (17), как показано в статьях [4, 5].

Выводы

Показано, что оптимизация прямоугольных тонких ребристых пластин методом Лагранжа не всегда позволяет получить решение уравнений итерацион-

ным методом. Требуется провести дополнительное исследование свойств уравнений метода Лагранжа. На основе этого исследования формулируется *особое свойство оптимальности* [10] ребристой пластины. Использование особого свойства оптимальности приводит к сходящемуся итерационному алгоритму.

Таким образом, в задаче оптимизации ребристых пластин реализация особых свойств оптимальности – это не один из вариантов решения, а единственный способ получить параметры оптимальной конструкции.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Лазарев, И.Б. Основы оптимального проектирования конструкций. Задачи и методы / И.Б. Лазарев. – Новосибирск : Изд-во СГАПС, 1995. – 295 с.
2. Моисеев, Н.Н. Методы оптимизации / Н.Н. Моисеев, Ю.П. Иванилов, Е.М. Столярова. – М. : Наука, 1978. – С. 352.
3. Фиакко, А. Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной минимизации / А. Фиакко, Г. Мак-Кормик. – М. : Мир, 1972. – С. 240.
4. Моисеенко, Р.П. Оптимизация прямоугольных ребристых пластин с ограничением первой частоты собственных колебаний при управлении высотой и шириной поперечного сечения рёбер / Р.П. Моисеенко, О.О. Кондратенко // Известия вузов. Технология текстильной промышленности. – 2016. – № 6. – С. 196–200.
5. Моисеенко, Р.П. Оптимизация прямоугольных ребристых пластин с ограничением первой частоты собственных колебаний при управлении высотой и шириной поперечного сечения / Р.П. Моисеенко, О.О. Кондратенко // Строительная механика и расчет сооружений. – 2017. – № 6. – С. 42–45.
6. Гулд, С. Вариационные методы в задачах о собственных значениях / С. Гулд. – М. : Мир, 1970. – С. 328.
7. Доннелл, Л.Г. Балки, пластины и оболочки / Л.Г. Доннелл. – М. : Наука, 1982. – С. 568.
8. Ляхович, Л.С. Метод отделения критических сил и собственных частот упругих систем / Л.С. Ляхович. – Томск : Изд-во Томского университета, 1970. – С. 161.
9. Мышкис, А.Д. Лекции по высшей математике / А.Д. Мышкис. – М. : Наука, 1973. – С. 640.
10. Ляхович, Л.С. Особые свойства оптимальных систем и основные направления их реализации в методах расчёта сооружений / Л.С. Ляхович. – Томск : Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2009. – С. 372.

REFERENCES

1. Lazarev I.B. Osnovy optimal'nogo proektirovaniya konstrukttsii. Zadachi i metody [Bases of optimum design. Tasks and methods]. Novosibirsk: SGAPS Publ., 1995. 295 p. (rus)
2. Moiseev N.N., Ivanilov Yu.P., Stolyarova E.M. Metody optimizatsii [Optimization methods]. Moscow: Nauka Publ., 1978. Pp. 352. (rus)
3. Fiacco A.V., McCormick G.P. Nelineinoe programmirovaniye. Metody posledovatel'noi bezuslovnoi minimizatsii [Nonlinear programming: sequential unconstrained minimization techniques]. Moscow: Mir, 1972. P. 240. (transl. from Engl.)
4. Moiseenko R.P., Kondratenko O.O. Optimizatsiya pryamougol'nykh rebristykh plastin s ogranicheniem pervoi chastoty sobstvennykh kolebanii pri upravlenii vysotoi i shirinoi poperechnogo secheniya reber [Optimization of rectangular ribbed plates with restriction of the first natural oscillation frequency at control for cross-section height and width]. *Izvestiya vuzov. Tekhnologiya tekstil'noi promyshlennosti*. 2016. No. 6. Pp. 196–200. (rus)
5. Moiseenko R.P., Kondratenko O.O. Optimizatsiya pryamougol'nykh rebristykh plastin s ogranicheniem pervoi chastoty sobstvennykh kolebanii pri upravlenii vysotoi i shirinoi poperechnogo secheniya [Optimization of rectangular ribbed plates with restriction of the first eigenfrequency under control for cross-section height and width]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzhenii*. 2017. No. 6. Pp. 42–45. (rus)

6. *Guld S.* Variatsionnye metody v zadachakh o sobstvennykh znacheniyakh [Variational methods in eigenvalue problems]. Moscow: Mir Publ., 1970. P. 328. (rus)
7. *Donnell L.G.* Balki, plastiny i obolochki [Beams, plates and shells]. Moscow: Nauka Publ., 1982. P. 568 (transl. from Engl.)
8. *Lyakhovich L.S.* Metod otdeleniya kriticheskikh sil i sobstvennykh chastot uprugikh sistem [Separation of elastic systems critical forces and eigenfrequencies]. Tomsk: TSU Publ., 1970. P. 161. (rus)
9. *Myshkis A.D.* Lektsii po vysshei matematike [Lectures on higher mathematics]. Moscow: Nauka Publ., 1973. P. 640. (rus)
10. *Lyakhovich L.S.* Osobyie svoystva optimal'nykh sistem i osnovnye napravleniya ikh realizatsii v metodakh rascheta sooruzhenii [Special properties of optimum systems and their implementation in structural analysis]. Tomsk: TSUAB Publ., 2009. P. 372. (rus)

Сведения об авторах

Моисеенко Ростислав Павлович, докт. техн. наук, профессор, Томский государственный архитектурно-строительный университет, 634003, г. Томск, пл. Соляная, 2, galia2007@sibmail.com

Кондратенко Ольга Олеговна, аспирант, Томский государственный архитектурно-строительный университет, 634003, г. Томск, пл. Соляная, 2, olg-kond@yandex.ru

Authors Details

Rostislav P. Moiseenko, DSc, Professor, Tomsk State University of Architecture and Building, 2, Solyanaya Sq., 634003, Tomsk, Russia, galia2007@sibmail.com

Olga O. Kondratenko, Research Assistant, Tomsk State University of Architecture and Building, 2, Solyanaya Sq., 634003, Tomsk, Russia, olg-kond@yandex.ru