

УДК 539.3

*БАРАШКОВ ВЛАДИМИР НИКОЛАЕВИЧ, докт. физ.-мат. наук,
ст. научный сотрудник, профессор,
v.n.bar@mail.ru
Томский государственный архитектурно-строительный университет,
634003, г. Томск, пл. Соляная, 2*

ВЛИЯНИЕ КРУГЛОГО ОТВЕРСТИЯ НА НАПРЯЖЁННОЕ СОСТОЯНИЕ РАВНОМЕРНО РАСТЯНУТОЙ ПЛАСТИНЫ

Расчёт пластин и оболочек, являющихся элементами различных конструкций, предполагает упругий характер напряжённо-деформированного состояния этих элементов. В некоторых случаях нерасчётный режим работы конструкций приводит к нештатному перераспределению напряжений, при котором в некоторых зонах возникают пластические деформации. Такими концентраторами напряжений являются круглые и овальные отверстия различных размеров и разного назначения с приваренными патрубками и отводами, отверстия под заклёпки и болты, различные вырезы, жёсткие включения, сварные швы и др. Поэтому детальная оценка напряжённо-деформированного состояния в этих зонах необходима при проектировании и расчёте прочности таких конструкций.

В работе решение задачи проводится аналитически в двумерной постановке, а также численно в трёхмерной постановке вариационно-разностным методом. Геометрические соотношения берутся в форме уравнений Коши. Физические соотношения принимаются нелинейными и описываются деформационной теорией пластичности Ильюшина, хотя при решении задачи, которое проводится в перемещениях, действующая нагрузка не приводит к появлению пластических деформаций.

Ключевые слова: круглое отверстие; пластина; принцип Сен-Венана; предел упругости; вариационно-разностный метод; метод упругих решений; граничные условия; упругие и упругопластические деформации; перемещения; напряжения; численные расчёты и результаты.

*VLADIMIR N. BARASHKOV, DSc, Professor,
v.n.bar@mail.ru
Tomsk State University of Architecture and Building,
2, Solyanaya Sq., 634003, Tomsk, Russia*

THE EFFECT OF CIRCULAR HOLE ON STRESS-STRAIN STATE OF UNIFORMLY STRETCHED PLATE

The analysis of plates and shells, which are elements of different structures implies the elastic behavior of their stress-strain state. In some cases, off-design operation mode of structures leads to abnormal stress redistribution, which in some areas arises from plastic deformation. Such stress concentrators are different-purpose round and oval holes with welded spigots and taps, holes for rivets and bolts, various cut-outs, rigid inclusions, weld seams, etc. Therefore, a detailed stress-strain analysis is required for these zones when designing and calculating the structural strength.

The paper presents two-dimensional analysis of the problem and three-dimensional computations using the variation difference method. Geometrical correlations are presented by Cauchy equations. Physical relations are assumed as non-linear and described by Ilyushin's de-

formation plasticity theory, although in solving the displacement problem the live load does not result in plastic deformations.

Keywords: round hole; plate; Saint Venants' principle; elastic strength; variation difference method; elastic solution method; boundary conditions; elastic and elastoplastic deformation; displacement; stress; numerical calculations.

Методика решения пространственной задачи теории упругости вариационно-разностным методом (ВРМ) в декартовых координатах достаточно подробно представлена в работе [1]. Геометрические соотношения берутся в форме уравнений Коши. В рассматриваемой работе физические соотношения принимаются нелинейными и описываются деформационной теорией пластичности А.А. Ильюшина [2], в которой зависимость между интенсивностями напряжений σ_i и деформаций ε_i представляется выражением

$$\sigma_i = 3G\varepsilon_i[1 - \omega(\varepsilon_i)], \quad (1)$$

где $\omega(\varepsilon_i)$ – функция пластичности Ильюшина.

Для определения значений функции пластичности используется аппроксимация зависимости (1) моделью упругопластического тела с линейным упрочнением (двузвенной ломаной линией) (рис. 1):

$$\left. \begin{aligned} \omega &= 0, & 0 \leq \varepsilon_i \leq \varepsilon_T, \\ \omega &= \lambda \left(1 - \frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_i} \right), & \varepsilon_i \geq \varepsilon_T, \end{aligned} \right\}$$

где λ – так называемое разупрочнение, которое определяется из выражения $\lambda = 1 - \frac{E_1}{3G}$ (для идеально упругопластического материала $\lambda = 1$); ε_T – деформация начала текучести; E_1 – модуль упрочнения, характеризующий тангенс угла наклона участка прямой зависимости $\sigma_i(\varepsilon_i)$ к оси ε_i за пределом упругости.

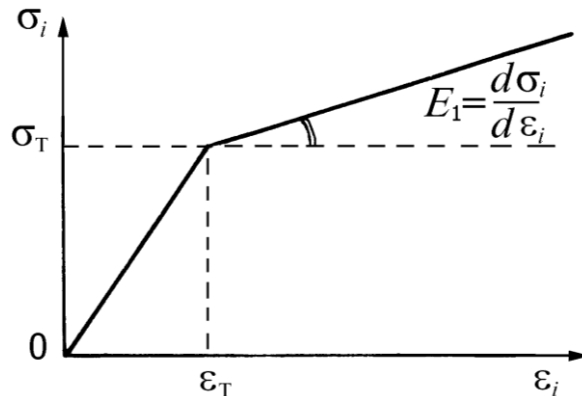


Рис. 1. Зависимость интенсивности напряжений σ_i от интенсивности деформаций ε_i

Соотношения для напряжений записываются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= a_{11}\varepsilon_x + a_{12}\varepsilon_y + a_{13}\varepsilon_z, & \tau_{xy} &= a_{41}\gamma_{xy}, \\ \sigma_y &= a_{21}\varepsilon_x + a_{22}\varepsilon_y + a_{23}\varepsilon_z, & \tau_{yz} &= a_{51}\gamma_{yz}, \\ \sigma_z &= a_{31}\varepsilon_x + a_{32}\varepsilon_y + a_{33}\varepsilon_z, & \tau_{zx} &= a_{61}\gamma_{zx}, \end{aligned} \right\}$$

где $a_{11} = a_{22} = a_{33} = K + 4G(1-\omega)/3$; $a_{41} = a_{51} = a_{61} = G(1-\omega)$; $a_{12} = a_{13} = a_{21} = a_{23} = a_{31} = a_{32} = K - 2G(1-\omega)/3$; $K = E/[3(1-2\mu)]$ – модуль объёмной деформации; $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ и $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ – соответственно компоненты тензоров напряжений и деформаций; E – модуль упругости при растяжении-сжатии (модуль Юнга); μ – коэффициент поперечной деформации (коэффициент Пуассона); $G = E/[2(1+\mu)]$ – модуль упругости при сдвиге.

Следует отметить, что выражения коэффициентов $a_{11}, \dots, a_{61}$ в аналогичных формулах для напряжений, представленных в работе [1] для случая упругого деформирования материала, не содержат $\omega(\varepsilon_i)$, т. к. в этом случае функция пластичности равна нулю.

При анализе напряженно-деформированного состояния (НДС) необходимо иметь информацию о выходе материала конструкции за пределы упругости, для чего следует знать величины интенсивностей напряжений и/или деформаций, которые определяются по формулам

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)},$$

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)}.$$

Для решения упругопластической задачи используется метод упругих решений, при помощи которого нелинейная задача минимизации неквадратичного функционала полной потенциальной энергии системы, представленной через перемещения, сводится к последовательности линейных задач минимизации квадратичных функционалов.

В работе рассматривается задача определения напряжённого состояния прямоугольной дюралюминиевой пластины с небольшим круглым отверстием посередине, подвергающейся действию равномерного растягивающего усилия интенсивностью P . На основании принципа Сен-Венана можно утверждать, что изменениями напряжений в пластине вследствие наличия отверстия можно пренебречь на некоторых расстояниях, больших радиуса этого отверстия.

Расчётная схема пластины представлена на рис. 2. Пластина моделируется цилиндрической панелью радиуса $R = 100$ см, толщиной 1 см и размером (8×8) см, радиус отверстия $a = 1$ см, $P = 10$ МПа. Коэффициент Пуассона материала пластины $\mu = 0,3$; модуль упругости $E = 70\,000$ МПа.

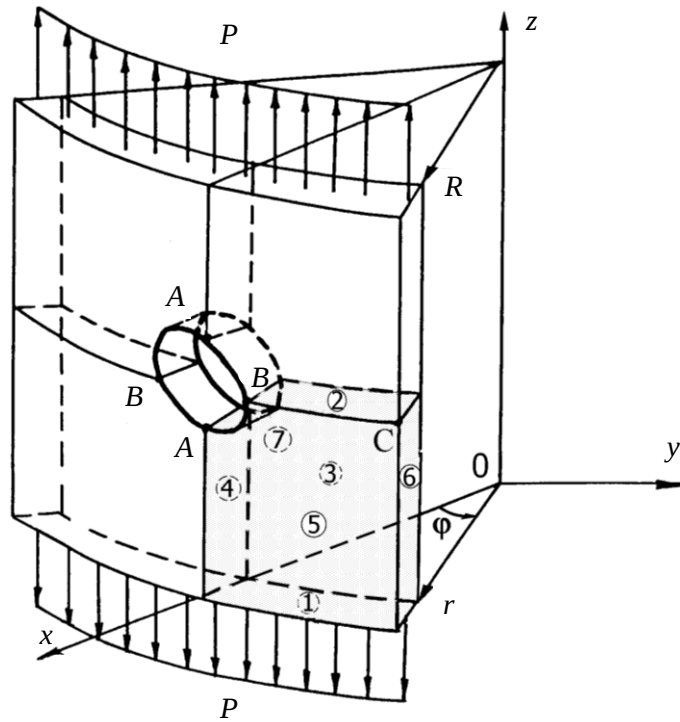


Рис. 2. Расчётная схема пластины

Вследствие симметрии расчётной схемы и действующей нагрузки рассматривается лишь четвертая часть пластины. В кружочках цифрами 1–7 обозначены участки поверхности (границы) исследуемой пластины, на которых ставятся следующие геометрические и статические граничные условия:

– на грани 1 – осевая нагрузка интенсивностью P при отсутствии касательных напряжений:

$$\tau_{zx} = \tau_{zy} = 0, \sigma_z = P;$$

– на грани 2 – жёсткая стенка без трения:

$$w = 0, \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0;$$

– на гранях 3, 5 – свободная поверхность:

$$\sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + 2\tau_{xy} lm = 0, (\sigma_r = 0),$$

$$(\sigma_y - \sigma_x)lm + \tau_{xy}(l^2 - m^2) = 0, (\tau_{r\phi} = 0),$$

$$\tau_{zx}l + \tau_{yz}m = 0, (\tau_{rz} = 0);$$

– на грани 4 – жёсткая стенка без трения:

$$v = 0, \tau_{yx} = \tau_{yz} = 0;$$

– на грани 6 – свободная поверхность:

$$\sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 - 2\tau_{xy} lm = 0, (\sigma_\phi = 0),$$

$$(\sigma_y - \sigma_x)lm + \tau_{xy}(l^2 - m^2) = 0, \quad (\tau_{r\varphi} = 0),$$

$$\tau_{yz}l - \tau_{zx}m = 0, \quad (\tau_{z\varphi} = 0);$$

– на наклонной грани 7 – свободная поверхность:

$$\sigma_x l + \tau_{xy}m + \tau_{xz}n = 0, \quad (X_v = 0),$$

$$\tau_{yx}l + \sigma_y m + \tau_{yz}n = 0, \quad (Y_v = 0),$$

$$\tau_{zx}l + \tau_{zy}m + \sigma_z n = 0, \quad (Z_v = 0),$$

где u, v, w – соответственно компоненты вектора перемещений на оси x, y, z декартовой системы координат; l, m, n – направляющие косинусы внешней нормали к поверхности; X_v, Y_v, Z_v – проекции интенсивности внешней нагрузки соответственно на оси x, y, z .

Граничные условия на поверхностях пластины в декартовых координатах получены с помощью формул преобразования компонент тензора напряжения для цилиндрической системы координат (рис. 2). Поэтому для наглядности рядом с некоторыми статическими граничными условиями в скобках содержатся записи этих же условий в цилиндрической системе координат r, φ, z [3].

Для получения аналитического решения используются результаты работы С.П. Тимошенко [4]. В полярных координатах r, θ получены выражения для напряжений, лежащих на окружности с радиусом $r > a$:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{P}{2} \left[1 - \frac{a^2}{r^2} + \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2} \right) \cos 2\theta \right], \\ \sigma_\theta &= \frac{P}{2} \left[1 + \frac{a^2}{r^2} - \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right], \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{P}{2} \left[1 - \frac{3a^4}{r^4} + \frac{2a^2}{r^2} \right] \sin 2\theta. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

С увеличением радиуса r величины напряжений стремятся к значениям напряжений для случая пластинки без отверстия. На краю отверстия $r = a$ из формул (2) следует

$$\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0, \quad \sigma_\theta = P(1 - \cos 2\theta).$$

Если для этого случая провести анализ зависимости поведения напряжения σ_θ от значений величины полярного угла θ , то можно сделать следующие выводы. Тангенциальное напряжение σ_θ будет наибольшим растягивающим напряжением, когда полярный угол $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$, т. е. в точках B по концам диаметра $2a$, перпендикулярного к направлению растяжения пластины. В этих точках

$$(\sigma_\theta)_{\max} = 3P,$$

т. е. величина тангенциального напряжения в три раза больше равномерного растягивающего напряжения P , приложенного на нижнем и верхнем торцах пластины. В точках A , в которых полярный угол $\theta = 0$, $\theta = \pi$, тангенциальное напряжение σ_θ является сжимающим и принимает наименьшие значения

$$(\sigma_\theta)_{\min} = -P.$$

Для сечения пластины (рис. 3, линия BC), проходящего через центр отверстия и перпендикулярного к направлению растяжения, угол $\theta = \frac{\pi}{2}$, и из формул (2) имеем:

$$\tau_{r\theta} = 0, \quad \sigma_\theta = \frac{P}{2} \left(2 + \frac{a^2}{r^2} + \frac{3a^4}{r^4} \right). \quad (3)$$

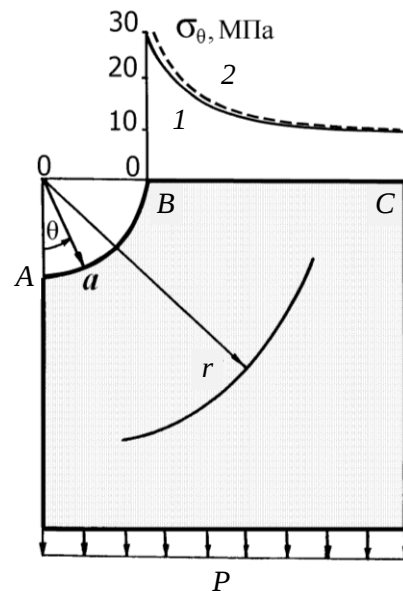


Рис. 3. Результаты расчёта:
кривая 1 – аналитическое решение; кривая 2 – численное решение

значение $\sigma_\theta \approx -9,8$ МПа, что на 2 % отличается от теоретического значения напряжения $(\sigma_\theta)_{\min} = -10$ МПа. Из анализа рис. 2 и 3 следует, что в принадлежащих грани BC точках пластины величина определённого в полярных координатах тангенциального напряжения σ_θ и величина осевого напряжения σ_z , вычисленного в прямоугольной или цилиндрической системах координат, равны между собой. Также следует отметить, что согласно ВРМ параметры НДС пластины определяются для середины ячеек конечно-разностной сетки.

По мере увеличения координаты r величина напряжения σ_θ приближается к значению $P=10$ МПа осевой растягивающей силы. В работе [4] приводится следующий вывод о применимости решения (2), полученного для бесконечно большой пластины: если величина ширины H не меньше четырёх диаметров отверстия, то ошибка определения $(\sigma_\theta)_{\max}$ не превосходит 6 %. На рис. 3 кривой 1 показано распределение напряжения σ_θ вдоль линии (границы) BC , построенное по формуле (3). Таким образом, влияние отверстия на распределение напряжений в пластине носит ярко выраженный локальный, местный характер.

Кривая 2, представленная на рис. 3, получена численно ВРМ. Погрешность вычисления тангенциального напряжения σ_θ в точке B по сравнению с определённой по формуле величиной $(\sigma_\theta)_{\max} = 30$ МПа, составляет 3 %. В точке A численные расчёты дают

Анализ осевых напряжений σ_z и интенсивностей напряжений σ_i показывает, что наличие отверстия в пластине вносит достаточно большое возмущение в величины численно определяемых параметров НДС в пределах некоторой области по сравнению с результатами для пластины без отверстия. Упомянутая область ограничена кривой линией, по форме напоминающей эллипс с центром в точке 0 (рис. 2), соответственно с полуосями $3a$ и $3,5a$ по направлениям OA и OC .

При растяжении пластины без отверстия по соотношениям

$$\varepsilon_z = \sigma_z / E, \quad \varepsilon_x = \varepsilon_y = -\mu \varepsilon_z \quad (4)$$

определяются теоретические величины деформаций: $\varepsilon_z = 1,43 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_x = \varepsilon_y = -4,29 \cdot 10^{-5}$. Численные расчёты для дальнего от отверстия края грани 1, где приложена нагрузка P , приводят практически к аналогичным результатам для деформаций: $\varepsilon_z = 1,43 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_y = -4,23 \cdot 10^{-5}$, $\varepsilon_x = -4,30 \cdot 10^{-5}$. Однако по мере приближения к отверстию результаты численного расчёта все более отличаются от величин деформаций, определяемых по формулам (4).

При решении задачи теории упругости и пластичности в вариационной постановке статические граничные условия удовлетворяются автоматически при минимизации функционала энергии. Так, граничные условия на грани 1 для напряжения σ_z выполняются с погрешностью 1,0–1,5 %. Приведенные численные результаты получены на относительно грубой сетке с количеством узлов ($4 \times 8 \times 14$) соответственно по осям прямоугольной системы координат x, y, z (рис. 2).

Все результаты для напряжений и деформаций согласуются с утверждениями С.П. Тимошенко о наличии в пластине, ограниченной некоторым радиусом, области, в которой сказывается возмущение от отверстия, что подтверждает принцип Сен-Венана. Характер распределения полученных аналитическим и численным методами величин напряжений в окрестности отверстия аналогичен. Завершая обсуждение задачи о пластине с отверстием, следует заметить, что результаты С.П. Тимошенко можно рассматривать как точные только в тех зонах, где напряжения не превышают предела упругости материала. В случае превышения предела упругости следует отдавать предпочтение численным результатам, полученным с учетом пластических деформаций.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Барашков, В.Н. Моделирование пространственного напряженно-деформированного состояния балки-стенки / В.Н. Барашков, А.А. Матвеев // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. – 2010. – № 3. – С. 92–104.
2. Ильюшин, А.А. Пластичность / А.А. Ильюшин. – М.; Л. : ОГИЗ, 1948. – 376 с.
3. Барашков, В.Н. Численное моделирование трехмерного упругопластического деформирования секторов ведущего устройства / В.Н. Барашков // Известия Томского политехнического университета. – 2004. – Т. 307. – № 4. – С. 22–27.
4. Тимошенко, С.П. Теория упругости / С.П. Тимошенко. – М.; Л. : ОНТИ, 1937. – 456 с.

REFERENCES

1. Barashkov V.N., Matveenko A.A. Modelirovanie prostranstvennogo napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya balki-stenki [Spatial stress-strain state modeling for wall beam]. *Vestnik of Tomsk State University of Architecture and Building*. 2010. No. 3. Pp. 92–104. (rus)
2. Ilyushin A.A. *Plastichnost'* [Plasticity]. Moscow, Leningrad: OGIZ Publ., 1948. 376 p. (rus)
3. Barashkov V.N. Chislennoe modelirovanie trekhmernogo uprugoplasticheskogo deformirovaniya sektorov vedushchego ustroystva [Numerical simulation of three-dimensional elastoplastic deformation of the sectors leading devices]. *Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta*. 2004. V. 307. No. 4. Pp. 22–27. (rus)
4. Timoshenko S.P. *Teoriya uprugosti* [Theory of elasticity]. Moscow, Leningrad: ONTI Publ., 1937. 456 p. (rus)