

Вестник Томского государственного
архитектурно-строительного университета.
2026. Т. 28. № 4. С. 255–273.

ISSN 1607-1859 (для печатной версии)
ISSN 2310-0044 (для электронной версии)

Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo
arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta –
Journal of Construction and Architecture.
2026; 28(4): 255–273.
Print ISSN 1607-1859
Online ISSN 2310-0044

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

УДК 624.04

<https://doi.org/10.31675/1607-1859-2026-28-4-255-273>



EDN: WXXPZX

РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ РАСЧЕТА РЕГУЛИРОВАНИЯ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ СООРУЖЕНИЙ И КОНСТРУКЦИЙ ПРИ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЯХ

Владимир Григорьевич Себешев, Никита Андреевич Люфт

Новосибирский государственный

архитектурно-строительный университет (Сибстрин),

г. Новосибирск, Россия

Аннотация. Работа посвящена актуальной проблеме защиты зданий и сооружений от динамических воздействий.

Целью работы является развитие метода расчета параметров комплекса многомассовых динамических гасителей колебаний на основе усовершенствованной постановки задачи виброзащиты зданий и сооружений.

Представлено решение задачи виброзащиты сооружений и строительных конструкций от полигармонических динамических воздействий. Решение основано на усовершенствованной постановке и соответствующих рациональных дополнениях расчетной модели. Гашение колебаний формулируется как задача регулирования параметров состояния линейно деформируемой системы, защищаемой от вибрации комплексом динамических гасителей колебаний, параметры которых определяются с учетом изначально заданных требований к амплитудам колебаний перемещений в контрольных точках конструкции.

Используется ранее предложенный авторами *декомпозиционный подход*, трансформированный в направлении повышения точности. Его эффективность и возможности расчетного аппарата продемонстрированы на примерах модельных и тестовых задач. Показано, что расчетные параметры гасителей, полученные аналитически, в целом обеспечивают выполнение заданных условий регулирования амплитуд колебаний.

Ключевые слова: гашение колебаний, многомассовые динамические гасители колебаний (МДГК), полигармонические воздействия, регулирование, декомпозиция, вибрация

Для цитирования: Себешев, В.Г., Люфт, Н.А. Развитие теории расчета регулирования напряженно-деформированного состояния сооружений и конструкций при полигармонических колебаниях // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. 2026. Т. 28. № 4. С. 255–273. <https://doi.org/10.31675/1607-1859-2026-28-4-255-273>. EDN: WXXPZX

ORIGINAL ARTICLE

DEVELOPMENT OF ANALYTICAL THEORY OF STRESS-STRAIN STATE OF STRUCTURES DURING POLYHARMONIC VIBRATIONS

Vladimir G. Sebeshev, Nikita A. Lyuft

Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering,
Novosibirsk, Russia

Abstract. The paper presents a solution to the vibration protection problem for building elements subjected polyharmonic dynamic vibrations.

Purpose: The objective of this work is to develop a calculation method of the system parameters of multi-mass dynamic vibration dampers, which is refined compared to the previously developed method.

Methodology/approach: The approach is based on the improved formulation of the problem and computational model. The vibration suppression is a task of regulating the stress-strain parameters of a linearly deformable system protected by a set of single tuned mass dampers.

Research findings: The parameters of dampers are determined by specified requirements for displacement vibrations at reference points of the structure. The previously proposed decomposition method is refined to improve the accuracy. Its effectiveness method and capabilities of computations are demonstrated by the model and test problems. It is shown that analytically derived parameters fully satisfy the specified conditions for the vibration control.

Keywords: vibration damping, multiple tuned mass damper, polyharmonic vibration, regulation, decomposition

For citation: Sebeshev, V.G., Lyuft, N.A. Development of Analytical Theory of Stress-strain State of Structures during Polyharmonic Vibrations. Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta – Journal of Construction and Architecture. 2026; 28(4): 255–273. <https://doi.org/10.31675/1607-1859-2026-28-4-255-273>. EDN: WXXPZX

Введение

Существенное влияние на эксплуатационное состояние сооружений и конструкций оказывают динамические воздействия, которые могут рассматриваться как полигармонические – либо в силу действительной близости характера их изменения во времени к гармоническому закону, либо вследствие использования метода Фурье для их описания (аппроксимации). Динамические воздействия могут быть причиной усталостных повреждений конструкций, а также вызывать резонансные явления, снижающие надежность строительных объектов. Это определяет актуальность требований защиты механических систем от нежелательных вибраций, корректного моделирования и разработки методов расчета виброгашения.

Действенным средством борьбы с вибрациями, эффективность и техническая осуществимость которого подтверждена инженерно-строительной практикой, являются динамические гасители колебаний (ДГК). Их использование при корректной настройке позволяет значительно уменьшать перемещения, усилия и напряжения в конструкциях. Вопросы, связанные с определением инерционно-жесткостных параметров ДГК и оценкой их эффективности, рассматривались в разных аспектах, в частности, в работах [1–7].

При этом основным подходом при рассмотрении задач гашения колебаний традиционно остается решение систем дифференциальных уравнений [8, 9] – либо прямое аналитическое, либо численное с перебором большого числа параметров гасителей колебаний до получения приемлемых результатов [10, 11]. Первый вариант из-за сложности реализации существенно ограничивает размерность решаемых задач, что сужает возможности его инженерного применения; второй – требует больших вычислительных мощностей и времени для многократных перерасчетов при изменениях каждого из параметров ДГК.

Принципиальная альтернатива вышеупомянутым подходам – постановка задачи гашения колебаний в такой форме, при которой требуемые параметры гасителей определяются по условиям (требованиям) получения заранее установленных (заданных, целевых) значений определенных параметров динамического напряженно-деформированного состояния защищаемой системы (сооружения, конструкции) [12, 13].

Введено и используется для разработки теории и методик расчета виброзащиты понятие «комплекс ДГК» – совокупность групп разночастотно настроенных и разнонаправленно ориентированных гасителей (групп многомассовых ДГК). Основной целью является рациональное формирование комплекса по количеству, местам расположения и направлениям действия гасителей с учетом геометрических, структурных, инерционно-жесткостных характеристик защищаемой системы (сооружения, конструкции), вида (временной функции) динамического воздействия, а также директивно формулируемых (таргетируемых) исходных требований к результатам регулирования (гашения колебаний).

Ранее в работах [12, 13] на основе предложенной обобщенной схемы комплекса гасителей было получено аналитическое решение задачи регулирования динамических перемещений при гармонических, а также полигармонических воздействиях – в форме зависимостей между параметрами (массами и жесткостями упругих элементов) всех ДГК в составе комплекса. По существу, решена обратная задача, по результатам которой определены области взаимосвязанных возможных значений характеристик гасителей, обеспечивающих удовлетворение исходных условий (требований) регулирования.

Выполненные в исследовании [13] тестирование, верификация и валидация разработанного метода расчета регулирования в задачах с минимально возможным числом гасителей (по одному на каждую из частот полигармонического воздействия и соответствующее таргетируемое перемещение) показали вполне удовлетворительную, а в большинстве случаев – высокую точность результатов. Достоинство предложенной методики состоит в значительном упрощении решения прикладных задач гашения полигармонических колебаний по сравнению с ранее упомянутыми традиционными подходами.

Однако использованный при этом декомпозиционный подход, позволяющий ограничиться наименьшим числом гасителей, недостаточно учитывает возможное негативное взаимовлияние разночастотно настроенных ДГК на регулируемые параметры.

Анализ потенциала полученных теоретических решений и результатов модельных расчетов позволил сформулировать рекомендации по местам размещения и составу групп ДГК с учетом количества и расположения точек регулирования перемещений, а также расчетного числа гармоник заданного воздействия:

- многомассовые (разночастотно настроенные и разноориентированные) ДГК (МДГК) наиболее эффективны при постановке в точках задания условий регулирования (возможно в иных местах, если отклик регулируемых параметров (РП) на регуляторы-гасители (Р-Г), оцениваемый предварительно, не пренебрежимо мал); при этом, согласно общим положениям теории регулирования [16, 17], количество МДГК равно числу РП;

- количество блоков «масса – упругий элемент» в составе МДГК по каждому из учитываемых направлений влияния гасителя (в пространстве – x, y, z) принимается по числу гармонических компонентов динамического воздействия;

- часть первоначально назначенных (по предыдущим рекомендациям) одиночных ДГК (ОДГК) в составе МДГК может быть исключена, если их влияние на РП невелико в сравнении с другими гасителями.

При формировании расчетного комплекса ДГК с учетом вышеизложенных рекомендаций декомпозиционное определение требуемых параметров Р-Г выполняется для группы одночастотно настраиваемых регуляторов (отдельно по каждой гармонике). Остальные гасители при этом учитываются как «сопутствующие» упруго-инерционные элементы динамической системы с временно неизвестными характеристиками масс и жесткостей.

Цель работы – развитие метода расчета параметров комплекса многомассовых динамических гасителей колебаний, уточненного в сравнении с разработанным ранее в [13].

Основные задачи:

1. Создание алгоритма и усовершенствованного аналитического расчетного аппарата (уравнений, зависимостей, формул) для решения задачи гашения колебаний по изначально требуемым значениям параметров НДС системы.
2. Решение тестовых задач по уточненной расчетной методике.
3. Выполнение прямых расчетов верификационно-валидационных модельных систем методами строительной механики при найденных параметрах ДГК с целью получения графиков изменения во времени перемещений от отдельных гармонических составляющих и от суммарного полигармонического воздействия.

Расчетные модели и методы

Рассматриваются линейно деформируемые системы с конечным числом степеней свободы масс (n), произвольным количеством регулируемых параметров P (n_P) и многомассовых динамических гасителей колебаний V (n_V), настроенных на различные частоты ($\omega_{F_1}, \omega_{F_2}, \dots, \omega_{n_f}$) компонент полигармонического воздействия (рис. 1).

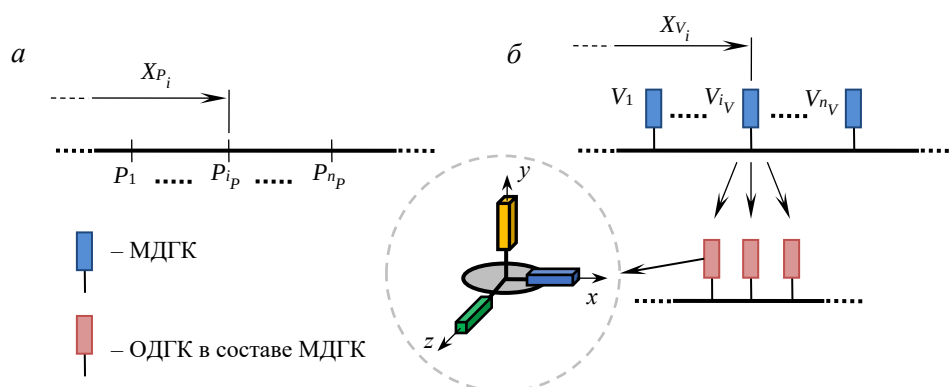


Рис. 1. К постановке задачи гашения (обобщенная модель):

a – регулируемые параметры (n_p – их количество); b – регуляторы или комплексы МДГК (n_v – их количество)

Fig. 1. Problem formulation:

a – parameter control (n_p is the number of parameters); b – regulators or complexes of multiple tuned mass dampers (n_v is the number of dampers)

В общем случае места расположения регулируемых параметров P и многомассовых ДГК V не совпадают ($X_{p_i} \neq X_{v_i}$). Количество многомассовых ДГК соответствует числу регулируемых параметров ($n_p = n_v$).

По аналогии с решением, представленным в работе [13], i -е перемещение некоторой массы системы описывается неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка

$$\frac{d^2 y_i(t)}{dt^2} = a_{i,1} y_1(t) + a_{i,2} y_2(t) + \dots + a_{i,n} y_n(t) + d_i \frac{dy_i(t)}{dt} + f_{p,i}(t), \quad (1)$$

где $f_{p,i}(t) = \sum_{k=1}^{n_f} A_{p,k} \sin(\omega_k t)$ – функция, описывающая полигармоническое воздействие на систему; n_f – количество гармонических составляющих в представлении $f_{p,i}(t)$.

Пренебрежение в выражении (1) слагаемым $d_i \dot{y}_i(t)$, учитывающим сопротивление по модели вязкого трения, не оказывает существенного влияния на рассчитываемые значения частот собственных колебаний строительных конструкций при реальных значениях характеристик демпфирования, т. к. согласно [14, 15] частота свободных колебаний с поправкой на рассеяние определяется как $\omega_d = \sqrt{\frac{c_{\text{mod}}}{m_{\text{mod}}}} \sqrt{1 - \gamma^2 / 4}$, где c_{mod} , m_{mod} – модальные жесткость

и масса, γ – коэффициент неупругого сопротивления (для строительных конструкционных материалов $\gamma = 0,02 \dots 0,15$). Возможно приемлемое приближенное уточнение частот относительно значений, полученных по уравнениям без учета демпфирования [16]. При этом неучет вязкого сопротивления в отношении амплитуд перемещений идет в запас [12, 17].

При $d_i = 0$ в уравнении (1)

$$\frac{d^2 y_i(t)}{dt^2} = a_{i,1} y_1(t) + a_{i,2} y_2(t) + \dots + a_{i,n} y_n(t) + f_{p,i}(t), \quad (2)$$

тогда для системы с n степенями свободы масс (включая массы гасителей колебаний) имеем:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 y_1(t)}{dt^2} = a_{1,1} y_1(t) + a_{1,2} y_2(t) + \dots + a_{1,n} y_n(t) + f_{p,1}(t); \\ \frac{d^2 y_2(t)}{dt^2} = a_{2,1} y_1(t) + a_{2,2} y_2(t) + \dots + a_{2,n} y_n(t) + f_{p,2}(t); \\ \vdots \\ \frac{d^2 y_i(t)}{dt^2} = a_{i,1} y_1(t) + a_{i,2} y_2(t) + \dots + a_{i,n} y_n(t) + f_{p,i}(t); \\ \vdots \\ \frac{d^2 y_n(t)}{dt^2} = a_{n,1} y_1(t) + a_{n,2} y_2(t) + \dots + a_{n,n} y_n(t) + f_{p,n}(t). \end{array} \right. \quad (3)$$

Использование предложенного в работе [13] приема декомпозиции позволяет перейти от системы дифференциальных уравнений (3) к набору из n_f подсистем алгебраических уравнений, записанных, в частности, в амплитудах сил инерции, при этом каждая подсистема описывает отклик на отдельную j -ю гармонику ($j = 1, 2, \dots, n_f$):

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{для } j = 1 \left\{ \begin{array}{l} \delta_{1,1}^{*(1)} I_1^{(1)} + \delta_{1,2} I_2^{(1)} + \dots + \delta_{1,i}^* I_i^{(1)} + \dots + \delta_{1,n} I_n^{(1)} + \Delta_{1,F1} = 0; \\ \delta_{2,1} I_1^{(1)} + \delta_{2,2}^{*(1)} I_2^{(1)} + \dots + \delta_{2,i}^* I_i^{(1)} + \dots + \delta_{2,n} I_n^{(1)} + \Delta_{2,F1} = 0; \\ \vdots \\ \delta_{i,1} I_1^{(1)} + \delta_{i,2} I_2^{(1)} + \dots + \delta_{i,i}^{*(1)} I_i^{(1)} + \dots + \delta_{i,n} I_n^{(1)} + \Delta_{i,F1} = 0; \\ \vdots \\ \delta_{n,1} I_1^{(1)} + \delta_{n,2} I_2^{(1)} + \dots + \delta_{n,i}^* I_i^{(1)} + \dots + \delta_{n,n}^{*(1)} I_n^{(1)} + \Delta_{n,F1} = 0; \end{array} \right. \\ \vdots \\ \text{для } j = n_f \left\{ \begin{array}{l} \delta_{1,1}^{*(n_f)} I_1^{(n_f)} + \delta_{1,2} I_2^{(n_f)} + \dots + \delta_{1,i}^* I_i^{(n_f)} + \dots + \delta_{1,n} I_n^{(n_f)} + \Delta_{1,Fn_f} = 0; \\ \delta_{2,1} I_1^{(n_f)} + \delta_{2,2}^{*(n_f)} I_2^{(n_f)} + \dots + \delta_{2,i}^* I_i^{(n_f)} + \dots + \delta_{2,n} I_n^{(n_f)} + \Delta_{2,Fn_f} = 0; \\ \vdots \\ \delta_{i,1} I_1^{(n_f)} + \delta_{i,2} I_2^{(n_f)} + \dots + \delta_{i,i}^{*(n_f)} I_i^{(n_f)} + \dots + \delta_{i,n} I_n^{(n_f)} + \Delta_{i,Fn_f} = 0; \\ \vdots \\ \delta_{n,1} I_1^{(n_f)} + \delta_{n,2} I_2^{(n_f)} + \dots + \delta_{n,i}^* I_i^{(n_f)} + \dots + \delta_{n,n}^{*(n_f)} I_n^{(n_f)} + \Delta_{n,Fn_f} = 0, \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (4)$$

где $\delta_{i,i}^{*(j)}$ – элементы главной диагонали матрицы динамической податливости системы для j -й гармоники; $\delta_{i,i*}$ – побочные элементы матрицы упругой податливости ($i* = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n$); $I_i^{(j)}$ – амплитуда силы инерции при движении i -й массы от воздействия j -й гармоники; $\Delta_{i,Fj}$ – перемещение i -й массы при статическом приложении j -го воздействия (в амплитудном значении).

В рассматриваемой системе назначаются точки $k = 1, 2, \dots, k^{(j)}$, в которых предполагается регулировать перемещения. Расположение этих точек может быть как отличным друг от друга, так и совпадать: полностью (в таком случае регулируется перемещение только в одной точке при каждой j -й составляющей полигармонического воздействия) или частично. Для назначенных точек записываются условия регулирования в виде требования равенства амплитудных перемещений $\Delta_{k,j}^r$ этих точек заданным значениям $\langle \Delta_{k,j}^r \rangle$:

$$\begin{bmatrix} \Delta_{1,j}^r & \dots & \Delta_{k,j}^r & \dots & \Delta_{k^{(j)},j}^r \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \langle \Delta_{1,j}^r \rangle & \dots & \langle \Delta_{k,j}^r \rangle & \dots & \langle \Delta_{k^{(j)},j}^r \rangle \end{bmatrix}^T. \quad (5)$$

Здесь $k^{(j)}$ – количество точек для регулирования перемещений при j -й гармонике ($j = 1, 2, \dots, n_f$).

Уравнения амплитудных перемещений назначенных точек в совокупности с равенством (5) формируют уравнения регулирования, общая форма записи которых [13]:

$$\delta_{k,1} I_1^{(j)} + \delta_{k,2} I_2^{(j)} + \dots + \delta_{k,i} I_i^{(j)} + \dots + \delta_{k,n} I_n^{(j)} + \Delta_{k,Fj} = \langle \Delta_{k,j}^r \rangle. \quad (6)$$

При последовательном рассмотрении от $j = 1$ до $j = n_f$ каждой подсистемы из системы уравнений (4) число регулируемых точек $k^{(j)}$ принимается равным числу ДГК $n_d^{(g)}$ в группе d_g ($g = 1, 2, \dots, n_f$ – номер группы гасителей, настроенных на g -ю гармонику), т. е. $k^{(j)} = n_d^{(g)}$. В таком случае размерность векторов сил инерции $[I^{(j)}]$ в системе уравнений (4) совпадает с количеством неизвестных сил инерции в выражении (6). Это позволяет заменять в системе (4) блоки уравнений, описывающие перемещения гасителей в группах, настроенных на j -ю гармонику, на уравнения регулирования (6).

После замены формируется новая система уравнений, представляемая в матричной форме как

$$\begin{bmatrix} \delta_{I_s}^{*(j)} \\ \delta_{d_1}^{*(j)} \\ \dots \\ \delta_{d_g}^{*r(j)} \\ \dots \\ \delta_{d_{n_f}}^{*(j)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_s^{(j)} \\ I_{d_1}^{(j)} \\ \dots \\ I_{d_g}^{(j)} \\ \dots \\ I_{d_{n_f}}^{(j)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta_{I_s,Fj}^{(j)} \\ \Delta_{d_1,Fj}^{(j)} \\ \dots \\ \Delta_{k,Fj}^{(j)} - \langle \Delta_{k,j}^{r(j)} \rangle \\ \dots \\ \Delta_{d_{n_f},Fj}^{(j)} \end{bmatrix} = 0. \quad (7)$$

Из системы уравнений (7) получаются выражения сил инерции, действующих на массы системы при воздействии j -й гармоники, через неизвестные параметры ДГК других групп ($g \neq j$):

$$\left[I^{(j)} \right] = \frac{1}{D_0^{(j)}} \left[D^{(j)} \right]. \quad (8)$$

Здесь $D_0^{(j)}$ – определитель матрицы коэффициентов при неизвестных силах инерции в (7); $\left[D^{(j)} \right]$ – вектор вспомогательных определителей матрицы коэффициентов с замененным (по методу Крамера) i -м столбцом ($i = 1, 2, \dots, n$), соответствующим номеру искомой силы инерции.

Полученные выражения сил инерции (8) подставляются в замененные ранее блоки уравнений системы (4). После подстановки получаем уравнение связи между параметрами жесткости ДГК:

$$c_{u,j,\alpha}^{(i)} = \frac{m_{u,j,\alpha} \omega_{F_j}^2 D_i^{(j)}}{D_i^{(j)} - m_{u,j,\alpha} \omega_{F_j}^2 \left(D_0^{(j)} \Delta_i^{(j)} + \sum_{z=1}^{i-1} \delta_{i,z} D_z^{(j)} + \sum_{z=i+1}^n \delta_{i,z} D_z^{(j)} + \delta_i^{\text{кр}} D_i^{(j)} \right)}, \quad (9)$$

где $\delta_i^{\text{кр}}$ – перемещение точки крепления гасителя, параметры которого подлежат определению.

При рассмотрении всех подзадач (4) от $j = 1$ до $j = n_f$ получаем систему

из $\sum_{g=1}^{n_f} n_d^{(g)}$ уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{u,1,\alpha}^{(i)} = \frac{m_{u,1,\alpha} \omega_{F_1}^2 D_i^{(1)}}{D_i^{(1)} - m_{u,1,\alpha} \omega_{F_1}^2 \left(D_0^{(1)} \Delta_i^{(1)} + \sum_{z=1}^{i-1} \delta_{i,z} D_z^{(1)} + \sum_{z=i+1}^n \delta_{i,z} D_z^{(1)} + \delta_i^{\text{кр}} D_i^{(1)} \right)}; \\ \vdots \\ c_{u,j,\alpha}^{(i)} - \text{см. (10)}; \\ \vdots \\ c_{u,n_f,\alpha}^{(i)} = \frac{m_{u,n_f,\alpha} \omega_{F_{n_f}}^2 D_i^{(n_f)}}{D_i^{(n_f)} - m_{u,n_f,\alpha} \omega_{F_{n_f}}^2 \left(D_0^{(n_f)} \Delta_i^{(n_f)} + \sum_{g=1}^{i-1} \delta_{i,z} D_z^{(n_f)} + \sum_{z=i+1}^n \delta_{i,z} D_z^{(n_f)} + \delta_i^{\text{кр}} D_i^{(n_f)} \right)} \\ \vdots \end{array} \right. \quad (10)$$

Здесь для $j = 1$: $i = n - \sum_{g=1}^{n_f} n_d^{(g)} + 1, \dots, n - \sum_{g=1}^{n_f} n_d^{(g)} + n_d^{(j)}$;

для $2 \leq j \leq n_f$: $i = n - \sum_{g=1}^{n_f} n_d^{(g)} + \sum_{t=1}^{j-1} n_d^{(t)} + 1, \dots, n - \sum_{g=1}^{n_f} n_d^{(g)} + \sum_{t=1}^{j-1} n_d^{(t)} + n_d^{(j)}$.

Рассмотрим решение тестовой задачи с использованием уточненного расчетного аппарата (рис. 2).

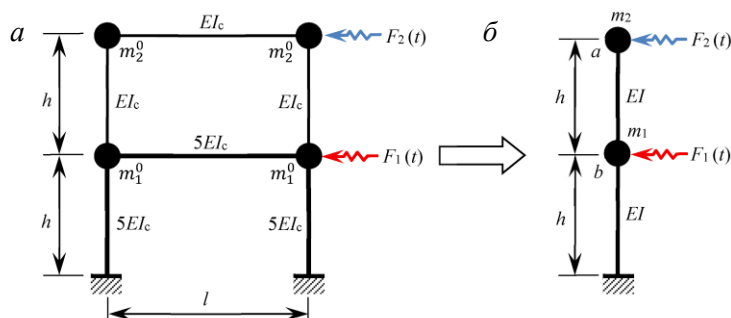


Рис. 2. Исходная система (а) и расчетная модель тестовой задачи (б)
Fig. 2. The proposed system (a) and the computational model (b)

Исходные данные: двухэтажная рама общей высотой $2h$, пролетом l с сосредоточенными в узлах массами m_1^0 и m_2^0 (рис. 2, а). В двух узлах на раму действуют сосредоточенные силы $F_1(t)$ и $F_2(t)$, меняющиеся по гармоническому закону с разными частотами и амплитудами:

$$F_1(t) = F_1 \sin(\omega_{F_1} t + \varphi_1), \quad F_2(t) = F_2 \sin(\omega_{F_2} t + \varphi_2).$$

Для наглядности решения выполним переход к эквивалентной консольной системе (рис. 2, б), инерционно-жесткостные характеристики которой: $m_1 = 2m_1^0$, $m_2 = 2m_2^0$ матрица упругой податливости – такая же, как у исходной рамы, откуда $EI = 11,93EI_c$. При заданных $h = 3$ м, $l = 6$ м, $m_1^0 = 12,5$ т, $m_2^0 = 10$ т, $EI_c = 6,318$ МН·м², $m_1 = 25$ т, $m_2 = 20$ т и $EI = 75,394$ МН·м². Амплитуды нагрузок $F_1 = 20$ кН, $F_2 = 40$ кН, частоты $\omega_{F_1} = 0,9\omega_1$, $\omega_{F_2} = 0,95\omega_2$ – близкие к резонансным (ω_1, ω_2 – собственные частоты), $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$.

Требуется:

– при воздействии $F_1(t)$ уменьшить горизонтальные перемещения узлов а и б на 90 % от значения перемещений Δ_{a,F_1}^0 и Δ_{b,F_1}^0 этих точек в системе без гасителей: $\Delta_{a,F_1}^r = 0,1\Delta_{a,F_1}^0$ и $\Delta_{b,F_1}^r = 0,1\Delta_{b,F_1}^0$;

– при воздействии $F_2(t)$ аналогично:

$$\Delta_{a,F_2}^r = 0,1\Delta_{a,F_2}^0 \text{ и } \Delta_{b,F_2}^r = 0,1\Delta_{b,F_2}^0.$$

Для незащищенной системы (рис. 2, б) определены $\Delta_{a,F_1}^0 = 32,11$ мм, $\Delta_{b,F_1}^0 = 10,81$ мм, $\Delta_{a,F_2}^0 = 0,19$ мм, $\Delta_{b,F_2}^0 = 3,78$ мм.

Для уменьшения амплитуд колебаний в систему необходимо добавить МДГК D_1 и D_2 . Места установки гасителей могут назначаться произвольно, однако для наиболее эффективной работы ДГК их рекомендуется располагать в точках с наибольшими амплитудами перемещений от разночастотных компонентов рассматриваемого динамического воздействия (рис. 3, а).

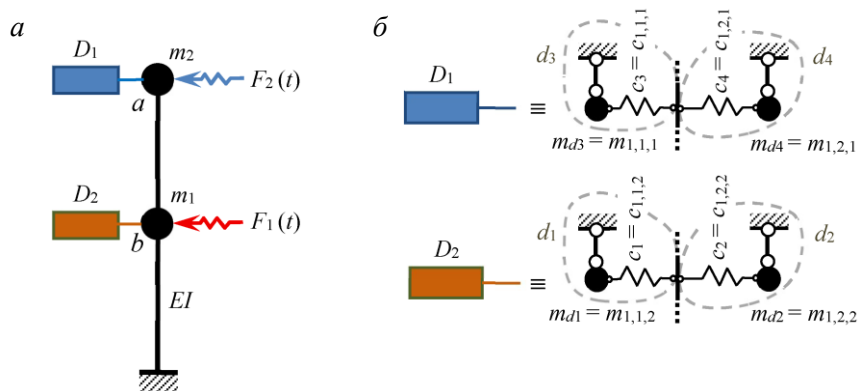


Рис. 3. Размещение МДГК (а) и условные обозначения ОДГК (б) по [13]
Fig. 3. Multiple tuned mass damper location (a) and notation (b) according to [13]

Таким образом, задача уменьшения амплитуд перемещений в узлах a и b системы сводится к определению параметров ОДГК (масс $m_{1,1,2} = m_{d1}$, $m_{1,2,2} = m_{d2}$, $m_{1,1,1} = m_{d3}$, $m_{1,2,1} = m_{d4}$ и жесткостей упругих элементов $c_{1,1,2} = c_{d1}$, $c_{1,2,2} = c_{d2}$, $c_{1,1,1} = c_{d3}$, $c_{1,2,1} = c_{d4}$), удовлетворяющих требованиям получения заданных амплитуд.

Условно-графическое обозначение и индексация ДГК приняты согласно [13] (рис. 3, б).

Результаты и обсуждение

Рассмотрим решение задачи гашения с использованием вышеизложенного уточненного формульного аппарата.

Система алгебраических уравнений, записанная в амплитудах сил инерции и описывающая отклик системы с гасителями d_1 , d_2 , d_3 и d_4 на воздействие $F_1(t)$, имеет следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\delta_{1,1} - \frac{1}{m_1 \omega_{F1}^2} \right) I_1^{(1)} + \delta_{1,2} I_2^{(1)} + \delta_{1,d1} I_{d1}^{(1)} + \delta_{1,d2} I_{d2}^{(1)} + \delta_{1,d3} I_{d3}^{(1)} + \delta_{1,d4} I_{d4}^{(1)} + \Delta_{1,F1} = 0; \\ \delta_{2,1} I_1^{(1)} + \left(\delta_{2,2} - \frac{1}{m_2 \omega_{F1}^2} \right) I_2^{(1)} + \delta_{2,d1} I_{d1}^{(1)} + \delta_{2,d2} I_{d2}^{(1)} + \delta_{2,d3} I_{d3}^{(1)} + \delta_{2,d4} I_{d4}^{(1)} + \Delta_{2,F1} = 0; \\ \delta_{d1,1} I_1^{(1)} + \delta_{d1,2} I_2^{(1)} + \left(\delta_{d1}^{kp} + \frac{1}{c_{d1}} - \frac{1}{m_{d1} \omega_{F1}^2} \right) I_{d1}^{(1)} + \delta_{d1,d2} I_{d2}^{(1)} + \delta_{d1,d3} I_{d3}^{(1)} + \delta_{d1,d4} I_{d4}^{(1)} + \Delta_{d1,F1} = 0; \\ \delta_{d2,1} I_1^{(1)} + \delta_{d2,2} I_2^{(1)} + \delta_{d2,d1} I_{d1}^{(1)} + \left(\delta_{d2}^{kp} + \frac{1}{c_{d2}} - \frac{1}{m_{d2} \omega_{F1}^2} \right) I_{d2}^{(1)} + \delta_{d2,d3} I_{d3}^{(1)} + \delta_{d2,d4} I_{d4}^{(1)} + \Delta_{d2,F1} = 0; \\ \delta_{d3,1} I_1^{(1)} + \delta_{d3,2} I_2^{(1)} + \delta_{d3,d1} I_{d1}^{(1)} + \delta_{d3,d2} I_{d2}^{(1)} + \left(\delta_{d3}^{kp} + \frac{1}{c_{d3}} - \frac{1}{m_{d3} \omega_{F1}^2} \right) I_{d3}^{(1)} + \delta_{d3,d4} I_{d4}^{(1)} + \Delta_{d3,F1} = 0; \\ \delta_{d4,1} I_1^{(1)} + \delta_{d4,2} I_2^{(1)} + \delta_{d4,d1} I_{d1}^{(1)} + \delta_{d4,d2} I_{d2}^{(1)} + \delta_{d4,d3} I_{d3}^{(1)} + \left(\delta_{d4}^{kp} + \frac{1}{c_{d4}} - \frac{1}{m_{d4} \omega_{F1}^2} \right) I_{d4}^{(1)} + \Delta_{d4,F1} = 0. \end{array} \right. \quad (11)$$

Уравнения регулирования перемещений точек a и b :

$$\delta_{a,1}I_1^{(1)} + \delta_{a,2}I_2^{(2)} + \delta_{a,d_1}I_{d_1}^{(1)} + \delta_{a,d_2}I_{d_2}^{(1)} + \delta_{a,d_3}I_{d_3}^{(1)} + \delta_{a,d_4}I_{d_4}^{(1)} + \Delta_{a,F_1} = \langle \Delta_{a,F_1}^r \rangle; \quad (12)$$

$$\delta_{b,1}I_1^{(1)} + \delta_{b,2}I_2^{(2)} + \delta_{b,d_1}I_{d_1}^{(1)} + \delta_{b,d_2}I_{d_2}^{(1)} + \delta_{b,d_3}I_{d_3}^{(1)} + \delta_{b,d_4}I_{d_4}^{(1)} + \Delta_{b,F_1} = \langle \Delta_{b,F_1}^r \rangle. \quad (13)$$

Замена в системе (11) уравнений перемещения гасителей d_1 и d_3 , параметры которых подлежат определению, на уравнения (12) и (13) соответственно дает новую систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\delta_{1,1} - \frac{1}{m_1 \omega_{F1}^2} \right) I_1^{(1)} + \delta_{1,2}I_2^{(1)} + \delta_{1,d_1}I_{d_1}^{(1)} + \delta_{1,d_2}I_{d_2}^{(1)} + \delta_{1,d_3}I_{d_3}^{(1)} + \\ + \delta_{1,d_4}I_{d_4}^{(1)} + \Delta_{1,F1} = 0, \\ \delta_{2,1}I_1^{(1)} + \left(\delta_{2,2} - \frac{1}{m_2 \omega_{F1}^2} \right) I_2^{(1)} + \delta_{2,d_1}I_{d_1}^{(1)} + \delta_{2,d_2}I_{d_2}^{(1)} + \delta_{2,d_3}I_{d_3}^{(1)} + \\ + \delta_{2,d_4}I_{d_4}^{(1)} + \Delta_{2,F1} = 0; \\ \delta_{b,1}I_1^{(1)} + \delta_{b,2}I_2^{(2)} + \delta_{b,d_1}I_{d_1}^{(1)} + \delta_{b,d_2}I_{d_2}^{(1)} + \delta_{b,d_3}I_{d_3}^{(1)} + \delta_{b,d_4}I_{d_4}^{(1)} + \Delta_{b,F_1} = \langle \Delta_{b,F_1}^r \rangle; \\ \delta_{d_2,1}I_1^{(1)} + \delta_{d_2,2}I_2^{(1)} + \delta_{d_2,d_1}I_{d_1}^{(1)} + \left(\delta_{d_2}^{kp} + \frac{1}{c_{d_2}} - \frac{1}{m_{d_2} \omega_{F1}^2} \right) I_{d_2}^{(1)} + \\ + \delta_{d_2,d_3}I_{d_3}^{(1)} + \delta_{d_2,d_4}I_{d_4}^{(1)} + \Delta_{d_2,F1} = 0; \\ \delta_{a,1}I_1^{(1)} + \delta_{a,2}I_2^{(2)} + \delta_{a,d_1}I_{d_1}^{(1)} + \delta_{a,d_2}I_{d_2}^{(1)} + \delta_{a,d_3}I_{d_3}^{(1)} + \delta_{a,d_4}I_{d_4}^{(1)} + \Delta_{a,F_1} = \langle \Delta_{a,F_1}^r \rangle; \\ \delta_{d_4,1}I_1^{(1)} + \delta_{d_4,2}I_2^{(1)} + \delta_{d_4,d_1}I_{d_1}^{(1)} + \delta_{d_4,d_2}I_{d_2}^{(1)} + \delta_{d_4,d_3}I_{d_3}^{(1)} + \\ + \left(\delta_{d_4}^{kp} + \frac{1}{c_{d_4}} - \frac{1}{m_{d_4} \omega_{F1}^2} \right) I_{d_4}^{(1)} + \Delta_{d_4,F1} = 0. \end{array} \right. \quad (14)$$

Необходимо из уравнений (14) выразить силы инерции, записанные через неизвестные параметры ДГК ($m_{1,2,2} = m_{d2}$, $m_{1,2,1} = m_{d4}$, $c_{1,2,2} = c_{d2}$, $c_{1,2,1} = c_{d4}$). Определитель системы (14):

$$D_0^{(1)} = \left(-\frac{0,333}{c_{1,2,2}} + \frac{0,348 \cdot 10^{-1}}{c_{1,2,2}c_{1,2,1}} + \frac{0,883 \cdot 10^{-2}}{m_{1,2,2}} + \frac{0,11 \cdot 10^{-2}}{m_{1,2,1}} + \frac{0,245 \cdot 10^{-4}}{m_{1,2,2}m_{1,2,1}} + 0,397 - \right. \\ \left. - \frac{0,925 \cdot 10^{-3}}{m_{1,2,1}c_{1,2,2}} - \frac{0,925 \cdot 10^{-3}}{c_{1,2,1}m_{1,2,2}} - \frac{0,416 \cdot 10^{-1}}{c_{1,2,1}} \right) 10^{-38} \left[\left(\frac{M}{H} \right)^6 \right].$$

Выражения вспомогательных определителей системы (14) с замененным (по Крамеру) столбцом, соответствующим номеру искомой силы инерции:

$$\begin{aligned}
 & \left[D^{(1)} \right] = \\
 & = \begin{bmatrix} D_1^{(1)} = \left(-\frac{352}{c_{1,2,2}} + \frac{36,8}{c_{1,2,2}c_{1,2,1}} + \frac{9,33}{m_{1,2,2}} + \frac{1,17}{m_{1,2,1}} + \right. \\ \left. + \frac{0,259}{m_{1,2,2}m_{1,2,1}} + 419 - \frac{0,977}{m_{1,2,1}c_{1,2,2}} - \frac{43,9}{c_{1,2,1}} \right) 10^{-38}; \\ D_2^{(1)} = \left(-\frac{836}{c_{1,2,2}} + \frac{87,5}{c_{1,2,2}c_{1,2,1}} + \frac{22,2}{m_{1,2,2}} + \frac{2,77}{m_{1,2,1}} + \right. \\ \left. + \frac{0,0617}{m_{1,2,2}m_{1,2,1}} + 997 - \frac{2,32}{m_{1,2,1}c_{1,2,2}} - \frac{2,32}{c_{1,2,1}m_{1,2,2}} - \frac{104}{c_{1,2,1}} \right) 10^{-38}; \\ D_{d_1}^{(1)} = \left(\frac{598}{c_{1,2,2}} + \frac{114}{c_{1,2,1}} + \frac{1,66}{c_{1,2,1}m_{1,2,2}} + \frac{1,66}{c_{1,2,2}m_{1,2,1}} - \right. \\ \left. - \frac{0,0441}{m_{1,2,2}m_{1,2,1}} + 1086 - \frac{3,02}{m_{1,2,1}} - \frac{15,9}{m_{1,2,2}} - \frac{62,6}{c_{1,2,1}c_{1,2,2}} \right) 10^{-37}; \\ \dots \\ D_{d_4}^{(1)} = \left(-\frac{116}{c_{1,2,2}} + \frac{3,08}{m_{1,2,2}} + 139 \right) 10^{-37} \end{bmatrix} \left(\frac{\text{М}^6}{\text{Н}^5} \right).
 \end{aligned}$$

Вектор сил инерции $\left[I^{(1)} \right]$:

$$\left[I^{(1)} \right] = \frac{\left[D^{(1)} \right]}{D_0^{(1)}} = \begin{bmatrix} I_1^{(1)} \\ I_2^{(1)} \\ I_{d_1}^{(1)} \\ I_{d_2}^{(1)} \\ I_{d_3}^{(1)} \\ I_{d_4}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{92,747m_{1,2,2}m_{1,2,1}}{\eta} \\ \frac{220,548m_{1,2,2}m_{1,2,1}}{\eta} \\ \frac{1,51 \cdot 10^4 m_{1,2,2} - 4 \cdot 10^2 c_{1,2,2}}{2,225 \cdot 10^{-2} c_{1,2,2} + (c_{1,2,2} - 0,838)m_{1,2,2}} \\ \frac{9404,862c_{1,2,2}m_{1,2,2}}{2,225 \cdot 10^{-2} c_{1,2,2} + (c_{1,2,2} - 0,838)m_{1,2,2}} \\ \frac{1,487m_{1,2,2}m_{1,2,1}}{\eta} \\ \frac{3,491 \cdot 10^3 m_{1,2,1}c_{1,2,1}}{2,779 \cdot 10^{-3} c_{1,2,1} + (c_{1,2,1} - 0,105)m_{1,2,1}} \end{bmatrix} \quad (\text{Н}),$$

где $\eta = \left[((c_{1,2,2} - 0,838)c_{1,2,1} + 8,776 \cdot 10^{-2} - 1,047 \cdot 10^{-1} c_{1,2,2})m_{1,2,2} + \right.$

$$+2,225 \cdot 10^{-2} c_{1,2,2} c_{1,2,1} - 2,329 \cdot 10^{-3} c_{1,2,2} \Big] m_{1,2,1} + \left(2,779 \cdot 10^{-3} c_{1,2,2} - \right. \\ \left. - 2,329 \cdot 10^{-3} \right) c_{1,2,1} m_{1,2,2} + 6,183 \cdot 10^{-5} c_{1,2,2} c_{1,2,1}$$

Таким образом, зависимости (9), связывающие параметры жесткости гасителей d_1 и d_3 с характеристиками гасителей d_2 и d_4 при воздействии $F_1(t)$, следующие:

$$c_{1,1,2} = \frac{m_{1,1,2} \left(6,138 \text{ с}^{-1} \right)^2 D_{d_1}^{(1)}}{D_{d_1}^{(1)} - m_{1,1,2} \left(6,138 \text{ с}^{-1} \right)^2 D_0^{(1)} \left(2,385 \cdot 10^{-3} + 10^{-7} \cdot \varepsilon_{d1} \right)}; \quad (15)$$

$$c_{1,1,1} = \frac{m_{1,1,1} \left(6,138 \text{ с}^{-1} \right)^2 D_{d_3}^{(1)}}{D_{d_3}^{(1)} - m_{1,1,1} \left(6,138 \text{ с}^{-1} \right)^2 D_0^{(1)} \left(5,973 \cdot 10^{-3} + 10^{-7} \cdot \varepsilon_{d3} \right)}, \quad (16)$$

где $\varepsilon_{d1} = 1,193 I_1^{(1)} + 2,987 I_2^{(1)} + 1,193 I_{d_1}^{(1)} + 1,193 I_{d_2}^{(1)} + 2,987 I_{d_3}^{(1)} + 2,987 I_{d_4}^{(1)}$;

$\varepsilon_{d3} = 2,987 I_1^{(1)} + 9,551 I_2^{(1)} + 2,987 I_{d_1}^{(1)} + 2,987 I_{d_2}^{(1)} + 9,551 I_{d_3}^{(1)} + 9,551 I_{d_4}^{(1)}$.

Если принять массы гасителей $m_{1,1,2} = 700$ кг, $m_{1,2,2} = 200$ кг, $m_{1,1,1} = 700$ кг, $m_{1,2,1} = 200$ кг, то выражения (15) и (16) можно записать в виде

$$c_{1,1,2} = \frac{5,92 \cdot 10^6 c_{1,2,1} (\alpha_1 c_{1,2,1} + \alpha_2)}{c_{1,2,2} (\alpha_3 c_{1,2,1}^2 + \alpha_4 c_{1,2,1} + 10^{-4} \alpha_5)}; \quad (17)$$

$$c_{1,1,1} = \frac{\alpha_6 \cdot 10^7 c_{1,2,2}^2 + \alpha_7 \cdot 10^6 c_{1,2,1} + \alpha_8 \cdot 10^5}{\alpha_9 c_{1,2,1}^2 + \alpha_{10} c_{1,2,1} + \alpha_{11} \cdot 10^{-2}}, \quad (18)$$

где $\alpha_1 = c_{1,2,2}^4 - 3,065 c_{1,2,2}^3 + 3,03 c_{1,2,2}^2 - 1,362 c_{1,2,2} + 0,324$;

$\alpha_2 = 0,584 c_{1,2,2}^3 - 0,209 c_{1,2,2}^4 - 0,634 c_{1,2,2}^2 + 0,326 c_{1,2,2} - 6,784 \cdot 10^{-2}$;

.....

$\alpha_{11} = 1,751 c_{1,2,2}^4 - 2,257 c_{1,2,2}^3 + 6,609 \cdot 10^{-1} c_{1,2,2}^2$.

Для подзадачи с воздействием $F_2(t)$ получим систему уравнений, связывающих жесткости гасителей d_2 и d_4 с параметрами гасителей d_1 и d_3 :

$$c_{1,2,2} = \frac{\beta_1 c_{1,1,1}^3 + \beta_2 c_{1,1,1}^2 + \beta_3 c_{1,1,1} + \beta_4}{c_{1,1,1} (\beta_5 c_{1,1,1}^2 + \beta_6 c_{1,1,1} + \beta_7)}; \quad (19)$$

$$c_{1,2,1} = \frac{\beta_8 c_{1,1,1}^3 + \beta_9 c_{1,1,1}^2 + \beta_{10} c_{1,1,1} + \beta_{11}}{c_{1,1,1} [\beta_{12} c_{1,1,1}^2 + \beta_{13} c_{1,1,1} + \beta_{14}]}, \quad (20)$$

где $\beta_1 = 3,633 \cdot 10^4 c_{1,1,2}^3 - 8,138 \cdot 10^{10} c_{1,1,2}^2 + 4,797 \cdot 10^{16} c_{1,1,2} - 2,637 \cdot 10^{21}$;

$\beta_2 = 4,84 \cdot 10^{15} c_{1,1,2}^2 - 2,221 \cdot 10^9 c_{1,1,2}^3 - 2,637 \cdot 10^{21} c_{1,1,2} + 5,521 \cdot 10^{20}$;

.....

$\beta_{14} = 8,656 \cdot 10^{-3} c_{1,1,2}^3 - 2,829 \cdot 10^4 c_{1,1,2}^2 + 3,081 \cdot 10^{10} c_{1,1,2} - 1,119 \cdot 10^{16}$.

В уравнениях (17) – (20) учтены взаимовлияния гасителей d_1, d_2, d_3, d_4 при их одновременной настройке на разные частоты ω_{F1} и ω_{F2} полигармонического воздействия.

Получение решения системы уравнений

$$\left\{ \begin{aligned} c_{1,1,2} &= \frac{5,92 \cdot 10^6 c_{1,2,1} (\alpha_1 c_{1,2,1} + \alpha_2)}{c_{1,2,2} (\alpha_3 c_{1,2,1}^2 + \alpha_4 c_{1,2,1} + 10^{-4} \alpha_5)}; \\ c_{1,1,1} &= \frac{\alpha_6 \cdot 10^7 c_{1,2,2}^2 + \alpha_7 \cdot 10^6 c_{1,2,1} + \alpha_8 \cdot 10^5}{\alpha_9 c_{1,2,1}^2 + \alpha_{10} c_{1,2,1} + \alpha_{11} \cdot 10^{-2}}; \\ c_{1,2,2} &= \frac{\beta_1 c_{1,1,1}^3 + \beta_2 c_{1,1,1}^2 + \beta_3 c_{1,1,1} + \beta_4}{c_{1,1,1} (\beta_5 c_{1,1,1}^2 + \beta_6 c_{1,1,1} + \beta_7)}; \\ c_{1,2,1} &= \frac{\beta_8 c_{1,1,1}^3 + \beta_9 c_{1,1,1}^2 + \beta_{10} c_{1,1,1} + \beta_{11}}{c_{1,1,1} [\beta_{12} c_{1,1,1}^2 + \beta_{13} c_{1,1,1} + \beta_{14}]} \end{aligned} \right. \quad (21)$$

в аналитическом виде невозможно. Ее актуальное численное решение:

$$c_{1,1,2} = 26,089 \text{ кН/м}, c_{1,2,2} = 311,582 \text{ кН/м},$$

$$c_{1,1,1} = 26,221 \text{ кН/м}, c_{1,2,1} = 310,715 \text{ кН/м}.$$

Амплитуды перемещений точек a и b при воздействиях $F_1(t)$ и $F_2(t)$ описываются уравнениями:

$$\Delta_{a,F1}^{dyn} = \delta_{a,1} I_1^{(1)} + \delta_{a,2} I_2^{(1)} + \delta_{a,d_1} I_{d_1}^{(1)} + \delta_{a,d_2} I_{d_2}^{(1)} + \Delta_{a,F1}; \quad (22)$$

$$\Delta_{b,F2}^{dyn} = \delta_{b,1} I_1^{(2)} + \delta_{b,2} I_2^{(2)} + \delta_{b,d_1} I_{d_1}^{(2)} + \delta_{b,d_2} I_{d_2}^{(2)} + \Delta_{b,F2}. \quad (23)$$

Перемещение точки a согласно (22) и точки b по (23):

$$\Delta_{a,F1}^{dyn} = 1,195 \text{ мм}; \Delta_{a,F2}^{dyn} = -0,11 \text{ мм}; \Delta_{b,F1}^{dyn} = 0,86 \text{ мм}; \Delta_{b,F2}^{dyn} = -0,014 \text{ мм}.$$

Результаты расчета представлены в табл. 1 и на рис. 4.

Таблица 1

**Таргетируемые условия регулирования и результаты расчета
гашения колебаний тестовой модели**

Table 1

Targeted regulation conditions and calculated vibration damping for the test model

№ подавляемой гармонической составляющей j	Амплитудное перемещение расчетной точки от j -й гармоники в системе без гасителей, мм		Требуемое значение перемещения, указанного в столбце 2, мм	Полученные амплитуды перемещений с учетом гасителей, мм
1	2		3	4
1	т. a	32,11	3,3	1,19
	т. b	10,81	1,1	0,86
2	т. a	0,19	0,02	0,11
	т. b	3,78	0,4	0,01

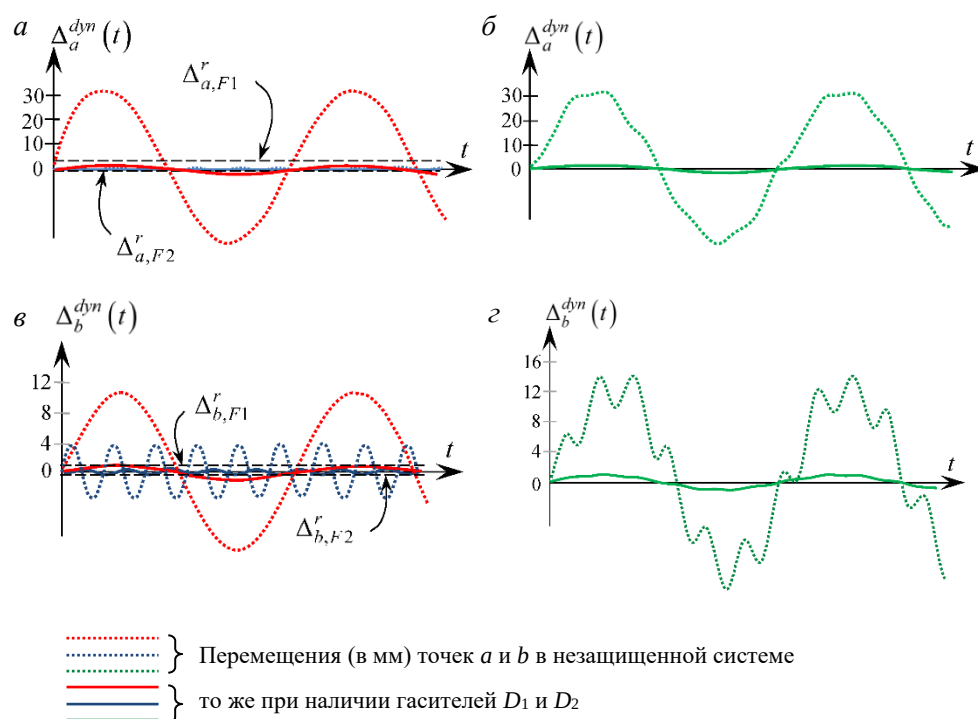


Рис. 4. Эффект гашения гармонических составляющих $F_1(t)$ и $F_2(t)$:

$a, в$ – соответственно в точках a и b отдельно по гармоникам; $б, г$ – то же при их одновременном воздействии

Fig. 4. Damping effect of harmonic components $F_1(t)$ and $F_2(t)$:

a, c – respectively at points a and b for each harmonic component separately; b, d – the same under simultaneous excitation

Оценка эффекта гашения колебаний: суммарные от $F_1(t)$ и $F_2(t)$ амплитуды перемещений точек a и b незащищенной системы – 32,30 и 14,59 мм, с гасителями – соответственно 1,30 и 0,87 мм. Коэффициенты гашения – 0,96 и 0,94 (при целевых 0,9). Перемещение точки a незащищенной системы (0,19 мм) при воздействии 2-й гармонической составляющей много меньше (почти на два порядка) перемещения расчетной точки b от 1-й гармоники. Это снижает точность выполнения требования ограничения такой малой амплитуды из-за эффекта взаимного влияния разночастотно настроенных групп гасителей колебаний (таргетированное значение – 0,02 мм, отрегулированное – 0,11 мм). Однако даже в этом случае степень гашения весьма малого перемещения получается равной 0,42. К тому же на суммарных амплитудах это отражается незначительно.

Дополнительно с использованием усовершенствованного формульного аппарата были выполнены контрольные расчеты балочной системы из работы [13] (рис. 5). Новые результаты (табл. 2) отличаются отсутствием ранее имевшихся расхождений между фактическими и исходно обусловленными значениями регулируемых перемещений.

Аналогичные результаты были получены и в ряде других рассмотренных задач, не приведенных в настоящей работе, в т. ч. для пространственной рамы.

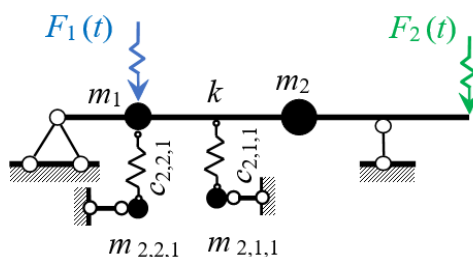


Рис. 5. Балочная система из работы [13]

Fig. 5. Beam system from [13]

Таблица 2

**Таргетируемые условия регулирования и результаты расчета
гашения колебаний тестовой модели из работы [13]**

Table 2

**Targeted regulation conditions and calculated vibration damping
for the test model from [13]**

№ подавляемой гармонической составляющей j	Амплитудное перемещение расчетной точки k от j -й гармоники в системе без гасителей, мм	Требуемое значение перемещения, указанного в столбце 2, мм	Полученные амплитуды перемещений с учетом гасителей, мм
1	2	3	4
1	13,7	3,0	3,0
2	4,9	1,4	1,4

Таким образом, полученные аналитические решения исключают необходимость использования систем дифференциальных уравнений или численных поисковых процедур при большом количестве комбинаций параметров, при этом результаты расчетов обладают достаточной для практических целей точностью.

Заключение

Разработана усовершенствованная версия метода расчета инерционно-жесткостных параметров комплекса динамических гасителей колебаний, удовлетворяющих исходным требованиям к результатам регулирования амплитудных перемещений характерных точек системы от гармонических составляющих поличастотного воздействия.

Для обеспечения эффективности гашения сформулированы рекомендации по местам размещения и составу групп ДГК с учетом количества и расположения точек регулирования перемещений, а также расчетного числа гармоник заданного воздействия.

Разработанный подход может способствовать более широкому применению методов виброзащиты в строительной практике.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Корнев, Б.Г., Резников, Л.М. Динамические гасители колебаний: Теория и технические приложения. Москва : Наука, 1988. 304 с.

2. Дукарт, А.В., Олейник, А.И. Динамические гасители колебаний конструкций. Москва : Изд-во АСВ, 2015. 248 с. ISBN 978-5-4323-0089-8.
3. Дукарт, А.В., Олейник, А.И. Об эффективности применения динамических гасителей в пуско-остановочных режимах колебаний защищаемых конструкций // Теория и практика расчета зданий, сооружений и элементов конструкций. Аналитические и численные методы : сборник докладов и тезисов Международной научно-практической конференции, посвященной 90-летию со дня рождения профессора Н.Н. Леонтьева и 110-летию со дня рождения профессора В.З. Власова, Москва, 21 июня 2017 г. / Кафедра строительной и теоретической механики (ИСА НИУ МГСУ). Москва : Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, 2017. С. 7–14. EDN: YSBGIN
4. Воронцов, Г.В., Евтушенко, С.И. К задаче математического моделирования гасителей колебаний высотных сооружений // Вестник МГСУ. 2009. № 1. С. 127–131. EDN: KYTCNH
5. Елисеев, С.В., Хоменко, А.П. Математические модели механических систем с Г-образными динамическими гасителями колебаний // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. 2011. № 5 (289). С. 30–42. EDN: OJGKPP
6. Шеин, А.И., Чуманов, А.В., Зайцев, М.Б. Три новых способа гашения колебаний зданий и сооружений // Региональная архитектура и строительство. 2024. № 3 (60). С. 81–89. DOI: 10.54734/20722958_2024_3_81. EDN: PFZZEO
7. Желиостов, Д.А., Медведева, А.А., Уздин, А.М. и др. Некоторые особенности подбора параметров двухмассовых динамических гасителей сейсмических колебаний // Природные и техногенные риски. Безопасность сооружений. 2023. № 1 (62). С. 27–31. DOI: 10.55341/rtrbs.2023.62.1.006. EDN: LUEGHZ
8. Низомов, Д.Н., Каландарбеков, И. Численное решение задач по расчету зданий с учетом динамического гасителя колебаний // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2010. Т. 53. № 6. С. 460–467. EDN: NCNFPB
9. Серов, М.В., Аверьянова, Г.М., Александрова, С.Г. Опыт применения теории колебаний к практическим вопросам применения инерционных динамических гасителей колебаний // Известия МГТУ МАМИ. 2013. Т. 3. № 1 (15). С. 118–124. EDN: QIMHTR
10. Низомов, Д.Н., Каландарбеков, И. Применение метода сосредоточенных деформаций к расчету зданий с динамическим гасителем колебаний // Известия Академии наук Республики Таджикистан. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук. 2011. № 2. С. 124–131. EDN: OIPDPJ
11. Шеин, А.И., Чуманов, А.В. Численные эксперименты по гашению колебаний вертикального стержня реактивными гасителями // Моделирование и механика конструкций. 2018. № 8. С. 2. EDN: YOFOAP
12. Себешев, В.Г., Гербер, Ю.А. Регулирование динамическими гасителями колебаний напряженно-деформированного состояния и надежности систем с сосредоточенными массами при гармонических воздействиях // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2019. № 9 (729). С. 5–18. DOI: 10.32683/0536-1052-2019-729-9-5-18. EDN: VIJWVY
13. Себешев, В.Г., Люфт, Н.А., Гербер, Ю.А. Метод расчета параметров комплексов динамических гасителей колебаний как регуляторов напряженно-деформированного состояния сооружений и конструкций при полигармонических воздействиях // Строительство и реконструкция. 2025. № 3 (119). С. 45–59. DOI: 10.33979/2073-7416-2025-119-3-45-59. EDN: OJEQIG
14. Филлин, А.П. Прикладная механика твердого деформируемого тела. Сопротивление материалов с элементами теории сплошных сред и строительной механики. Т. III. Москва : Наука. Главная редакция физ.-мат. литературы, 1981. 480 с.
15. Buchholdt, H.A., Moussavi Nejad, S.E. Structural Dynamics for Engineers. London : ICE Publishing, 2012. 318 p. <https://doi.org/10.1680/sde.41769>
16. Люфт, Н.А., Себешев, В.Г., Гербер, Ю.А. Анализ эффектов идеализации и уточнение расчетных моделей в задачах динамики стержневых систем // Труды Новосибирского государственного архитектурно-строительного университета (Сибстрин). 2024. Т. 27. № 4 (94). С. 35–60. DOI: 10.32683/1815-5987-2024-27-94-4-35-60. EDN: GGMEME
17. Ли, Мин. Демпфирование резонансных колебаний гироскопических систем активным динамическим гасителем : специальность 05.11.03 : диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук / Ли Мин. Москва, 2008. 159 с.

REFERENCES

1. Korenev, B.G., Reznikov, L.M. Dynamic Dampers of Vibrations: Theory and Engineering Applications. Moscow: Nauka, 1988. 304 p. (In Russian)
2. Dukart, A.V., Oleinik, A.I. Dynamic Vibration Dampers of Structures. Moscow: ASV. 2015. 248 p. (In Russian)
3. Dukart, A.V., Oleinik, A.I. Effective Use of Dynamic Dampers in Start-stop Oscillation Modes of Protected Structures. In: *Proc. Int. Sci. Conf. 'Theory and Practice of Structural Analysis of Buildings and Structural Elements. Analytical and Numerical Methods'*, June 21, 2017. Moscow. 2017. Pp. 7–14. (In Russian)
4. Vorontsov, G.V., Evtushenko, S.I. Mathematical Modeling of Vibration Dampers for High-rise Buildings. *Vestnik MGSU*. 2009; (1): 127–131. EDN: KYTCHH (In Russian)
5. Eliseev, S.V., Khomenko, A.P. Mathematical Models of Mechanical Systems with L-shaped Dynamic Vibration Dampers. *Fundamental'nye i prikladnye problemy tekhniki i tekhnologii*. 2011; 5(289): 30–42. (In Russian)
6. Shein, A.I., Chumanov, A.V., Zaitsev, M.B. Three New Methods of Damping Vibrations of Buildings. *Regional'naya arkhitektura i stroitel'stvo*. 2024; 3(60): 81–89. DOI: 10.54734/20722958_2024_3_81. EDN: PFZZEO (In Russian)
7. Zheliostov, D.A., Medvedeva, A.A., Uzdin, A.M., et al. Parameter Selection of Two-mass Dynamic Dampers of Seismic Vibrations. *Prirodnye i tekhnogennye riski. Bezopasnost' sooruzhenii*. 2023; 1(62): 27–31. (In Russian)
8. Nizomov, D.N., Kalandarbekov, I. Numerical Solution of Problems in Building Analysis with Regard to Dynamic Vibration Damper. *Reports of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan*. 2010; 53(6): 460–467. (In Russian)
9. Serov, M.V., Averyanova, G.M., Aleksandrova, S.G. Experience in Applying Oscillation Theory to Practical Use of Inertial Dynamic Vibration Dampers. *Izvestia MGTU MAMI*. 2013; 3(1): 118–124. (In Russian)
10. Nizomov, D.N., Kalandarbekov, I. Application of Concentrated Strain Method to Building Analysis with Dynamic Vibration Damper. *Izvestiya Akademii nauk Respubliki Tadzhikistan. Otdelenie fiziko-matematicheskikh, khimicheskikh, geologicheskikh i tekhnicheskikh nauk*. 2011; (2): 124–131. EDN: OIPDPJ (In Russian)
11. Shein, A.I., Chumanov, A.V. Numerical Experiments on Damping Vibrations of a Vertical Rod Using Reactive Dampers. *Modelirovanie i mekhanika konstruksii*. 2018; (8): 2. EDN: YOFOAP (In Russian)
12. Sebeshev, V.G., Gerber, Yu.A. Stress-strain State and Reliability of Systems with Concentrated Masses Controlled by Dynamic Dampers under Harmonic Vibrations. *Izvestia vuzov. Stroitel'stvo*. 2019; (9): 5–18. (In Russian)
13. Sebeshev, V.G., Lyuft, N.A., Gerber, Yu.A. Parameter Calculation of Dynamic Vibration Dampers as Stress-strain State Control under Polyharmonic Vibrations. *Stroitel'stvo i rekonstruktsiya*. 2025; 3(1190): 45–59. DOI: 10.33979/2073-7416-2025-119-3-45-59. EDN: OJEQIG (In Russian)
14. Filin, A.P. Applied Mechanics of Deformable Solids. Strength of Materials with Elements of Continuum Theory and Structural Mechanics, Vol. 3. Moscow: Nauka. 1981. 480 p. (In Russian)
15. Buchholdt, H.A., Moussavi Nejad, S.E. Structural Dynamics for Engineers. London: ICE Publishing. 2012. 318 p.
16. Lyuft N.A., Sebeshev V.G., Gerber Yu.A. Analysis of Idealization Effects and Refinement of Computational Models in Problems of Rod System Dynamics. *Trudy NGASU*. 20; 27(4): 35–60. (In Russian)
17. Li, Min. Development of Computational and Experimental Methods for Reducing Dynamic Loads and Improving the Durability of Hydromechanical Transmissions in Transport Vehicles. DSc Abstract. Moscow. 2008. 159 p. (In Russian)

Сведения об авторах

Себешев Владимир Григорьевич, канд. техн. наук, профессор, почетный член РААСН, Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет (Сибстрин), 630008, г. Новосибирск, ул. Ленинградская, 113, sebeshev@sibstrin.ru

Люфт Никита Андреевич, аспирант, Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет (Сибстрин), 630008, г. Новосибирск, ул. Ленинградская, 113, n.lyuft@sibstrin.ru

Authors Details

Vladimir G. Sebeshev, PhD, Professor, Honorary Member RAACS, Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering, 113, Leningradskaya Str., 630008, Novosibirsk, Russia, sebeshev@sibstrin.ru

Nikita A. Lyuft, Research Assistant, Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering, 113, Leningradskaya Str., 630008, Novosibirsk, Russia, n.lyuft@sibstrin.ru

Вклад авторов

Все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.
Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Authors contributions

The authors contributed equally to this article.
The authors declare no conflicts of interests.

Статья поступила в редакцию 13.05.2026
Одобрена после рецензирования 08.07.2026
Принята к публикации 06.08.2026

Submitted for publication 13.05.2026
Approved after review 08.07.2026
Accepted for publication 06.08.2026