

СТРОИТЕЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ, ЗДАНИЯ И СООРУЖЕНИЯ

BUILDING AND CONSTRUCTION

Вестник Томского государственного
архитектурно-строительного университета.
2026. Т. 28. № 1. С. 148–168.

ISSN 1607-1859 (для печатной версии)
ISSN 2310-0044 (для электронной версии)

Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo
arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta –
Journal of Construction and Architecture.
2026; 28 (1): 148–168.
Print ISSN 1607-1859
Online ISSN 2310-0044

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

УДК 624.072.221

DOI: 10.31675/1607-1859-2026-28-1-148-168

EDN: MLFZVL

ТРЕЩИНОСТОЙКОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ИЗГИБАЕМЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ НА ОСНОВЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ДЕФОРМАЦИОННОЙ МОДЕЛИ

Эрес Кечил-оолович Опбул^{1,3}, Гурий Николаевич Ширунов²,
Анай-Хаак Бугалдаевна Калдар-оол³, Светлана Сергеевна Саая³

¹Петербургский государственный университет путей сообщения
Императора Александра I, г. Санкт-Петербург, Россия

²Военный институт (инженерно-технический) Военной академии
материально-технического обеспечения
имени генерала армии А.В. Хрулева, г. Санкт-Петербург, Россия

³Тувинский государственный университет, г. Кызыл, Россия

Аннотация. Актуальность. Деформационный метод расчета конструкций признается более точным и достоверным, поскольку базируется на опытных диаграммах деформирования материалов (бетон и арматура). При этом в практике проектирования пока отсутствуют развернутые примеры расчета трещиностойкости и жесткости изгибаемых железобетонных элементов с применением деформационной модели – несмотря на ее удобство и возможность быстрого получения результатов посредством итерационных процедур.

Цель. Выполнить практический деформационный расчет трещиностойкости и жесткости изгибаемого железобетонного элемента (вторая группа предельных состояний), используя расчетные параметры, полученные из расчета деформационной прочности конструкции (первая группа предельных состояний).

Методы. Исследование опирается на исходные данные и расчетные параметры, полученные при расчете прочности. Методика включает следующие этапы: определение момента трещинообразования путем суммирования внутренних усилий, возникающих от нормальных напряжений в каждом малом участке; вычисление базового расстояния между смежными трещинами с учетом площади растянутой зоны сечения в предельном состоянии; расчет ширины раскрытия трещин в зависимости от напряжений в растянутой

арматуре; определение прогиба элемента с учетом максимальной кривизны, вычисленной с применением модуля деформаций.

В работе приведены принятые допущения и предпосылки, а также теоретические формулы с учетом расчетных предельных деформаций и напряжений (в том числе модулей деформаций).

Результаты. Выполнен практический пример расчета и проведен сравнительный анализ с подсчетом процентного расхождения результатов между деформационным и нормативным (по предельным состояниям) методами. Сформулированы выводы исследования. Новизна работы заключается в разработке алгоритма практического расчета трещиностойкости и жесткости изгибаемого элемента на основе деформационной модели расчета конструкций.

Ключевые слова: деформационная модель, нелинейный расчет, деформации, напряжения, трещиностойкость, жесткость, прогиб, бетон, арматура

Для цитирования: Опбул Э.К., Ширунов Г.Н., Калдар-оол А.-Х.Б., Саая С.С. Трещиностойкость и жесткость изгибаемых железобетонных конструкций на основе нелинейной деформационной модели // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. 2026. Т. 28. № 1. С. 148–168. DOI: 10.31675/1607-1859-2026-28-1-148-168. EDN: MLFZVL

ORIGINAL ARTICLE

CRACK RESISTANCE AND RIGIDITY OF BENDING REINFORCED CONCRETE STRUCTURES BASED ON A NONLINEAR DEFORMATION MODEL

Eres K. Opbul^{1,3}, Gury N. Shirunov²,
Anai-Khaak B. Kaldar-ool³, Svetlana S. Saaya³

¹Emperor Alexander I St. Petersburg State Transport University,
Saint-Petersburg, Russia

²Military Engineering Institute of the Military Logistics Academy,
Saint-Petersburg, Russia

³Tuvan State University, Kyzyl, Russia

Abstract. The deformation method for the structural analysis is recognized as more accurate and reliable, as it is based on experimental deformation diagrams of materials (concrete and reinforcement). However, in practice, there are still no detailed examples of calculating the crack resistance and rigidity of bending reinforced concrete elements using a deformation model, despite its convenience and the ability to quickly obtain results through iterative procedures.

Purpose: The aim is to calculate deformation of crack resistance and rigidity of bending reinforced concrete elements (service limit state), using design parameters obtained from calculating the deformation strength of the structure (ultimate limit state).

Methodology: The study is based on initial data and design parameters obtained in the strength calculation. The methodology includes the following steps: determination of the crack formation moment by summing internal forces, arising from normal stresses in each small section; calculation of the distance between adjacent cracks, taking into account the tensile zone in the limit state; calculation of the crack opening width depending on stresses in tensile reinforcement. Determination of the element deflection taking into account the maximum curvature calculated using the deformation modulus.

The paper also presents the adopted assumptions and prerequisites, theoretical formulas with respect to calculated ultimate strains and stresses (including the strain modulus).

Research findings: A practical calculation example was performed, and a comparative analysis was conducted, calculating the percentage difference in between the deformation and standard (limit state) methods.

Value: The novelty of the paper lies in the algorithm development for practical calculation of the crack resistance and rigidity of bending element based on the deformation model for the structural analysis.

Keywords: deformation model, nonlinear calculation, strain, stress, crack resistance, rigidity, deflection, concrete, reinforcement

For citation: Opbul E.K., Shirunov G.N., Kaldar-ool A.-Kh.B., Saaya S.S. Crack Resistance and Rigidity of Bending Reinforced Concrete Structures Based on a Non-linear Deformation Model. Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta – Journal of Construction and Architecture. 2026; 28 (1): 148–168. DOI: 10.31675/1607-1859-2026-28-1-148-168. EDN: MLFZVL

Введение

Объектом исследования является изгибающий железобетонный элемент, нагруженный равномерно распределенной нагрузкой.

Цель исследования – выполнить практический расчет трещиностойкости и жесткости изгибаемого железобетонного элемента (вторая группа предельных состояний) в зависимости от расчетных параметров, предварительно вычисленных по деформационной модели расчета прочности (первая группа предельных состояний) [1].

Актуальность работы. Деформационный метод расчета конструкций производится с применением двухлинейной или трехлинейной диаграмм деформирования материалов, полученных опытным путем, в связи с этим они могут более точно и подробно описывать изменения, происходящие в бетоне и арматуре конструкции под действием внешней нагрузки.

В настоящее время фактически отсутствуют работы, посвященные практическому расчету трещиностойкости и жесткости конструкций с применением нелинейной деформационной модели. Очевидно, что определение предельных внутренних усилий трещинообразования и деформаций, основанное на деформационной модели, может наиболее близко соответствовать фактическим показателям.

Новизной работы является создание алгоритма практического расчета трещиностойкости и жесткости изгибаемого элемента, основанного на деформационной модели расчета прочности.

Предлагаемый деформационный расчет трещиностойкости и жесткости изгибаемого элемента основан на исходных данных и расчетных параметрах, вычисленных в расчете прочности [1], и состоит из следующих пунктов:

- момент образования трещин M_{crc}^{defor} определяется суммированием внутренних усилий по формуле (1), возникающих от нормальных напряжений в каждом малом участке или слое;

- базовое расстояние между смежными трещинами l_s^{defor} определяется по формуле (2) с учетом площади растянутой зоны сечения A_{bt}^{defor} в предельном состоянии;

– ширина раскрытия трещин a_{crc}^{defor} определяется по формуле (3) в зависимости от напряжений в растянутой арматуре при достижении максимальной величины кривизны элемента. Коэффициент, учитывающий неравномерность деформаций между трещинами в предлагаемом методе, ψ_s^{defor} определяется с учетом момента образования трещин M_{crc}^{defor} и несущей способности элемента M^{defor} по формуле (4), величина M^{defor} определяется на основе нашей прошлой статьи [1];

– прогиб элемента по деформационному методу определяется по формуле (6), где кривизна элемента находится по формуле (5) с учетом M^{defor} , численного в [1], и модуля деформаций E_b' .

Практические расчеты прочности по деформационной модели, применительно для изгибаемых железобетонных и фиброжелезобетонных элементов, выполненные авторами, были реализованы в ряде работ [1–4], где контролируемые критериями были приняты предельные деформации материалов [5, 6] сжатой ($\varepsilon_b = 3,5 \cdot 10^{-3}$) и растянутой ($\varepsilon_s = 0,025$) зон нормального сечения.

Общеизвестно [5–12], что расчеты по трещиностойкости и жесткости несущих конструкций выполняют, чтобы предотвратить наступление второго предельного состояния, при котором конструкции теряют свои эксплуатационные качества вследствие чрезмерных прогибов или чрезмерного раскрытия трещин.

Известны работы, посвященные аналитическим и численным расчетам изгибаемых железобетонных элементов [13–38], где рассматриваются актуальные вопросы по безопасному и оптимальному проектированию несущих конструкций, а также возможность применения композитной арматуры из полимеров, комбинированных элементов из нескольких материалов (ламинированной фанеры, фибробетона, стали). Среди них можно выделить работы, где получены прочные и легкие конструкционные материалы, армированные различными синтетическими полимерами, в том числе на основе коррозионно-стойкой нержавеющей стали. В работах [37, 38] на принципах нелинейного деформирования материалов отмечается влияние нелинейных свойств бетона и арматуры на точность при численном расчете прогибов железобетонных балок.

Ниже приводятся теоретические исследования только для деформационной модели расчета, а в разделе с результатами представлено сравнение результатов расчетов предлагаемого деформационного метода с уже известными нормативными методами.

1. Методы исследования

Расчет момента образования трещин, базового расстояния между трещинами, ширины раскрытия трещин, в том числе прогиба элемента по деформационной модели, производится при наличии следующих расчетных параметров, которые должны быть известны из расчета прочности, в данном случае они принимаются из работы [1]:

i – порядковый номер слоя или стержневой продольной арматуры;

j – порядковый номер итерации;

$\Delta_{bi}, y_{bi}, b_{bi}, A_{bi}$ – высота i -го слоя, расстояние от крайнего волокна нижней растянутой зоны до центра тяжести i -го слоя, ширина и площадь i -го слоя бетона соответственно;

E_b, E'_{bi} – модуль упругости и модуль деформаций бетона соответственно;

$y_{si}, A_{si}, E_s, E'_{si}$ – расстояние от крайнего волокна нижней растянутой зоны до центра тяжести i -го слоя, площадь, модуль упругости и модуль деформаций i -й арматуры соответственно;

y_t – положение нейтральной линии в сечении в упругой стадии работы, обозначаемое как « $N.L.$ »;

$y_{0,j}$ – положение нейтральной линии « $N.L.$ » в сечении в предельной стадии работы элемента;

y'_{bi} – расстояние от нейтральной линии « $N.L.$ » до центра тяжести i -го слоя (плечо пары сил);

ε_{s2} и σ_{s2} – максимальные деформации и напряжения в арматуре растянутой зоны, соответствующие напряженно-деформированному состоянию, при котором достигается максимальная величина кривизны элемента;

$M^n; M^{defor}$ – нормативная и деформационная прочности ригеля соответственно.

Перечисленные расчетные параметры представлены в разделе с результатами в табл. 1, 2 и на рис. 1, 2, где i – порядковый номер слоя; Δ_{bi} – высота слоев; y_{bi} – расстояние от края растянутой зоны до центра тяжести i -го слоя; b_{bi} – ширина i -го слоя бетона; A_{bi} – площадь сечения i -го слоя бетона; E'_{bi} – модуль упругости (деформации) i -го слоя бетона; y_{si} – расстояние от края растянутой зоны до центра тяжести i -й арматуры; A_{si} – площадь сечения i -й арматуры; E'_{si} – модуль упругости (деформации) i -й арматуры; y_{0j} – расстояние от края растянутой зоны до нейтральной линии; y'_{bi} – расстояние от нейтральной линии до центра тяжести i -го слоя бетона; y'_{si} – расстояние от нейтральной линии до центра тяжести.

1.1. Деформационный момент образования трещин (M_{crc}^{defor})

Принимаются следующие допущения и предпосылки:

– справедлива гипотеза плоских сечений, нормальное сечение элемента плоское до изгиба и остается плоским после изгиба;

– эпюры деформаций и напряжений имеют треугольные формы, наличие неупругих деформаций учитывается умножением на коэффициент $\gamma = 1,25$;

– крайние деформация и напряжение растянутой зоны сечения при двухлинейной диаграмме деформирования бетона равны: $\varepsilon_{bt,extreme} = \varepsilon_{bt1,red} = 8 \cdot 10^{-5}$, $\sigma_{b,extreme} = R_{bt,ser}$;

– нейтральная линия ($N.L.$) перед образованием первых трещин проходит через центр тяжести (y_t) поперечного сечения.

Для определения момента появления первых трещин в ригеле по деформационной модели (M_{crc}^{defor}) учитывается сопротивление усилий всего нормального сечения бетона, т. е. сопротивление бетона растянутой и сжатой зон. Формула для M_{crc}^{defor} имеет следующий вид:

$$M_{crc}^{defor} = \sum |\sigma_{bi}| A_{bi} \cdot y'_{bi}, \quad (1)$$

где $|\sigma_{bi}| = \varepsilon_{bi} \cdot E'_{bi}$ – величина средних напряжений в i -м слое нормального сечения бетона по модулю при $\varepsilon_{bt, extreme} = \varepsilon_{bt1, red} = 8 \cdot 10^{-5}$, $\sigma_{b, extreme} = R_{bt, ser}$ в зависимости от y_t , и может быть определена геометрически по признакам «подобия треугольников» (см. рис. 3, табл. 3); $A_{bi} = b_{bi} \cdot \Delta_{bi}$ – площадь сечения i -го слоя нормального сечения бетона (см. табл. 2); $y'_{bi} = y_{0j} - y_{bi}$ – расстояние от нейтральной линии до центра тяжести i -го слоя бетона (см. табл. 2).

1.2. Деформационный метод определения расстояния между смежными трещинами

По деформационному методу базовое расстояние между смежными трещинами определяется с учетом площади растянутой зоны сечения в предельном состоянии по формуле

$$l_s^{defor} = 0,5 \frac{A_{bt}^{defor}}{A_s} d_s. \quad (2)$$

Площадь растянутой зоны в предельном состоянии равна

$$A_{bt}^{defor} = b \cdot y_t,$$

где A_s , d_s – площадь сечения и диаметр арматуры соответственно; b – ширина элемента.

1.3. Деформационный метод определения ширины раскрытия трещин (a_{crc}^{defor})

Определение a_{crc}^{defor} в зависимости от напряжений в растянутой арматуре – по формуле

$$a_{crc}^{defor} = \varphi_1 \cdot \varphi_2 \cdot \varphi_3 \cdot \psi_s^{defor} \frac{\sigma_s^{defor}}{E_s} l_s^{defor}, \quad (3)$$

где ψ_s – коэффициент, учитывающий неравномерное распределение относительных деформаций растянутой арматуры между трещинами; $\varphi_1 = 1$ – при непрерывном действии нагрузки [5, 6]; $\varphi_2 = 0,5$ – для арматуры периодического профиля [5, 6]; $\varphi_3 = 1$ – для элементов изгибаемых [5, 6]; σ_s^{defor} – напряжение в растянутой арматуре при достижении максимальной величины кривизны элемента из [1, табл. 2].

Коэффициент ψ_s определяется с учетом M_{crc}^{defor} и несущей способности элемента M^{defor} , полученного из работы [1] по формуле

$$\psi_s^{defor} = 1 - 0,8 \frac{M_{crc}^{defor}}{M^{defor}}. \quad (4)$$

1.4. Деформационный метод определения прогиба элемента

Для определения кривизны изгибаемого железобетонного элемента используется общеизвестная формула (5), при этом в ней учитываются расчетные параметры из деформационной модели в [1], т. е. прочность M^{defor} и жесткость $E'_b \cdot I_{red}$ элемента, выраженные с учетом модулей деформаций:

$$\left(\frac{1}{r}\right)_{\max}^{defor} = \frac{M^{defor}}{E'_b \cdot I_{red}}, \quad (5)$$

где M^{defor} – деформационная прочность элемента; E'_b – модуль деформаций из [1, табл. 2].

Прогиб элемента по деформационному методу определяется по формуле

$$f^{defor} = \frac{5}{48} l^2 \left(\frac{1}{r}\right)_{\max}^{defor}. \quad (6)$$

2. Результаты и обсуждение

Типовой ригель РДП 4.56-90 имеет следующие расчетные и геометрические характеристики. Класс бетона В40: $\alpha = \frac{2 \cdot 10^5}{36000} = 5,55$, $R_{bt,n} = R_{bt,ser} = 2,1$ МПа, $E_b = 36000$ МПа. Продольная арматура класса А400 (А-III): $R_{s,n} = R_{s,ser} = 400$ МПа, $E_s = 2 \cdot 10^5$ МПа.

На рис. 1 представлены армирование и поперечное сечение ригеля с геометрическими размерами $b \times h \times l = 570 \times 450 \times 54\,000$ мм, на рис. 2 – разбивка поперечного сечения на малые участки (слои), где имеются тринадцать слоев, нумерация начинается с нижней зоны поперечного сечения.

Из работы [1] принимаются следующие расчетные параметры, их численные значения приводятся на рис. 2 и табл. 1, 2:

Δ_{bi} , y_{bi} , b_{bi} , A_{bi} – высота i -го слоя, расстояние от крайнего волокна нижней растянутой зоны до центра тяжести i -го слоя, ширина и площадь i -го слоя бетона соответственно;

y_{si} , A_{si} , E_s , E'_{si} – расстояние от крайнего волокна нижней растянутой зоны до центра тяжести i -го слоя, площадь, модуль упругости и модуль деформаций i -й арматуры соответственно;

$y_t = y_{0,j} = y_{0,1} = 18,01$ см – положение нейтральной линии в сечении в упругой стадии работы, обозначаемое как « $N.L.$ »;

$y_{0,j} = y_{0,11} = 21,09$ см – положение нейтральной линии « $N.L.$ » в сечении в предельной стадии работы элемента;

y'_{bi} – расстояние от нейтральной линии «*N.L.*» до центра тяжести *i*-го слоя (плечо пары сил);

$\varepsilon_{s2} = 2,07 \cdot 10^{-3}$ и $\sigma_{s2} = 355$ МПа – максимальные деформации и напряжения в арматуре растянутой зоны, соответствующие напряженно-деформированному состоянию, при котором достигается максимальная величина кривизны элемента;

$M^n = 430,0$ кН·м; $M^{defor} = 424,5$ кН·м – нормативная и деформационная прочности ригеля соответственно.

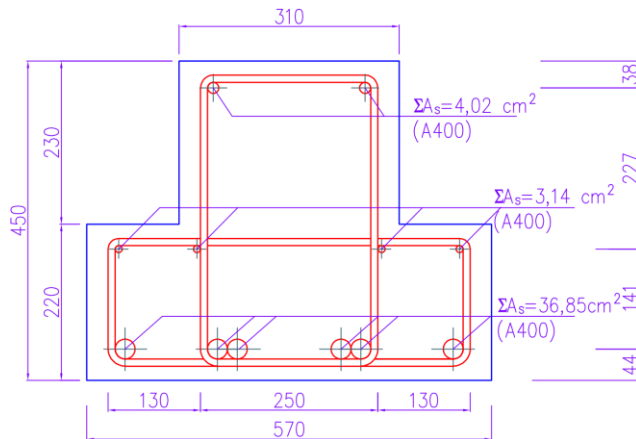


Рис. 1. Поперечное сечение и армирование ригеля
Fig. 1. Cross-section and reinforcement of the beam

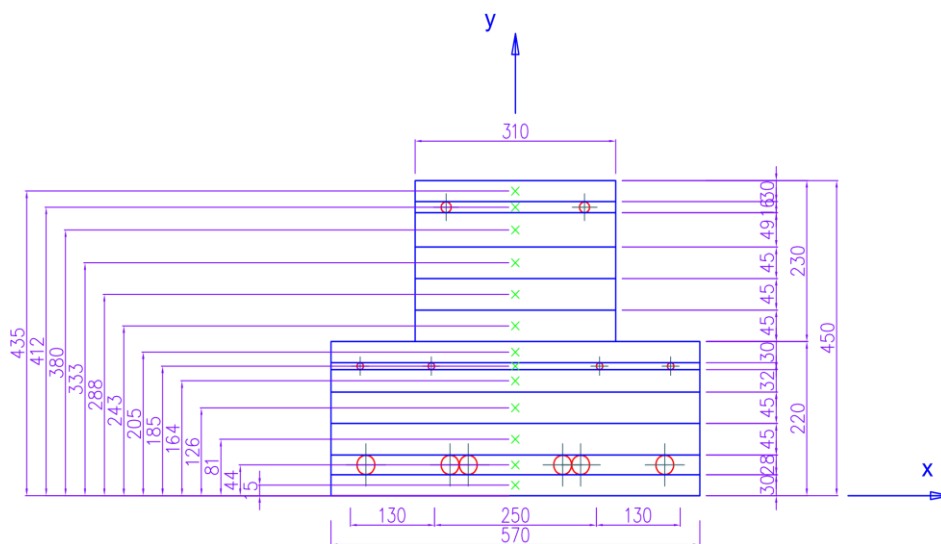


Рис. 2. Разбивка поперечного сечения [1]
Fig. 2. Cross-section breakdown

В табл. 1 представлены расчетные параметры, которые были определены в работе [1].

Таблица 1

Расчетные параметры (программа Excel)

Table 1

Calculation parameters (Excel)

i	Δ_{bi}	y_{bi}	b_{bi}	A_{bi}	E'_{bi}	y_{si}	A_{si}	E'_{si}	y_{oj}	y'_{bi}	y'_{si}
	см			см ²	МПа	см	см ²	МПа	см		
1	3	1,5	57	171	3,06E+04	4,4	36,8	2,E+05	18,01	16,51	–
2	2,8	4,4	57	122,8	3,06E+04	–	–	–		13,61	13,61
3	4,5	8,05	57	256,5	3,06E+04	–	–	–		9,96	–
4	4,5	12,55	57	256,5	3,06E+04	–	–	–		5,46	–
5	3,2	16,4	57	182,4	3,06E+04	18,5	3,14	2,E+05		1,61	–
6	1	18,5	57	53,86	3,06E+04	–	–	–		–0,49	–
7	3	20,5	57	171	3,06E+04	–	–	–		–2,49	–
8	4,5	24,25	31	139,5	3,06E+04	–	–	–		–6,24	–
9	4,5	28,75	31	139,5	3,06E+04	–	–	–		–10,74	–
10	4,5	33,25	31	139,5	3,06E+04	–	–	–		–15,24	–
11	4,5	37,95	31	151,9	3,06E+04	41,2	4,02	2,E+05		–19,94	–
12	1,6	41,2	31	45,58	3,06E+04	–	–	–		–23,19	–23,19
13	3	43,5	31	93	3,06E+04	–	–	–		–25,49	–

Для расчета трещиностойкости и жесткости элемента в табл. 2 представлены необходимые численные значения расчетных параметров при 11-й итерации, вычисленные в работе [1].

Таблица 2

Расчетные параметры при 11-й итерации (программа Excel)

Table 2

Calculation parameters after 11 iterations (Excel)

i	A_{bi}	E'_{bi}	A_{si}	E'_{si}	y_{oj}	y'_{bi}	y'_{si}	$\frac{1}{r}$	ε_{bi}	σ_{bi}	ε_{si}	σ_{si}
	см ²	МПа	см ²	МПа	см		см ⁻¹	–	МПа	–	МПа	
1	171	0,00E+00	–	–	21,09	19,6	–	1,24E-04	2,43E-03	0,0	–	–
2	122,8	0,00E+00	36,8	2E+05		16,7	16,69		2,07E-03	0,0	2,07E-03	355
3	256,5	0,00E+00	–	–		13,0	–		1,61E-03	0,0	–	–
4	256,5	0,00E+00	–	–		8,5	–		1,06E-03	0,0	–	–
5	182,4	0,00E+00	3,14	2E+05		4,7	–		5,81E-04	0,0	3,21E-04	64,17
6	53,86	0,00E+00	–	–		2,6	2,59		3,21E-04	0,0	–	–
7	171	1,75E+04	–	–		0,6	–		7,32E-05	1,3	–	–
8	139,5	1,47E+04	–	–		–3,2	–		–3,91E-04	–5,7	–	–
9	139,5	1047E+04	–	–		–7,7	–		–9,48E-04	–13,9	–	–
10	139,5	1,47E+04	–	–		–12,2	–		–1,51E-03	–22,0	–	–
11	151,9	1,06E+04	4,02	2E+05		–16,9	–		–2,09E-03	–22,0	–2,49E-03	–355
12	45,58	8,92E+03	–	–		–20,1	–20,11		–2,49E-03	–22,0	–	–
13	93	8,01E+03	–	–		–22,4	–		–2,78E-03	–22,0	–	–

2.1. Деформационный момент образования трещин (M_{crc}^{defor})

Краевые деформация и напряжение растянутой зоны сечения при двухлинейной диаграмме деформирования бетона равны:

$$\varepsilon_{bt,extreme} = \varepsilon_{bt1,red} = 8 \cdot 10^{-5}, \quad \sigma_{b,extreme} = R_{bt,ser} = 2,1 \text{ МПа.}$$

На рис. 3 представлены средние напряжения в i -ом участке перед образованием трещин. С учетом известной расчетной величины центра тяжести поперечного сечения ($y_t = 18,01$ см) и на основе равенства количественных отношений сторон «подобных треугольников» определяются величины средних напряжений i -го слоя бетона нормального сечения.

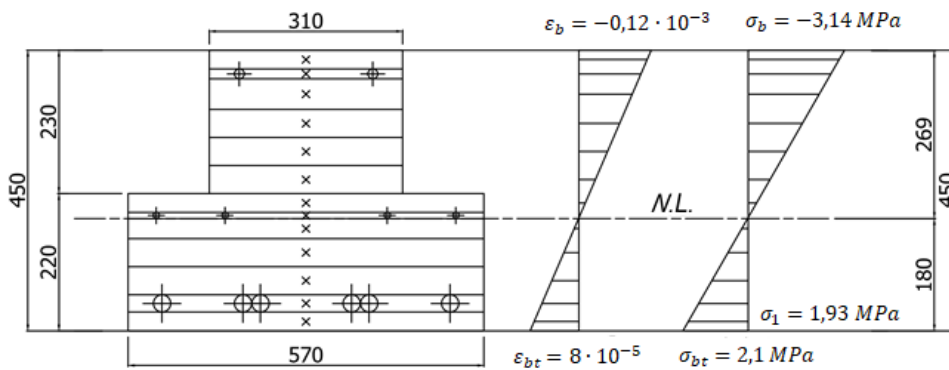


Рис. 3. Расчетная схема для определения средних значений напряжений перед образованием трещин [1]

Fig. 3. Calculation diagram for average stress values before crack formation [1]

Например, при $y_t = y_{01} = 18,01$ см и $y'_{b1} = y_{01} = 16,51$ см (см. табл. 1), согласно рис. 3, нейтральная линия (N.L.) проходит почти на границе между 5-м и 6-м слоем, и для первого слоя при $i = 1$ имеем следующие соотношения сторон и соответствующие средние напряжения:

$$\frac{2,1}{18,01} = \frac{x_1}{y'_{b1}} = \frac{x_1}{16,51} \Rightarrow x_1 = \sigma_1 = 1,93 \text{ МПа.}$$

По аналогии также определяются средние напряжения в остальных слоях нормального сечения элемента, они вычислены, и их численные значения представлены в табл. 3.

Численные значения расчетных параметров A_{bi} и y'_{bi} известны и представлены в табл. 1.

До появления трещин нормальное сечение ригеля работает под нагрузкой упруго, а в момент появления трещин эпюра напряжений в бетоне из треугольной формы переходит в криволинейную (прямоугольную).

В этой связи, чтобы учесть неупругие деформации в растянутом бетоне (нелинейность напряжений) при определении момента трещинообразования, так

же как при расчете по предельным состояниям [2, 3], суммарное усилие в формуле (1) и при $\frac{b_f}{b} = 1,84 < 2$ необходимо умножить на коэффициент $\gamma = 1,25$.

Таблица 3

Средние напряжения (программа Excel)

Table 3

Average stresses (Excel)

Номер слоев	Средние напряжения σ_i , МПа
1	1,93
2	1,587
3	1,161
4	0,637
5	0,188
6	-0,057
7	-0,29
8	-0,727
9	-1,252
10	-1,777
11	-2,325
12	-2,704
13	-2,972

Суммарное нормальное усилие, подсчитанное в программе Excel и равное $\sum \sigma_{bi} \cdot A_{bi} \cdot y'_{bi} = 35\,3716,3052$ кг·см, представлено в табл. 4.

Таблица 4

Определение суммарного нормального усилия (программа Excel)

Table 4

Total normal force (Excel)

σ_{bi} , кг/см ²	A_{bi} , см ²	y'_{bi} , см	$\sigma_{bi} \cdot A_{bi} \cdot y'_{bi}$, кг·см
19,3	171	16,51	54 487,953
15,87	122,8	13,61	26 523,65796
11,61	256,5	9,96	29 660,5314
6,37	256,5	5,46	8921,1213
1,88	182,4	1,61	552,08832
0,57	53,86	0,49	15,043098
2,9	171	2,49	1234,791
7,27	139,5	6,24	6328,3896
12,52	139,5	10,74	18 757,8396
17,77	139,5	15,24	37 778,6646
23,25	151,9	19,94	70 421,5995
27,04	45,58	23,19	28 581,28541
29,72	93	25,49	70 453,3404
–	–	Σ:	353 716,3052

Деформационный момент трещинообразования с учетом пластических деформаций определяется по формуле (1):

$$M_{crc}^{defor} = \gamma \sum |\sigma_{bi}| A_{bi} \cdot y'_{bi} = 1,25 \cdot 35,372 = 44,215 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

2.2. Нормативный момент образования трещин (M_{crc}^n)

Нормативный момент образования трещин с учетом неупругих деформаций растянутого бетона определяют согласно [2, 3] по формуле

$$M_{crc}^n = 1,3 R_{bt,ser} \cdot W,$$

где $W = \frac{I_{red}}{y_t^n}$ – момент сопротивления сечения; $I_{red} = I_b + I_s \cdot \alpha + I'_s \cdot \alpha$ – при-

веденный момент сопротивления; $y_t^n = \frac{S_{red}}{A_{red}}$ – нормативная высота растянутой

зоны сечения ригеля; $S_{red} = \frac{b \cdot h^2}{2} + \alpha \cdot A_s \cdot a$ – приведенный статический мо-

мент; $A_{red} = b \cdot h + \alpha \cdot A_s$ – приведенная площадь сечения.

Приведенный момент инерции:

$$I_{red} = \frac{30 \cdot 45^3}{12} + \frac{27 \cdot 22^3}{12} + 5,55 \times$$

$$\times (36,85 \cdot 13,61^2 + 3,14 \cdot 0,49^2 + 4,02 \cdot 23,19^2) = 301\,656,2 \text{ см}^4.$$

Приведенный статический момент:

$$S_{red} = \frac{310 \cdot 450^2}{2} + 5,55 \cdot 3685 \cdot 50 = 32\,410\,087,5 \text{ мм}^3.$$

$$A_{red} = 310 \cdot 450 + 5,55 \cdot 3685,0 = 159\,951,7 \text{ мм}^2.$$

Тогда $y_t^n = \frac{32410087,5}{159951,7} = 202,6 \text{ мм}.$

Момент сопротивления равен

$$W = \frac{301656,2}{20,26} = 14\,889,2 \text{ см}^3.$$

Нормативный момент образования трещин найдем по формуле

$$M_{crc}^n = 1,3 \cdot 21,4 \cdot 14889,2 = 414\,217,544 \text{ кг}\cdot\text{см} = 41,422 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Определение процентного расхождения методов по трещинообразованию:

$$\delta = \frac{M_{crc}^{defor} - M_{crc}^n}{M_{crc}^n} 100 \% = \frac{44,215 - 41,422}{41,422} 100 \% = 6,74 \% .$$

2.3. Деформационный метод определения расстояния между смежными трещинами

По деформационному методу базовое расстояние между смежными трещинами определяется с учетом площади растянутой зоны сечения в предель-

ном состоянии, полученной из [1] при $y_t = y_{011} = 21,09$ см (см. табл. 2) по формуле (2).

Площадь растянутой зоны в предельном состоянии равна

$$A_{bt}^{defor} = b \cdot y_t = 310 \cdot 210,9 = 65\,379 \text{ мм}^2.$$

Расстояние между смежными трещинами при $A_s = 3685,0 \text{ мм}^2$:

$$l_s^{defor} = 0,5 \frac{65379,0}{3685} 28 = 248,4 \text{ мм}.$$

Для сравнения вычисляется нормативное базовое расстояние между смежными трещинами.

Нормативное базовое расстояние между трещинами. Нормативное базовое расстояние между трещинами определяют согласно [2, 3].

С учетом ранее вычисленного параметра $y_t^n = 202,6$ мм и $b = 310$ мм определяем нормативную площадь растянутой зоны:

$$A_{bt}^n = 310 \cdot 202,6 = 62\,813,5 \text{ мм}^2.$$

Нормативное расстояние между смежными трещинами l_s^n определяется по формуле

$$l_s^n = 0,5 \frac{A_{bt}^n}{A_s} = 0,5 \frac{62813,5}{3685,0} 28 = 238,6 \text{ мм}.$$

Отклонение методов:

$$\delta = \frac{l_s^{defor} - l_s^n}{l_s^n} 100 \% = \frac{248,4 - 238,6}{238,6} 100 \% = 4,1 \% .$$

2.4. Деформационный метод определения ширины раскрытия трещин (a_{crc}^{defor})

Определение a_{crc}^{defor} по формуле (3) в зависимости от напряжений в растянутой арматуре при достижении максимальной величины кривизны элемента, вычисленной в работе [1].

Коэффициент ψ_s определяется по формуле (4) с учетом $M_{crc}^{defor} = 44,215$ кН·м и несущей способности элемента $M^{defor} = 424,5$ кН·м, полученного из работы [1] по формуле

$$\psi_s^{defor} = 1 - 0,8 \frac{M_{crc}^{defor}}{M^{defor}} = 1 - 0,8 \frac{44,215}{424,5} = 0,916 .$$

Согласно источникам [5, 6], расчетные коэффициенты принимаются равными:

$\varphi_1 = 1$ – при непродолжительном действии нагрузки;

$\varphi_2 = 0,5$ – для арматуры периодического профиля;

$\varphi_3 = 1$ – для элементов изгибаемых.

Напряжение в арматуре равно $\sigma_s^{defor} = 355$ МПа [1, табл. 2].

a_{crc}^{defor} в зависимости от напряжений по формуле (3):

$$a_{crc}^{defor} = 1 \cdot 0,5 \cdot 1 \cdot 0,916 \frac{355}{2 \cdot 10^5} 248,4 = 0,20 < [a_{crc}] = 0,3 \text{ мм} - \text{условие выполняется, следовательно, деформационная трещиностойкость ригеля обеспечена.}$$

Нормативная ширина раскрытия трещин (a_{crc}^n). Нормативная ширина раскрытия трещин определяется [2, 3] по формуле

$$a_{crc}^n = \varphi_1 \cdot \varphi_2 \cdot \varphi_3 \cdot \psi_s \frac{\sigma_s}{E_s} l_s.$$

Определение нормативных расчетных параметров по [2, 3]:

$$\psi_s = 1 - 0,8 \frac{M_{crc}}{M} = 1 - 0,8 \frac{41,422}{430,0} = 0,923 - \text{коэффициент, учитывающий неравномерное распределение относительных деформаций растянутой арматуры}$$

между трещинами по нормативу; $\sigma_s = \frac{M^n}{z_s \cdot A_s}$ – нормативное напряжение в растянутой арматуре;

$$z_s = \zeta \cdot h_0;$$

$$\mu_s \cdot \alpha_{s1} = \frac{A_s}{b \cdot h_0} \frac{E_s}{E_{b, red}};$$

$$\mu_s \cdot \alpha_{s1} = \frac{36,85}{31 \cdot 40,6} \frac{2 \cdot 10^6}{193333,3} = 0,3.$$

$$\text{При } \mu_s \cdot \alpha_{s1} = 0,3, \quad \delta = \frac{2 \cdot a}{h_0} = 40,6 \frac{2 \cdot 3,8}{40,6} = 0,187 \leq 0,2 \quad \text{и} \quad \gamma = \frac{\alpha_{s1} \cdot A_s}{b \cdot h_0} =$$

$$= \frac{10,3 \cdot 4,02}{31 \cdot 40,6} = 0,032 \text{ в зависимости от чертежа 4.3 из [2, 3] определяем}$$

коэффициент $\zeta = 0,82$.

Тогда плечо пары сил равно $z_s = 0,82 \cdot 406,6 = 332,9$ мм.

$$\sigma_s = \frac{430 \cdot 10^4}{33,29 \cdot 36,85} = 3505 \cdot 0,1 = 350,5 \text{ МПа.}$$

Нормативная ширина раскрытия трещин равна $a_{crc}^n = 1 \cdot 0,5 \cdot 1 \cdot 0,923 \times \frac{350,5}{2 \cdot 10^5} 238,6 = 0,193 < [a_{crc}] = 0,3$ мм – условие выполняется, следовательно, нормативная трещиностойкость ригеля обеспечена.

$$\delta = \frac{a_{crc}^{defor} - a_{crc}^n}{a_{crc}^n} 100 \% = \frac{0,2 - 0,193}{0,193} 100 \% = 4,6 \% .$$

2.5. Деформационный метод определения прогиба элемента

Для определения кривизны изгибаемого железобетонного элемента используется формула (5):

$$\left(\frac{1}{r}\right)_{\max}^{defor} = \frac{M^{defor}}{E_b' \cdot I_{red}} = \frac{424,5 \cdot 10^4}{175000 \cdot 301656,2} = 0,804 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{см}},$$

где $M^{defor} = 425,5 \text{ кН}\cdot\text{м}$ – прочность элемента;

$E_b' = 17\,500 \text{ МПа}$ (см. табл. 2) – модуль деформаций, полученный на 11-й итерации в работе [1]; ранее вычисленный $I_{red} = 301\,656,2 \text{ см}^4$.

Прогиб элемента по деформационному методу по формуле (6):

$$f^{defor} = \frac{5}{48} 540^2 \cdot 0,804 \cdot 10^{-4} = 2,44 < [f] = \frac{1}{200} l = \frac{1}{200} 540 = 2,7 \text{ см} - \text{усло-}$$

вие выполняется, следовательно, деформационная жесткость ригеля обеспечена.

Нормативный прогиб элемента. Приведем ранее вычисленные прочность и приведенный момент инерции ригеля: $M^n = 430,0 \text{ кН}\cdot\text{м}$; $I_{red} = 301\,656,2 \text{ см}^4$.

Нормативная кривизна равна

$$\left(\frac{1}{r}\right)^n = \frac{M^n}{0,5 E_b \cdot I_{red}} = \frac{430 \cdot 10^4}{0,5 \cdot 360000 \cdot 301656,2} = 0,792 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{см}}.$$

Нормативный прогиб элемента:

$$f^n = Sl^2 \left(\frac{1}{r}\right)_{\max}^n = \frac{5}{48} 540^2 \cdot 0,792 \cdot 10^{-4} = 2,4 < f_{ult} = \frac{1}{200} l = \frac{1}{200} 540 = 2,7 \text{ см} -$$

условие выполняется, следовательно, нормативная жесткость ригеля обеспечена.

$$\delta = \frac{f^{defor} - f^n}{f^n} 100 \% = \frac{2,44 - 2,4}{2,4} 100 \% = 1,6 \%$$

В табл. 5 представлен сравнительный анализ расчетных контролируемых параметров методов, где подсчитаны расхождения в процентах.

Таблица 5

Сравнение расчетных параметров

Table 5

Calculation parameters

Контролируемый параметр	Метод расчета			δ, %
	Деформационный		Нормативный по предельным состояниям	
M_{crc}	44,215 кНм	по формуле (1)	41,422 кН·м	6,74
L_{crc}	248,8 мм	по формуле (2)	238,6 мм	4,1
a_{crc}	0,2 мм	по формуле (3)	0,193 мм	4,6
f	2,44 см	по формуле (6)	2,4 см	1,6

Выводы

1. Момент трещинообразования по деформационной модели M_{crc}^{defor} определяется по формуле (1) суммированием нормальных усилий, возникающих в каждом i -м слое сечения, выраженных через напряжения в бетоне перед появлением первых трещин. При этом эпюра напряжений растянутой и сжатой зон принята треугольной формы с максимальной ординатой растянутой зоны, равной $\sigma_{bt} = R_{bt,ser} = 2,1$ МПа, а наличие неупругих деформаций учитывается с коэффициентом $\gamma = 1,25$, принимаемым как для расчета по предельным состояниям [5, 6].

2. Базовое расстояние между смежными трещинами по деформационной модели l_s^{defor} определяется по формуле (2) с учетом площади растянутой зоны A_{bt}^{defor} нормального сечения в предельном состоянии элемента при высоте растянутой зоны, равной $y_t = y_{011} = 21,09$ см, полученной из расчета прочности по деформационной модели [1].

3. Ширина раскрытия нормальных трещин a_{crc}^{defor} определяется по формуле (3) с учетом расчетных параметров w_s^{defor} , σ_s^{defor} , l_s^{defor} , вычисленных по деформационной модели.

4. Прогиб элемента по деформационной модели f^{defor} определяется по формуле (6) с учетом максимальной кривизны $\left(\frac{1}{r}\right)_{max}^{defor}$ по формуле (5) и жесткости сечения при модуле деформации бетона растянутой зоны, равной $E'_b = 17\,500$ МПа и M^{defor} .

5. Полученные результаты расчетов по трещиностойкости и жесткости по формулам (1) – (6), представленные в табл. 5, показывают незначительные расхождения контролируемых параметров с погрешностью $\delta < 7\%$, что подтверждает адекватность деформационной модели расчета.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. *Opbul E.K., Dmitriev D.A., Phan V.P.* Practical calculation of flexible members with the use of non-linear deformation model as exemplified by typical girder RGD 4.56-90 // *Architecture and Engineering*. 2018. V. 3. № 3. P. 29–41. DOI: 10.23968/2500-0055-2018-3-3-29-41
2. *Opbul E.K., Dmitriev D.A., Vedernikova A.A.* Calculation of bending of steel-fiber-reinforced concrete members by a nonlinear deformation model with the use of iteration procedures // *Mechanics of Composite Materials*. 2018. V. 54. № 3. P. 379–394.
3. *Opbul Э.К., Дмитриев Д.А., Ведерникова А.А.* Нелинейно-итерационный расчет прочности сталефиброжелезобетонных элементов с использованием опытных диаграмм деформирования материалов // *Вестник гражданских инженеров*. 2017. № 1 (60). С. 79–91.
4. *Opbul Э.К., Калдар-оол А.Б., Хюи Л.К.* Деформационная модель прочности изгибаемого элемента в среде Matlab // *Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета*. 2022. № 24 (4). С. 110–129. DOI: 10.31675/1607-1859-2022-24-4-110-129
5. *СП 63.13330.2018 (20.12.2021)*. Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения. Актуализированная редакция СНиП 52-01–2003 (с изменениями № 1, 2). Москва : Минстрой России, 2019. 119 с.

6. *Пособие по проектированию* бетонных и железобетонных конструкций из тяжелого бетона без предварительного напряжения (к СП 52-101-2003). Москва : ОАО ЦРИИ-Промзданий, 2005. 166 с.
7. *Байков В.Н., Сигалов Э.Е.* Железобетонные конструкции. 4-е изд., перераб. Москва : Стройиздат, 1985. 728 с.
8. *Маляев Р.Л., Маляев Д.Р., Веселев Ю.А.* Строительные конструкции. 2-е изд. Ростов-на-Дону : Феникс, 2005. 880 с.
9. *Цай Т.Н.* Строительные конструкции. Железобетонные конструкции. 3-е изд., стер. Санкт-Петербург : Лань, 2021. 464 с.
10. *Габрусенко В.В., Беккер В.А.* Каменные и железобетонные конструкции одноэтажных зданий. Новосибирск : НГАСУ (Сибстрин), 2021. 220 с.
11. *Улицкий И.И., Ривкин С.А.* Железобетонные конструкции. Расчет и конструирование. Москва : Изд-во RUGRAM, 2022. 400 с.
12. *Бондаренко В.М., Римшин В.И.* Примеры расчета железобетонных и каменных конструкций. Москва : Высшая школа, 2006. 504 с.
13. *Michal D., Jacek S.* Design Aspects of the Safe Structuring of Reinforcement in Reinforced Concrete Bending Beams // *Procedia Engineering*. 2017. P. 211–217. DOI: 10.1016/j.proeng.2017.02.051
14. *Herranz J.P., Maria H.S., Gutiérrez S., Riddell R.* Optimal Strut-and-tie models using full homogenization optimization method // *ACI Structural Journal*. 2012. DOI: 10.14359/51684038
15. *Garstecki A., Glema A., Ścigallo J.* Optimal design of reinforced concrete beams and frames. *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences*. 1996. V. 3 (3). P. 223–231.
16. *Szeptyński P.* Comparison and experimental verification of simplified one-dimensional linear elastic models of multilayer sandwich beams // *Composite Structures*. 2020. DOI: 10.1016/j.compstruct.2020.112088
17. *Gao D.Y., Gu Z., Wu C.* Bending Behavior and Deflection Prediction of High-Strength SFRC Beams under Fatigue Loading // *Journal of Materials Research and Technology*. 2020. DOI: 10.1016/j.jmrt.2020.04.017
18. *Wu Z., Shi C., He W., Wu L.* Effects of steel fiber content and shape on mechanical properties of ultra-high performance concrete // *Construction and Building Materials*. 2016. DOI: 10.1016/j.conbuildmat.2015.11.028
19. *Yoo D.Y., Banthia N., Yoon Y.S.* Impact resistance of reinforced ultra-high-performance concrete beams with different steel fibers // *ACI Structural Journal*. 2017. DOI: 10.14359/51689430
20. *Gali S., Subramaniam K.V.L.* Investigation of the dilatant behavior of cracks in the shear response of steel fiber reinforced concrete beams // *Engineering Structures*. 2017. P. 832–842. DOI: 10.1016/j.engstruct.2017.09.050
21. *Li Q., Huang B., Xu S., Zhou B., Yu R.C.* Compressive fatigue damage and failure mechanism of fiber reinforced cementitious material with high ductility // *Cement and Concrete Research*. 2016. № 90 (4). P. 174–183. DOI: 10.1016/j.cemconres.2016.09.019
22. *Butean C., Heghes B.* Cost Efficiency of a Two Layer Reinforced Concrete Beam // *Procedia Manufacturing*. 2020. P. 103–109. DOI: 10.1016/j.promfg.2020.03.016
23. *Zhu H., Cheng S., Gao D., Neaz S.M., Li C.* Flexural behavior of partially fiber-reinforced high-strength concrete beams reinforced with FRP bars // *Construction and Building Materials*. 2018. P. 587–597. DOI: 10.1016/j.conbuildmat.2017.12.003
24. *Song A., Wan S., Jiang Z., Xu J.* Residual deflection analysis in negative moment regions of steel-concrete composite beams under fatigue loading // *Construction and Building Materials*. 2018. P. 50–60. DOI: 10.1016/j.conbuildmat.2017.09.075
25. *Fava G., Carvelli V., Pisani M.A.* Remarks on bond of GFRP rebars and concrete // *Composites Part B: Engineering*. 2016. DOI: 10.1016/j.compositesb.2016.03.012
26. *Aulia T.B., Rinaldi.* Bending capacity analysis of high-strength reinforced concrete beams using environmentally friendly synthetic fiber composites // *Procedia Engineering*. 2015. P. 1121–1128. DOI: 10.1016/j.proeng.2015.11.136
27. *Rabi M., Cashell K.A., Shamass R.* Flexural analysis and design of stainless steel reinforced concrete beams // *Engineering Structures*. 2019. DOI: 10.1016/j.engstruct.2019.109432
28. *Cramer S.D., Covino B.S., Bullard S.J., Holcomb G.R., Russell J.H., Nelson F.J., Laylor H.M., Soltesz S.M.* Corrosion prevention and remediation strategies for reinforced con-

- crete coastal bridges // *Cement and Concrete Composites*. 2002. P. 101–117. DOI: 10.1016/S0958-9465(01)00031-2
29. *Ulzurrun G.S.D., Zanuy C.* Enhancement of impact performance of reinforced concrete beams without stirrups by adding steel fibers // *Construction and Building Materials*. 2017. P. 166–182. DOI: 10.1016/j.conbuildmat.2017.04.005
 30. *Peklov P.N., Kozminskaya O.V., Kukhareva A.S.* About Dynamic Responses of Input Devices of Underground Structures of Transport Infrastructure // *Transportation Research Procedia* : Collection of materials XIII International Conference on Transport Infrastructure: Territory Development and Sustainability. Krasnoyarsk, 2023. P. 410–416. DOI: 10.1016/j.trpro.2023.02.055
 31. *Glowacki M., Kowalski R.* An experimental approach to the estimation of stiffness changes in RC elements exposed to bending and high temperature // *Engineering Structures*. 2020. DOI: 10.1016/j.engstruct.2020.110720
 32. *Shirunov G.N., Matrosov A.V., Sarvilin D.A.* A rectangular prism under own weight: comparison of the method of initial functions and the finite element method // *Stability and Control Processes: Proceedings of the 4th International Conference Dedicated to the Memory of Professor Vladimir Zubov*. Cham, 2022. P. 829–836. EDN: BZVZGZ
 33. *Шурунов Г.Н.* Изгиб толстой плиты, усиленной слоем внешнего армирования, под действием собственного веса // *Вестник гражданских инженеров*. 2019. № 2 (73). С. 54–61. EDN: WTDCGA
 34. *Briz E., Biezma M.V., Bastidas D.M.* Stress corrosion cracking of new 2001 lean–duplex stainless steel reinforcements in chl:oride contained concrete pore solution: An electrochemical study // *Construction and Building Materials*. 2018. P. 1–8. DOI: 10.1016/j.conbuildmat.2018.10.108
 35. *Yadollahi A., Shamsaei N., Thompson S.M., Elwany A., Bian L.* Effects of building orientation and heat treatment on fatigue behavior of selective laser melted 17-4 PH stainless steel // *International Journal of Fatigue*. 2017. DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2016.03.014
 36. *Hou Z., Chen S., Sun Q., Wei X., Lv W.* Experimental research on fatigue characteristics of X12Cr13 stainless steel // *Journal of Materials Research and Technology*. 2020. DOI: 10.1016/j.jmrt.2020.01.070
 37. *Panfilov D.A., Pischulev A.A., Romanchikov V.V.* The Methodology for Calculating Deflections of Statically Indeterminate Reinforced Concrete Beams (Based on Nonlinear Deformation Model) // *Procedia Engineering*. 2016. P. 531–536. DOI: 10.1016/j.proeng.2016.08.183
 38. *Gilbert R.I.* The serviceability limit states in reinforced concrete design // *Procedia Engineering*. 2011. P. 385–395. DOI: 10.1016/j.proeng.2011.07.048

REFERENCES

1. *Opbul E.K., Dmitriev D.A., Phan V.P.* Practical Calculation of Flexible Members with the Use of Non-Linear Deformation Model as Exemplified by Typical Girder RGD 4.56-90. *Architecture and Engineering*. 2018; 3 (3): 29–41. DOI: 10.23968/2500-0055-2018-3-3-29-41
2. *Opbul E.K., Dmitriev D.A., Vedernikova A.A.* Calculation of Bending of Steel-Fiber-Reinforced Concrete Members by a Nonlinear Deformation Model with the Use of Iteration Procedures. *Mechanics of Composite Materials*. 2018; 54 (3): 379–394.
3. *Opbul E.K., Dmitriev D.A., Vedernikova A.A.* Nonlinear Iterative Calculation of Strength of Steel-Fiber-Reinforced Concrete Elements using Experimental Material Deformation Diagrams. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov*. 2017; 1 (60): 79–91. (In Russian)
4. *Opbul E.K., Kaldar-Ool A-Kh.B., Le Kuang Khyui.* Deformation Modeling of Bending Element Strength in MATLAB. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta – Journal of Construction and Architecture*. 2022; 24 (4): 110–129. DOI: 10.31675/1607-1859-2022-24-4-110-129 (In Russian)
5. Specification 63.13330.2018 (20.12.2021). Concrete and reinforced concrete structures. Basic provisions. Updated edition of SNiP 52-01–2003. Moscow: Minstroj Rossii, 2019. 119 p. (In Russian)
6. Manual for the design of concrete and reinforced concrete structures made of heavy concrete without prestressing (to SP 52-101–2003). Moscow: OAO TsRIIPromzdaniy, 2005. 166 p. (In Russian)
7. *Baikov V.N., Sigalov E.E.* Reinforced Concrete Structures. 4th edn. Moscow: Stroiizdat, 1985. 728 p. (In Russian)

8. *Mailyan R.L., Mailyan D.R., Veselev Yu.A.* Building Construction. 2nd edn. Rostov-on-Don: Feniks, 2005. 880 p. (In Russian)
9. *Tsai T.N.* Building Structures. Reinforced Concrete Structures. 3rd edn. Saint-Petersburg: Lan', 2021. 464 p. (In Russian)
10. *Gabrusenko V.V., Bekker V.A.* Stone and Reinforced Concrete Structures of Single-Story Buildings. Novosibirsk, 2021. 220 p. (In Russian)
11. *Ulitskii I.I., Rivkin S.A.* Reinforced Concrete Structures. Calculation and Design. Moscow: RUGRAM, 2022. 400 p. (In Russian)
12. *Bondarenko V.M., Rimshin V.I.* Examples of Calculations for Reinforced Concrete and Masonry Structures. Moscow: Vysshaya shkola, 2006. 504 p. (In Russian)
13. *Michal D., Jacek Š.* Design Aspects of the Safe Structuring of Reinforcement in Reinforced Concrete Bending Beams. *Procedia Engineering*. 2017; 211–217. DOI: 10.1016/j.proeng.2017.02.051
14. *Herranz J.P., Maria H.S., Gutiérrez S., Riddell R.* Optimal Strut-and-Tie Models using Full Homogenization Optimization Method. *ACI Structural Journal*. 2012. DOI: 10.14359/51684038
15. *Garstecki A., Glema A., Ścigallo J.* Optimal Design of Reinforced Concrete Beams and Frames. *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences*. 1996; 3 (3): 223–231.
16. *Szeptyński P.* Comparison and Experimental Verification of Simplified One-Dimensional Linear Elastic Models of Multilayer Sandwich Beams. *Composite Structures*. 2020. DOI: 10.1016/j.compstruct.2020.112088
17. *Gao D.Y., Gu Z., Wu C.* Bending Behavior and Deflection Prediction of High-Strength SFRC Beams under Fatigue Loading. *Journal of Materials Research and Technology*. 2020. DOI: 10.1016/j.jmrt.2020.04.017
18. *Wu Z., Shi C., He W., Wu L.* Effects of Steel Fiber Content and Shape on Mechanical Properties of Ultra-High Performance Concrete. *Construction and Building Materials*. 2016. DOI: 10.1016/j.conbuildmat.2015.11.028
19. *Yoo D.Y., Banthia N., Yoon Y.S.* Impact Resistance of Reinforced Ultra-High-Performance Concrete Beams with Different Steel Fibers. *ACI Structural Journal*. 2017. DOI: 10.14359/51689430
20. *Gali S., Subramaniam K.V.L.* Investigation of the Dilatant Behavior of Cracks in the Shear Response of Steel Fiber Reinforced Concrete Beams. *Engineering Structures*. 2017; 832–842. DOI: 10.1016/j.engstruct.2017.09.050
21. *Li Q., Huang B., Xu S., Zhou B., Yu R.C.* Compressive Fatigue Damage and Failure Mechanism of fiber Reinforced Cementitious Material with High Ductility. *Cement and Concrete Research*. 2016; 90 (4): 174–183. DOI: 10.1016/j.cemconres.2016.09.019
22. *Butean C., Heghes B.* Cost Efficiency of a Two Layer Reinforced Concrete Beam. *Procedia Manufacturing*. 2020; 103–109. DOI: 10.1016/j.promfg.2020.03.016
23. *Zhu H., Cheng S., Gao D., Neaz S.M., Li C.* Flexural Behavior of Partially Fiber-Reinforced High-Strength Concrete Beams Reinforced with FRP Bars. *Construction and Building Materials*. 2018; 587–597. DOI: 10.1016/j.conbuildmat.2017.12.003
24. *Song A., Wan S., Jiang Z., Xu J.* Residual Deflection Analysis in Negative Moment Regions of Steel-Concrete Composite Beams under Fatigue Loading. *Construction and Building Materials*. 2018; 50–60. DOI: 10.1016/j.conbuildmat.2017.09.075
25. *Fava G., Carvelli V., Pisani M.A.* Remarks on Bond of GFRP Rebars and Concrete. *Composites Part B: Engineering*. 2016. DOI: 10.1016/j.compositesb.2016.03.012
26. *Aulia T.B., Rinaldi.* Bending Capacity Analysis of High-Strength Reinforced Concrete Beams using Environmentally Friendly Synthetic Fiber Composites. *Procedia Engineering*. 2015; 1121–1128. DOI: 10.1016/j.proeng.2015.11.136
27. *Rabi M., Cashell K.A., Shamass R.* Flexural Analysis and Design of Stainless Steel Reinforced Concrete Beams. *Engineering Structures*. 2019. DOI: 10.1016/j.engstruct.2019.109432
28. *Cramer S.D., Covino B.S., Bullard S.J., Holcomb G.R., Russell J.H., Nelson F.J., Laylor H.M., Soltész S.M.* Corrosion Prevention and Remediation Strategies for Reinforced Concrete Coastal Bridges. *Cement and Concrete Composites*. 2002; 101–117. DOI: 10.1016/S0958-9465(01)00031-2
29. *Ulzurrun G.S.D., Zanuy C.* Enhancement of Impact Performance of Reinforced Concrete Beams without Stirrups by Adding Steel Fibers. *Construction and Building Materials*. 2017; 166–182. DOI: 10.1016/j.conbuildmat.2017.04.005

30. Peklov P.N., Kozminskaya O.V., Kukhareva A.S. About Dynamic Responses of Input Devices of Underground Structures of Transport Infrastructure. In: *Proc. 13th Int. Conf. on Transport Infrastructure: Territory Development and Sustainability*. Krasnoyarsk, 2023. Pp. 410–416. DOI: 10.1016/j.trpro.2023.02.055
31. Glowacki M., Kowalski R. An Experimental Approach to the Estimation of Stiffness Changes in RC Elements Exposed to Bending and High Temperature. *Engineering Structures*. 2020. DOI: 10.1016/j.engstruct.2020.110720
32. Shirunov G.N., Matrosov A.V., Sarvilin D.A. A Rectangular Prism under Own Weight: Comparison of the Method of Initial Functions and the Finite Element Method. Stability and Control Processes. In: *Proc. 4th Int. Conf. to the Memory of Professor Vladimir Zubov*. Cham, 2022. Pp. 829–836. EDN: BZVZGZ
33. Shirunov G.N. Bending of Thick Slab Reinforced with External Reinforcement Layer under its Own Weight. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov*. 2019; 2 (73); 54–61. EDN: WTDCGA (In Russian)
34. Briz E., Biezma M.V., Bastidas D.M. Stress Corrosion Cracking of New 2001 Lean–Duplex Stainless Steel Reinforcements in Chloride Contained Concrete Pore Solution: An Electrochemical Study. *Construction and Building Materials*. 2018; 1–8. DOI: 10.1016/j.conbuildmat.2018.10.108
35. Yadollahi A., Shamsaei N., Thompson S.M., Elwany A., Bian L. Effects of Building Orientation and Heat Treatment on Fatigue Behavior of Selective Laser Melted 17-4 PH Stainless Steel. *International Journal of Fatigue*. 2017. DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2016.03.014
36. Hou Z., Chen S., Sun Q., Wei X., Lv W. Experimental Research on Fatigue Characteristics of X12Cr13 Stainless Steel. *Journal of Materials Research and Technology*. 2020. DOI: 10.1016/j.jmrt.2020.01.070
37. Panfilov D.A., Pischulev A.A., Romanchikov V.V. The Methodology for Calculating Deflections of Statically Indeterminate Reinforced Concrete Beams (Based on Nonlinear Deformation Model). *Procedia Engineering*. 2016; 531–536. DOI: 10.1016/j.proeng.2016.08.183
38. Gilbert R.I. The Serviceability Limit States in Reinforced Concrete Design. *Procedia Engineering*. 2011; 385–395. DOI: 10.1016/j.proeng.2011.07.048

Сведения об авторах

Опбул Эрес Кечил-оолович, канд. техн. наук, зав. лабораторией, доцент, Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I, 190031, г. Санкт-Петербург, Московский пр., 9; доцент, Тувинский государственный университет, 667000, г. Кызыл, ул. Ленина, 36, pgupsopbul@mail.ru

Ширунов Гурий Николаевич, докт. техн. наук, профессор, Военный институт (инженерно-технический) Военной академии материально-технического обеспечения имени генерала армии А.В. Хрулева, 191123, г. Санкт-Петербург, ул. Захарьевская, 22, guriyn@mail.ru

Калдар-оол Анай-Хаак Бугалдаевна, канд. техн. наук, доцент, Тувинский государственный университет, 667000, г. Кызыл, ул. Ленина, 36, oorzhaka-h@mail.ru

Саая Светлана Сергеевна, канд. техн. наук, Тувинский государственный университет, 667000, г. Кызыл, ул. Ленина, 36, sedip@list.ru

Authors Details

Ehres K. Opbul, PhD, A/Professor, Emperor Alexander I St. Petersburg State Transport University, 9, Moskovskii Ave., 190031, Saint-Petersburg, Russia; Tuvan State University, 36, Lenin Str., 667000, Kyzyl, Republic of Tyva, pgupsopbul@mail.ru

Gurii N. Shirunov, DSc, Professor, The Saint Petersburg Military Engineering-Technical University (Nikolaevsky), 8, Makarov Emb., 199034, Saint-Petersburg, Russia, guriyn@mail.ru

Anai-Khaak B. Kaldar-ool, PhD, A/Professor, Tuvan State University, 36, Lenin Str., 667000, Kyzyl, Republic of Tyva, oorzhaka-h@mail.ru

Svetlana S. Saaya, PhD, Tuvan State University, 36, Lenin Str., 667000, Kyzyl, Republic of Tyva, pgupsopbul@mail.ru

Вклад авторов

Все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.
Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Authors contributions

The authors contributed equally to this article.
The authors declare no conflicts of interests.

Статья поступила в редакцию 16.12.2025
Одобрена после рецензирования 26.01.2026
Принята к публикации 02.02.2026

Submitted for publication 16.12.2025
Approved after review 26.01.2026
Accepted for publication 02.02.2026