

СТРОИТЕЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ, ЗДАНИЯ И СООРУЖЕНИЯ

УДК 539.3

*БАРАШКОВ ВЛАДИМИР НИКОЛАЕВИЧ, докт. физ.-мат. наук,
ст. научный сотрудник, профессор,
v.n.bar@mail.ru
Томский государственный архитектурно-строительный университет,
634003, г. Томск, пл. Соляная, 2*

ВАРИАЦИОННО-РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТРЕУГОЛЬНЫХ И ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНЫХ ЯЧЕЕК

Рассматриваются способы дискретизации исследуемых областей при численном анализе осесимметричного квазистатического напряжённо-деформированного состояния тел вращения с помощью вариационного принципа Лагранжа. Геометрические соотношения берутся в форме уравнений Коши, физические соотношения описываются деформационной теорией пластичности А.А. Ильюшина. Используется метод упругих решений.

На примере треугольных и четырёхугольных ячеек исследуется влияние формы многоугольников, аппроксимирующих исследуемую область, на решение задачи. Отмечается достаточно хорошее совпадение результатов вычислений.

Ключевые слова: теория упругости и пластичности; тело вращения; перемещения; деформации; напряжения; вариационный принцип Лагранжа; дискретизация; треугольные и четырёхугольные ячейки; решение системы линейных алгебраических уравнений.

*VLADIMIR N. BARASHKOV, DSc, Professor,
v.n.bar@mail.ru
Tomsk State University of Architecture and Building,
2, Solyanaya Sq., 634003, Tomsk, Russia*

VARIATION-DIFFERENCE ANALYSIS OF ELASTOPLASTIC DEFORMATION OF ROTATION BODIES USING TRIANGULAR AND TETRAGONAL CELLS

The paper deals with discrete sampling methods used in numerical analysis of axisymmetric quasi-static stress-strain state of rotation bodies using the Lagrange principle. The geometrical correlations are used in the form of Cauchy equations, physical relationships are described by Ilyushin's deformation plasticity theory. A method of linear approximation is used.

The paper gives examples of triangular and tetragonal cells to investigate the influence of polygonal shapes approximating the investigated area on the problem solution. The simulation results match the calculations.

Keywords: theory of elasticity and plasticity; rotation body; displacement; deformation; stress; Lagrange principle; discrete sampling; triangular and tetragonal cells; solution of linear algebraic equations.

Толстостенные оболочки и тела вращения являются конструктивными элементами многих механизмов, различных машин и изделий, сосудов давления, толстостенных труб и др.

Анализ напряжённо-деформированного состояния (НДС) является обязательным этапом проектирования конструкции. Поэтому создание методик расчёта НДС тела, возникающего на упругой и упругопластической стадии его деформирования, является актуальным.

Для решения используется вариационно-разностный метод (ВРМ), представляющий собой реализацию вариационного принципа Лагранжа с использованием метода конечных разностей. Задача об упругопластическом НДС тела вращения решается с применением соотношений деформационной теории пластичности А.А. Ильюшина и метода упругих решений. Используется цилиндрическая система координат r, θ, z . Применение ВРМ сводит задачу к решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно радиальных u и осевых w компонент вектора перемещений в узлах конечно-разностной сетки. Решение полученной системы уравнений проводится методом исключения Гаусса.

В работе [1] достаточно подробно изложен алгоритм расчёта осесимметричного НДС тела вращения, который неоднократно был протестирован на примерах решения упругих и упругопластических задач. С помощью созданного варианта ВРМ был решён целый ряд статических и квазистатических упругопластических задач для неоднородных тел вращения в двумерной и трёхмерной постановках. Более обоснованные оценки применимости ВРМ и получаемых результатов следует делать на основе сопоставления результатов расчётов с экспериментальными измерениями тех или иных параметров НДС конструкций при нагружении. Эти оценки включают в себя оценку самой модели и правильности её реализации.

Были проведены эксперименты на точёных дюралюминиевых цилиндрических оболочках при действии статической осевой сжимающей силы F . Размеры оболочки следующие: длина 10,05 см, внешний радиус 2,965 см, толщина 0,225 см. Нагрузка создавалась с помощью пресса при медленном движении пуансона. Осевые и окружные деформации измерялись тензодатчиками и регистрировались посредством цифровой тензометрической станции «Искра-108Д». Датчики наклеивались по окружности через 90° , а за экспериментально полученные величины принимались их средние значения.

На рис. 1 представлены расчётные зависимости окружных ε_θ и осевых ε_z деформаций рассматриваемой оболочки для осевой координаты $z = L/2$ (L – длина оболочки) от величины силы F . Крестиками обозначены результаты экспериментальных исследований. Вид кривых показывает, что материал

при достижении определенного значения сжимающей силы F начинает работать в упругопластической области. Из представленных результатов можно сделать вывод о достаточно хорошем согласовании результатов как в случае упругого, так и упругопластического деформирования материала.

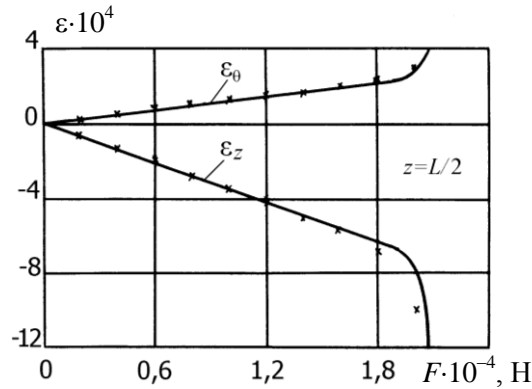


Рис. 1. Результаты эксперимента и численного расчёта цилиндрической оболочки. На оси абсцисс откладывается величина сжимающей силы F

Проводилось сравнение результатов, полученных ВРМ и аналитическим решением по формулам безмоментной теории оболочек для случая упругого деформирования материала. Разница между радиальными перемещениями срединной поверхности u для осевой координаты $z = L/2$ и осевыми перемещениями w верхнего торца $z = L$ для силы $F = 9800$ Н составляет 0,3 и 3,0 % соответственно. Аналитическое решение даёт значение окружной деформации $\varepsilon_\theta = 1,250 \cdot 10^{-4}$, а численное решение – величину $1,241 \cdot 10^{-4}$, т. е. разница составляет 0,73 %. Погрешность выполнения статических граничных условий на торце, где приложена сжимающая сила F , равна 0,1 %.

Для проведения анализа применения трех- и четырёхугольных ячеек для аппроксимации производных от перемещений по координатам для реализации осесимметричного упругопластического НДС было рассмотрено тело вращения (рис. 2).

Срединная поверхность конструкции представляет собою цилиндр, переходящий в эллипсоид вращения. Использование неинерциальной системы координат приводит к необходимости введения дополнительных массовых сил инерции с интенсивностью N . К верхнему торцу $z = L$ конструкции приложена поверхностная нагрузка интенсивностью P , являющаяся следствием действия насаждающей на конструкцию некоторой массы. Нижний торец $z = 0$ оболочки соединён с недеформируемым днищем.

На торцах оболочки задаются следующие граничные условия:

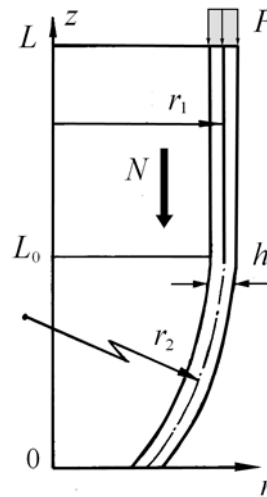


Рис. 2. Расчётная схема тела вращения

$$z=0, \quad u(r,0) = w(r,0) = 0;$$

$$z=L, \quad u(r,L) = 0, \quad \sigma_z(r,L) = P.$$

Физико-механические характеристики материала и геометрические размеры стальной оболочки берутся следующими: модуль упругости при растяжении-сжатии (модуль Юнга) $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; модуль упрочнения $E_1 = 2 \cdot 10^4$ МПа; коэффициент поперечной деформации (коэффициент Пуассона) $\nu = 0,3$; деформация начала текучести $\varepsilon_T = 0,003$; длина конструкции $L = 17,5$ см; длина оживальной части $L_0 = 11,0$ см; толщина оболочки $h = 0,2$ см; радиус цилиндрической части $r_1 = 3,45$ см; радиус оживальной части $r_2 = 49,0$ см.

Для реализации задачи была выбрана сетка размером (7×50) , т. е. семь узлов по координате r и 50 узлов по координате z . Система примерно 700 линейных алгебраических уравнений относительно искомых перемещений узлов сетки решалась методом Гаусса. Дискретизация расчётной области проводится с помощью четырёхугольных (рис. 3, а) и треугольных (рис. 3, б) ячеек.

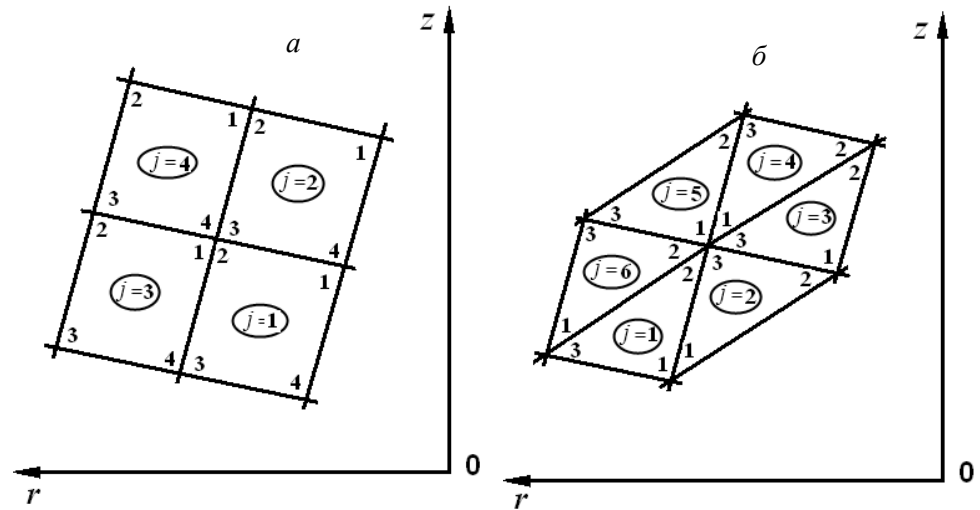


Рис. 3. Шаблоны для дискретизации расчётной области:
а – четырёхугольными; б – треугольными ячейками

Значения производных от искомых функций перемещений u , w в четырёхугольной ячейке с номером j представляются конечно-разностными соотношениями [2], которые на случай осесимметричного деформирования тела вращения приводятся к виду:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_j \approx \frac{(u_2 - u_4)(z_1 - z_3) + (u_1 - u_3)(z_4 - z_2)}{F_j},$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_j \approx \frac{(u_2 - u_4)(r_3 - r_1) + (u_1 - u_3)(r_2 - r_4)}{F_j},$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)_j \approx \frac{(w_2 - w_4)(z_1 - z_3) + (w_1 - w_3)(z_4 - z_2)}{F_j},$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_j \approx \frac{(w_2 - w_4)(r_3 - r_1) + (w_1 - w_3)(r_2 - r_4)}{F_j},$$

$$F_j = (r_3 - r_1)(z_2 - z_4) + (r_2 - r_4)(z_1 - z_3).$$

Для треугольных ячеек имеют место следующие выражения для производных:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_j = \frac{1}{F_j} [u_1(z_3 - z_2) + u_2(z_1 - z_3) + u_3(z_2 - z_1)],$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_j = \frac{1}{F_j} [u_1(r_2 - r_3) + u_2(r_3 - r_1) + u_3(r_1 - r_2)],$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)_j = \frac{1}{F_j} [w_1(z_3 - z_2) + w_2(z_1 - z_3) + w_3(z_2 - z_1)],$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_j = \frac{1}{F_j} [w_1(r_2 - r_3) + w_2(r_3 - r_1) + w_3(r_1 - r_2)],$$

$$F_j = r_1(z_3 - z_2) + r_2(z_1 - z_3) + r_3(z_2 - z_1).$$

В этих соотношениях везде величина F_j представляет собой удвоенную площадь ячейки с номером j .

Сравнение результатов, полученных на треугольной и четырёхугольной сетках, показывает достаточно хорошее совпадение величин параметров НДС. На рис. 4 представлено распределение радиальных перемещений u срединной поверхности конструкции по длине для $N = 2000$ и $P = 369$ МПа при аппроксимации расчётной области четырёхугольными (пунктирная кривая 1) и треугольными (сплошная кривая 2) ячейками. Наибольшие радиальные перемещения различаются между собой для обеих сеток на 1 %. Такая же разница имеет место для осевых перемещений торца оболочки $z = L$, к которому приложена поверхностная нагрузка P . У торца $z = 0$ образуется зона упруго-пластических деформаций, где материал работает за пределами упругости. Следует отметить, что перемещения, получаемые при использовании треугольных ячеек, меньше соответствующих перемещений, полученных с использованием четырёхугольных ячеек.

Согласно ВРМ статические граничные условия на торце $z = L$ выполняются автоматически в процессе минимизации функционала полной потенциальной энергии системы. Погрешность их выполнения для обоих случаев аппроксимации производных составляет примерно 0,2 %. Имеет место точное выполнение теоремы Клапейрона и соотношения баланса энергии.

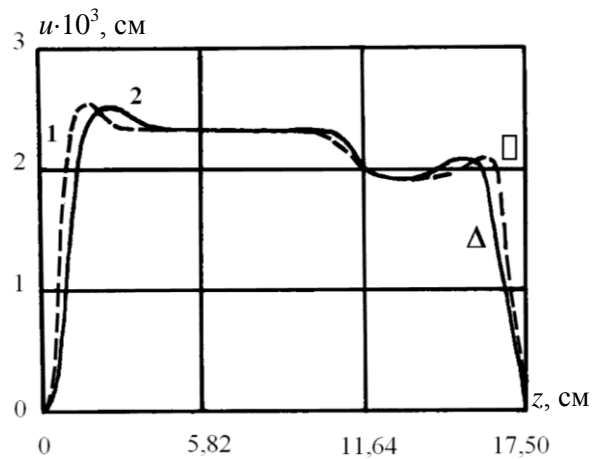


Рис. 4. Распределение радиальных перемещений u срединной поверхности конструкции

Известно, что вариационно-разностный метод приводит к решению системы линейных алгебраических уравнений, матрица коэффициентов которой имеет ленточную структуру. Использование треугольных ячеек уменьшает ширину ленты на два элемента по сравнению с четырехугольными ячейками. Размер матрицы коэффициентов сокращается примерно на 11 %, что очень важно при реализации системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса. Решение систем в несколько десятков или сотен тысяч уравнений приводит к значительной экономии памяти ЭВМ. Но использование треугольных ячеек естественным образом уменьшает число степеней свободы, делает конструкцию более жёсткой, несколько занижает действительные величины параметров напряжённо-деформированного состояния. Тем не менее, использование обоих типов ячеек может служить одним из способов проверки правильности алгоритма. Что касается времени реализации задачи на треугольной сетке, то оно примерно такое же, что и на четырёхугольной сетке.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Барашков, В.Н. Расчёт напряжённо-деформированного состояния толстых плит вариационно-разностным методом при действии разнонаправленных внешних нагрузок / В.Н. Барашков // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. – 2016. – № 4. – С. 67–80.
2. Нох, В.Ф. СЭЛ – совместный эйлерово-лагранжев метод для расчета нестационарных двумерных задач / В.Ф. Нох // Вычислительные методы в гидродинамике : сб. статей. – М. : Мир, 1967. – С. 128–184.

REFERENCES

1. Barashkov V.N. Raschet napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya tolstykh plit variatsionno-raznostnym metodom pri deistvii raznonapravlennykh vneshnikh nagruzok [Stress-strain state analysis of thick plates under multidirectional external loads using variable differential method]. *Vestnik of Tomsk State University of Architecture and Building*. 2016. No. 4. Pp. 67–80. (rus)
2. Noh V.F. SEL – sovmestnyi eilerovo-lagranzhev metod dlya rascheta nestatsionarnykh dvumernykh zadach [Mixed Eulerian-Lagrangian method for nonstationary two-dimensional problems]. Moscow: Mir Publ., 1967. Pp. 128–184. (transl. from Engl.)