УДК 624.74.24

АНТОШКИН ВАСИЛИЙ ДМИТРИЕВИЧ, канд. техн. наук, доцент,
antovd@mail.ru
Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева,
430005, г. Саранск, ул. Большевистская, 68

КОНСТРУКЦИОННО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЕ ФОРМООБРАЗОВАНИЕ ОБОЛОЧЕК ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ГАУССОВОЙ КРИВИЗНЫ ИЗ СБОРНЫХ ПЛОСКИХ ШЕСТИУГОЛЬНЫХ И ТРЕУГОЛЬНЫХ ПАНЕЛЕЙ

Рассмотрены вопросы конструктивно-технологического формообразования сферических оболочек на основе радиально-кольцевой сети. Исследован один из нескольких конструктивно-технологических методов образования треугольных сетей на сфере, которые были названы «Транер». В каждом из них критерием оптимальности является минимальное число типоразмеров конструктивных деталей и минимальное число монтажных элементов купола, возможности укрупнительной сборки и предварительного напряжения. Исследованы теоретические предпосылки размещения панелей в виде правильных шестиугольников на составных сферических оболочках. Определено, что поверхность оболочки имеет отрицательную гауссову кривизну для приведенного порядка расположения панелей и требует специфических конструкций монтажных узлов.

Ключевые слова: сборная сферическая оболочка; конструктивно-технологическая форма; панель; правильный шестиугольник; разрезка; пространственная конструкция.

VASILII D.ANTOSHKIN, PhD, A/Professor,
antovd@mail.ru
Ogarev Mordovia State University,
68, Bolshevistskaya Str., 430005, Saransk, Russia

SPHERICAL SHELLS WITH NEGATIVE GAUSSIAN CURVATURE FABRICATED FROM FLAT HEXAGONAL AND TRIANGULAR PANELS

The paper deals with the construction of spherical shells based on radial-ring architecture. One of methods of forming a triangular network on a sphere is called Trainer. The optimality criterion in each method is the minimum number of standard sizes of the structural elements and the minimum number of assembly part of a dome, site joint, and presetress. Theoretical prerequisites to placement of hexagonal panels on spherical shells are studied in the paper. The analysis shows that the shell surface has a negative Gaussian curvature for the discussed panel arrangement and requires a specific structure of mounting components.

Keywords: prefabricated spherical shell; structural technological formation; panel; regular hexagon; splitting; spatial structure.

В настоящей работе исследованы теоретические предпосылки размещения панелей в виде правильных шестиугольников с треугольными панелями между ними в виде составных сферических оболочек. Известно, что на ради-

© Антошкин В.Д., 2017

ально-кольцевой основе одной сферы можно разместить только чуть больше 50 % правильных шестиугольников с треугольниками между ними, остальные плоские шестиугольники можно выполнить только неправильными [1–8]. Однако из каждой сферы с одинаковым радиальным раскроем, но разными радиусами можно вырезать ряды с правильными шестиугольниками и совместить их по кольцевым линиям.

В такой уже составной сборной оболочке соединенные между собой шестиугольные панели могут быть выполнены в виде плоских правильных шестиугольников, между которыми установлены треугольные панели (приоритет от 07.06.2017 № 2017119859). Шестиугольные и треугольные панели с разными размерами в каждом ряду, расположенные в одном порядке, образуют поверхности вращения положительной гауссовой кривизны, а в другом порядке отрицательной гауссовой кривизны (рис. 1–3).

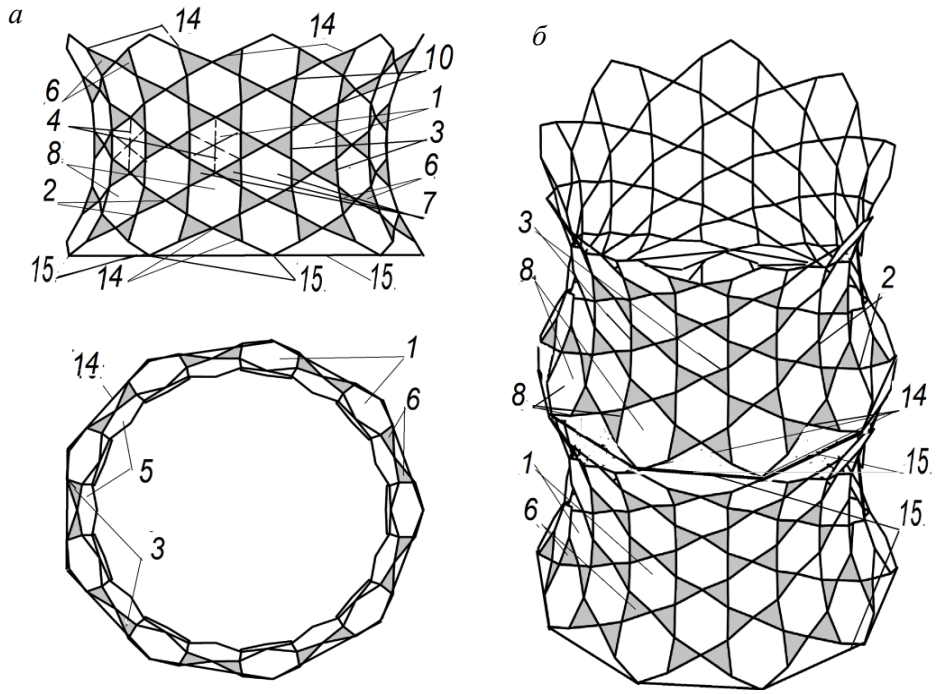

Рис. 1. Виды сбоку и сверху сборных оболочек отрицательной гауссовой кривизны: *а* – одинарной; *б* – составной

Составная сборная оболочка отрицательной гауссовой кривизны (рис. 1) может быть выполнена в виде сборной конструкции из шестиугольных панелей *1* с узловыми элементами *2*, с каркасом из бортовых *3* и внутренних *4* ребер и обшивкой *5*. Панели выполнены в виде несущих каркасных плоских правильных шестиугольников *1* (либо панелей-оболочек), между которыми установлены треугольные панели *6*. Шестиугольные и треугольные панели с разными размерами в каждом ряду, расположенные в указанном на рис. 1, *а*

порядке *7*, образуют уже упомянутые поверхности вращения отрицательной гауссовой кривизны.

Сомкнутая и составная сборная оболочка отрицательной гауссовой кривизны (рис. 1, *б*) выполняется из двух или нескольких таких оболочек, также составленных из шестиугольных панелей *1* с узловыми элементами *2*, с каркасом из бортовых *3* и внутренних *4* ребер и с обшивкой. Панели *1* и *6*, расположенные в уже известном порядке *7*, образуют сомкнутые поверхности отрицательной гауссовой кривизны. В конструкции здесь присутствуют стыковочные элементы *1*.

Для сборки составной оболочки к узлам *2* (рис. 1, 2) панелей крепятся узловые фасонки контурных стержней *14*, к которым прикреплены парные проушины углом около 45° к плоскости панели *1*, для соединения смежных монтажных элементов *1* и *14* между собой в одном из узлов стержня *14*, между проушинами *11*, установлены и закреплены с возможностью поворота болтами *12* узловые вкладыши *13*.

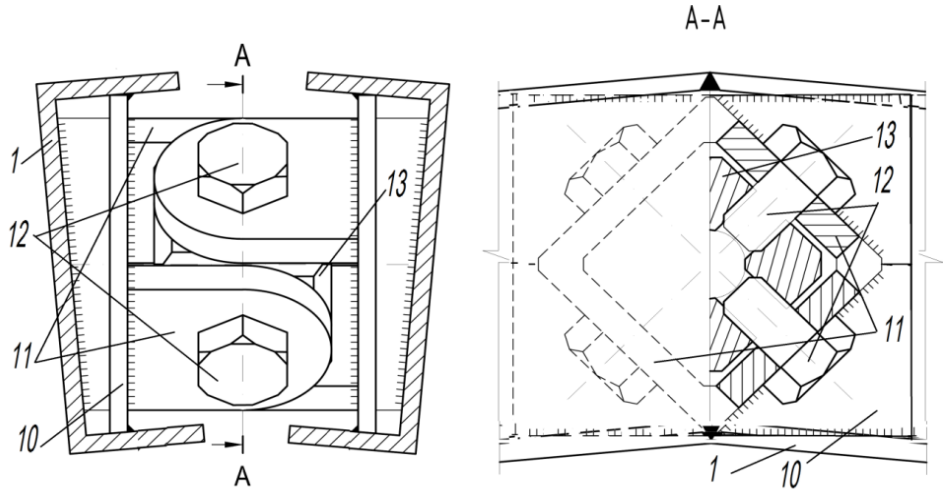

Рис. 2. Узловое соединение для купольных покрытий с каркасными панелями или панелями-оболочками

Для стыковки составной сборной оболочки, собираемой из одинарных оболочек, к узлам *2* (рис. 1, 2) панелей крепятся стыковочные стержни *15* с узловыми фасонками с обеих сторон этих стыковочных стержней.

Проанализируем, какую поверхность образуют окружности или соответствующие им правильные шестиугольники, соединенные через треугольники, расположенные в указанном порядке. Применение таких окружностей минимальных радиусов обеспечивает минимальные длины стержней и равномерную передачу усилий в стержнях за счет минимизации размеров монтажных элементов (и за счет изменений направлений преимущественно сжатых элементов купола).

Для доказательства возможности построения разрезки составной оболочки из одних плоских правильных шестиугольников и треугольников вос-

пользуемся построениями правильных шестиугольников через ряд на сфере [1–6]. На первом этапе определим центры шестиугольников, вписанных в окружности минимальных радиусов, регулярно расположенных относительно экватора сферы. В этом случае эти окружности только касаются друг друга в одной точке по вертикальной оси-меридиану (рис. 3, *а*, *б*).

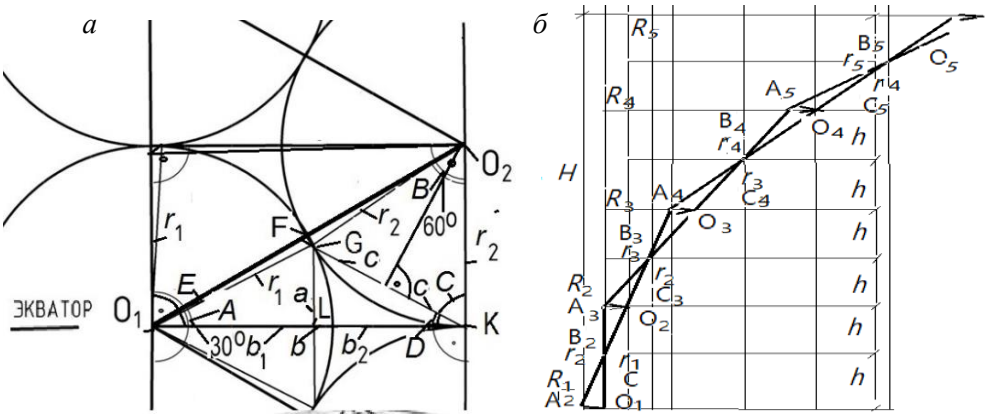

Рис. 3. Геометрическая схема на сфере из правильных шестиугольников, вписанных в окружности, на основе сектора с раскрытием $b°$ и расчетная схема размещения правильных шестиугольников на поверхности отрицательной гауссовой кривизны: *а* – схема для определения положения центра O_2 в сферическом треугольнике b-90-90°; O_0 – вершины возможных секторов; O_2 – углы возможных сферических сегментов; *б* – вид сбоку; *A*, *B*, *R*, *h* – узлы, центры и параметры панелей в виде правильных шестиугольников соответствующих рядов 1, 2 и т. д.; *H* – высота половины оболочки отрицательной гауссовой кривизны

Вместо поверхности положительной кривизны из плоских правильных шестиугольников сформируем поверхность отрицательной гауссовой кривизны, принимая во внимание возможность образования на сфере второго ряда большего радиуса, чем первый, при размещении шестиугольников в другом порядке (рис. 3).

Размещение правильных шестиугольников, вписанных в окружности, проведем на примере разрезки, показанной на рис. 3, *а* и на фрагменте схемы, показанном на рис. 3, *б*.

Для решения поставленной задачи (рис. 3, *а*) рассмотрим сферический прямоугольный треугольник O_1KO_2, а также сферические треугольники O_1GK и O_2GK со сторонами-дугами, равными соответственно радиусам r_1 и r_2. Имеется прямоугольный сферический треугольник с внутренними углами 90 и 60° и катетом-дугой, равным $\boldsymbol{a}$. Требуется определить величины радиусов r_1 и r_2 между центрами O_1 и O_2 окружностей и таким образом установить положение всех центров окружностей первых двух рядов шестиугольников.

Для определения центров правильных шестиугольников неравных радиусов первых двух рядов введем некоторые дополнительные требования к расположению их окружностей. Во-первых, задаем, чтобы окружности пересекали друг друга в двух точках, и тогда в них, соответственно, могли бы

вписываться правильные шестиугольники. Во-вторых, мы не рассматриваем влияние первого условия на усложнения дальнейших построений.

Предварительно определим параметры в данном сферическом треугольнике O_1KO_2. По условию внутренние углы треугольника

$$A = 30^0, B = 60°, \mathrm{O_1G} = r_1, \mathrm{GO_2} = r_2, \mathrm{O_1K} = b = b_1 + b_2,$$

где r_1 и r_2 – радиусы окружностей, описывающих шестиугольники первого и второго ряда, в виде полярного угла; b_1 и b_2 – катеты прямоугольных сферических треугольников в виде полярных углов; a и $2c$ – стороны шестиугольников в виде полярных углов; *A, B*, а также и *C* и *D* – соответственно внутренние углы на сфере для сферических шестиугольников, вписанных в окружности.

Используя известные выражения Непера [6–16] для сторон и углов прямоугольных сферических треугольников O_1GL и KGL, получим

$$\begin{gathered} C = 90° - D, \\ \sin 30^0 \sin r_2 = \sin c, \\ \cos C = \frac{\mathrm{tg\,c}}{\mathrm{tg}\, r_2}, \\ \sin 2c \sin D = \sin b, \\ \sin 30^0 \sin r_1 = \sin b. \end{gathered} \tag{1}$$

Из треугольников O_1GK и O_2GK найдем связи величины b и искомых радиусов r_1 и r_2:

$$\cos r_1 \cos b + \sin r_1 \sin b \cos 30^0 = \cos^2 r_2 + \sin^2 r_2 \cos 60^0. \tag{2}$$

Проведем преобразования системы уравнений, используя формулы (1), (2) сферической тригонометрии [8–12]:

$$\begin{gathered} 0{,}5 \sin r_2 = \sin c, \\ \sin D = \frac{\mathrm{tg\,c}}{\mathrm{tg}\, r_2}; \\ \sin 2c \frac{\mathrm{tg\,c}}{\mathrm{tg}\, r_2} = \sin 30^0 \sin r_1 . \end{gathered}$$

Откуда

$$\begin{gathered} 2\mathrm{tg\,c} \sin 2c = \sin r_1 \,\mathrm{tg}\, r_2; \\ 4 \sin^2 \mathrm{c} = \sin r_1 \,\mathrm{tg}\, r_2; \\ \mathrm{ctg}\, r_2 \sin^2 r_2 = \sin r_1; \\ \sin r_2 \cos r_2 = \sin r_1. \end{gathered} \tag{3}$$

Подставим в уравнение (2) соотношение (3):

$$\sqrt{1 - \sin^2 r_2 \cos^2 r_2} \cos b + \sin r_2 \cos r_2 \sin b \cos 30^0 =$$
$$= \cos^2 r_2 + \cos 60^0 \sin^2 r_2;$$

$$\cos b \sqrt{1 - \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 r_2} \frac{1}{1+\mathrm{ctg}^2 r_2}} + \sin b \cos 30^0 \sqrt{\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 r_2} \frac{1}{1+\mathrm{ctg}^2 r_2}} =$$
$$= \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 r_2} + \frac{0{,}5}{1+\mathrm{ctg}^2 r_2};$$

$$\cos b \sqrt{1 - \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 r_2} \frac{\mathrm{tg}^2 r_2}{1+\mathrm{tg}^2 r_2}} + \sqrt{\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 r_2} \frac{\mathrm{tg}^2 r_2}{1+\mathrm{tg}^2 r_2}} \sin b \cos 30^0 =$$

$$= \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\, r_2} + \frac{0{,}5\mathrm{tg}^2\, r_2}{1+\mathrm{tg}^2\, r_2};$$

$$\cos b\ \sqrt{(1+\mathrm{tg}^2\, r_2)(1+\mathrm{tg}^2\, r_2) - \mathrm{tg}^2\, r_2} + \mathrm{sin}b \cos 30^0\ \mathrm{tg}\, r_2 = 1 + 0{,}5\ \mathrm{tg}^2\, r_2\,;$$

$$\cos b\ \sqrt{(1+\mathrm{tg}^2\, r_2)(1+\mathrm{tg}^2\, r_2) - \mathrm{tg}^2\, r_2} =$$

$$= 1 + 0{,}5\ \mathrm{tg}^2\, r_2\ -\ \mathrm{sin}b \cos 30^0\ \mathrm{tg}\, r_2;$$

$$\cos^2\ b\ ((1+\mathrm{tg}^2\, r_2)(1+\mathrm{tg}^2\, r_2) - \mathrm{tg}^2\, r_2) =$$

$$= (1 -\ \mathrm{sin}b \cos 30^0\ \mathrm{tg}\, r_2 +\ 0{,}5\ \mathrm{tg}^2\, r_2)^2\,;$$

Подставим $x = \mathrm{tg}\, r_2$

$$\cos^2\ b\ (1 + x^2)^2 - x^2) = (1 -\ \mathrm{sin}b \cos 30^0\ \ x +\ 0{,}5\, x^2)^2\,;$$

$$\cos^2 b\ (1 + 2x^2 + x^4 - x^2) =$$

$$= (1 -\ 2\,\mathrm{sin}b \cos 30^0\ \ x + \mathrm{sin}^2\, b \cos^2\ 30^0\ x^2\ +$$

$$+(1 - \mathrm{sin}b \cos 30^0\, x)\, x^2\ + 0{,}25x^4\,);$$

$$\cos^2 b\ + \cos^2 b\, x^2 + \cos^2 b\, x^4 =$$

$$= 1 -\ 2\,\mathrm{sin}b \cos 30^0\ \ x + \mathrm{sin}^2\, b \cos^2 30^0\ x^2\ +$$

$$+ x^2\ - \mathrm{sin}b \cos 30^0\, x^3\ + 0{,}25\, x^4\,;$$

$$(\cos^2 b - 0{,}25)x^4 + \mathrm{sin}b \cos 30^0\, x^3\ + (\cos^2 b - \mathrm{sin}^2\, b \cos^2 30^0\ - 1)\, x^2\ +$$

$$+ 2\,\mathrm{sin}b \cos 30^0\ \ x + \cos^2 b - 1 = 0. \qquad (4)$$

Принимая b = 20, получаем

$$0{,}63302222156\, x^4 + 0{,}296198132726\, x^3\ - 0{,}20471111227089 x^2\ +$$

$$+ 0{,}59239626545 x - 0{,}1169777784405 = 0.\ \mathrm{tg}\, r_2\ = 0{,}20582743305806134\,.$$

Откуда из соотношения (3)

$$r_2\ = 11{,}630615.$$

Из треугольника O_2GK, выражая синус дуги, определяем значение

$$\sin c = 0{,}5\, \sin r_2\,;\ c\ =\ 5{,}78527776.$$

Все величины в выражении (4) определены, за исключением полярного угла радиуса r_1. Таким образом, радиус r_1 второй окружности вычисляем из уравнения (1):

$$\sin r_2\ \cos r_2\ = \sin r_1\,.$$

Откуда получим $\quad r_1\ = 11{,}388580819\,.$

Для решения уравнения (4) использовалось свободно распространяющееся программное обеспечение Sclab 5.4.1 [17].

Из рис. 3 видно, что правильные сферические шестиугольники, вписанные в окружности разных по высоте радиусов [8–16] и размещенные в двух первых рядах совместимых сферических треугольников сферы b-90-90°, могут быть развернуты по отрицательным направляющим и создают поверхность отрицательной кривизны. Разработанная поверхность отрицательной гауссовой кривизны имеет важное свойство – равную высоту каждого яруса узлов.

Выводы

Разработаны методы конструкционно-технологического формообразования на стадии геометрии разрезок составных сборных сферических оболочек на основе секторов из панелей в виде правильных шестиугольников. Такие несущие конструкции подобной разрезки могут быть применены как в покры-

тиях зданий, так и в стеновых ограждающих и несущих пространственных конструкциях различных зданий и сооружений (наружные стены в высотных зданиях, башнях, градирнях и т. п.).

Библиографический список

1. *The problem optimization triangular geometric line field* / V.D. Antoshkin, V.I. Travush, V.T. Erofeev, V.I. Rimshin, V.L. Kurbatov // Modern Applied Science. – 2015. – V. 9. – № 3. – P. 46–50.
2. *Антошкин, В.Д.* Эффективные конструктивно-технологические решения сборных сферических куполов / В.Д. Антошкин // Региональная архитектура и строительство. – 2015. – № 3 (24). – С. 112–121.
3. *Перспективные конструктивно-технологические решения* сборных сферических оболочек / В.Д. Антошкин, С.С. Гудожников, О.И. Перфильева, И.В. Ерофеева // Актуальные вопросы архитектуры и строительства : материалы Тринадцатой Международной научно-технической конференции: в 2 ч. – 2014. – С. 4–15.
4. *Антошкин, В.Д.* Сборные сферические оболочки из шестиугольных панелей / В.Д. Антошкин, А.Г. Коновалов // Огарёв-Online. – 2015. – № 13 (54). – С. 6.
5. *А. с. 1174546* (СССР). Способ монтажа криволинейной конструкции / В.Д. Антошкин, Г.В. Курбаков, В.С. Бочкин. – Опубл. 10.05.1983.
6. *А.с. 1661316* (СССР). Стыковое соединение деревянных элементов / В.Д. Антошкин, В.Г. Курганский. – Опубл. 09.11.1988.
7. *Построение линии влияния* в трехшарнирных арках / Е.Ф. Ежов, Ю.В. Юркин, В.Д. Антошкин, В.Е. Ежов // Современные технологии строительных материалов и конструкций : мат-лы Всероссийской научно-технической конференции, посвященной 150-летию со дня рождения академика В.Г. Шухова. – Саранск, 2003. – С. 160–164.
8. *Пат. 129534*, Российская Федерация. Сборная сферическая оболочка / В.И. Травуш, В.Д. Антошкин, В.Т. Ерофеев. – 27.07.2013.
9. *Пат. 2520192*, Российская Федерация. Сборная сферическая оболочка / В.И. Травуш, В.Д. Антошкин, В. Т. Ерофеев. – 06.27.2013.
10. *Пат. 2564545*, Российская Федерация. Сборная сферическая оболочка / В.И. Травуш, В.Д. Антошкин, И.В. Ерофеева, Д.В. Антошкин. – 28.07.2014.
11. *Современные конструктивно-технологические решения* сферических оболочек / В.И. Травуш, В.Д. Антошкин, В.Т. Ерофеев, С.С. Гудожников // Строительство и реконструкция. –2012. – № 6 (44). – С. 45–55.
12. *Конструктивно-технологические возможности* сборных сферических оболочек / В.И. Травуш, В.Д. Антошкин, В.Т. Ерофеев, С.С. Гудожников // Строительство и реконструкция. – 2013. – № 6 (50). – С. 36–48.
13. *Travush, V.I.* The problem 7 forming triangular geometric line field / V.I. Travush, V.D. Antoshkin // MATEC Web of Conferences. – 2016. – 86, 010. – DOI: 10.1051/matecconf/20168601032
14. *Travush, V.I.* The problem 4 of placement triangular geometric line field / V.I. Travush, V.D. Antoshkin // MATEC Web of Conferences. – 2016. – 86, 010. – DOI: 10.1051/matecconf/20168601031
15. *Travush, V.I.* To the problem 5 of emplacement of triangular geometric net on the sphere / V.I. Travush, V.D. Antoshkin // MATEC Web of Conferences. – 2017. – 106, 02003. – DOI: 10.1051/matecconf./201710602012
16. *Travush, V.I.* To the problem 6 of emplacement of triangular geometric net on the sphere / V.I. Travush, V.D. Antoshkin // MATEC Web of Conferences. – 2017. – 106, 02012. – DOI: 10.1051/matecconf/201710602012
17. *Software Scilab* 5.4.1 – The free platform for Numerical Computation 06.17.2014. – URL : www. softkumir.ru/index

REFERENCES

1. *Antoshkin V., Travush V.I., Erofeev V.T., Rimshin V.I., Kurbatov V.L.* The problem of optimization of geometric triangular line field. *Modern Applied Science*. 2015. V. 9. No. 3. Pp. 46–50.
2. *Antoshkin V.D.* Effektivnye konstruktivno-tekhnologicheskie resheniya sbornykh sfericheskikh kupolov [Effective constructional solutions for prefabricated domes. *Regional'naya arkhitektura i stroitel'stvo*. 2015. No. 3 (24). Pp. 112–121 (rus)
3. *Antoshkin V.D., Gudozhnikov S.S., Perfilieva O.I., Erofeeva I.V.* Perspektivnye konstruktivno-tekhnologicheskie resheniya sbornykh sfericheskikh obolochek [Prospective technological solutions for prefabricated spherical shell]. *Proc. 13th Int. Sci. Conf. 'Relevant Problems of Architecture and Construction'*. 2014. Pp. 4–15. (rus)
4. *Antoshkin V.D., Konovalov A.G.* Sbornye sfericheskie obolochki iz shestiugol'nykh panelei [Prefabricated spherical shells of hexagonal panels]. *Ogarev-Online*. 2015. No. 13 (54). P. 6. (rus)
5. *Antoshkin V.D., Kurbakov G.V., Bochkin V.S.* Sposob montazha krivolineinoi konstruktsii [Method of mounting curved structure]. USSR author's certificate N 1174546. (rus)
6. *Antoshkin V.D., Kurganskii V.G.* Stykovoe soedinenie derevyannykh elementov [Joint connection of wooden elements]. USSR author's certificate N 1661316. (rus)
7. *Ezhov E.F., Yurkin Yu.V., Antoshkin D.V., Ezhov E.V.* Postroenie linii vliyaniya v trekhsharnirnykh arkakh [Influence line in three-hinged archs]. *Proc. 13th All-Russ. Sci. Conf. 'Modern Technology of Construction Materials and Structures'*. Saransk, 2003. Pp. 160–164. (rus)
8. *Travush V.I., Antoshkin V.D., Erofeev V.T.* Sbornaya sfericheskaya obolochka [Prefabricated spherical shell]. Patent RF N 129534. 2013. (rus)
9. *Travush V.I., Antoshkin V.D., Erofeev V.T.* Sbornaya sfericheskaya obolochka [Prefabricated spherical shell]. Patent RF N 2520192.2013. (rus)
10. *Travush V.I., Antoshkin V.D., Erofeeva I.V., Antoshkin D.V.* Sbornaya sfericheskaya obolochka [Prefabricated spherical shell]. Patent RF N 2564545 .2014. (rus)
11. *Travush V.I., Antoshkin V.D., Erofeev V.T., Gudoshnikov S.S.* Sovremennye konstruktivno-tekhnologicheskie resheniya sfericheskikh obolochek [Modern constructional solutions of spherical shells]. *Construction and reconstruction*. 2012. No. 6 (44). Pp. 45–55. (rus)
12. *Travush V.I., Antoshkin V.D., Erofeev V.T., Gudoshnikov S.S.* Constructive-technological capabilities of teams spherical shells. *Stroitel'stvo i rekonstruktsiya*. 2013. No. 6 (50). P. 36–48. (rus)
13. *Travush V.I., Antoshkin V.D.* The problem 7 forming triangular geometric line field. *MATEC Web of Conferences*. 2016. 86, 010. DOI: 10.1051/matecconf/20168601032
14. *Travush V.I., Antoshkin V.D.* The problem 4 of placement triangular geometric line field. *MATEC Web of Conferences*. 2016. 86, 010. DOI: 10.1051/matecconf/20168601031
15. *Travush V.I., Antoshkin V.D.* To the problem 5 of emplacement of triangular geometric net on the sphere. *MATEC Web of Conferences*. 2017. 106, 02003. DOI: 10.1051/matecconf/201710602012
16. *Travush V.I., Antoshkin V.D.* To the problem 6 of emplacement of triangular geometric net on the sphere. *MATEC Web of Conferences*. 2017. 106, 02012. DOI: 10.1051/matecconf/201710602012
17. *Scilab Software 5.4.1*. The free platform for numerical computation. 2014. Available at: www.softkumir.ru/index