

ПРОЕКТИРОВАНИЕ И СТРОИТЕЛЬСТВО ДОРОГ, МЕТРОПОЛИТЕНОВ, АЭРОДРОМОВ, МОСТОВ И ТРАНСПОРТНЫХ ТОННЕЛЕЙ

ENGINEERING AND CONSTRUCTION OF ROADS, SUBWAYS, AIRDROMES, AND TUNNELS

Вестник Томского государственного
архитектурно-строительного университета.
2025. Т. 27. № 4. С. 206–220.

ISSN 1607-1859 (для печатной версии)
ISSN 2310-0044 (для электронной версии)

Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo
arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta –
Journal of Construction and Architecture.
2025; 27 (4): 206–220.
Print ISSN 1607-1859
Online ISSN 2310-0044

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

УДК 624.072.2.042.8:534.014.1

DOI: 10.31675/1607-1859-2025-27-4-206-220

EDN: MORLDB

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ БАЛОК ПРИ ОДНОКРАТНОМ ДИНАМИЧЕСКОМ УДАРНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ

Андрей Владимирович Картопольцев

ООО «ДИАМОС», г. Томск, Россия

Аннотация. Актуальность. Спектральный анализ результатов свободных колебаний балок пролетных строений мостов относится к одному из основных классов инженерных задач, направленных на обеспечение точности в определении спектра собственных амплитудно-частотных характеристик и форм колебаний на их соответствие реальным условиям.

Цель работы: выявление погрешностей в воздействии ударных сил и изменения ускорения как случайных величин, а также анализ влияния погрешностей записанных акселерограмм колебаний в зависимости от типа инерционных импульсов.

Практическая значимость исследования состоит в проведении глубокого анализа трансформации входных возмущающих импульсов, вызванных ударным воздействием по методу Герца, и выходных реакций в виде комплексных спектров свободных колебаний балок. Полученные результаты могут быть использованы для совершенствования методов расчетов.

Ключевые слова: спектр, выборка, колебания, акселерограмма, импульс, амплитуда, случайный процесс

Для цитирования: Картопольцев А.В. Спектральный анализ свободных колебаний балок при однократном динамическом ударном воздействии подвиж-

ной нагрузки // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. 2025. Т. 27. № 4. С. 206–220. DOI: 10.31675/1607-1859-2025-27-4-206-220. EDN: MORLDB

ORIGINAL ARTICLE

SPECTRAL ANALYSIS OF BEAM FREE VIBRATIONS UNDER ONE-TIME DYNAMIC LOAD**Andrei V. Kartopoltsev***ООО "DIAMOS", Tomsk, Russia*

Abstract. The spectral analysis of free vibrations of bridge span beams is one of the significant engineering problems aimed at ensuring the accuracy in determining the spectrum of natural amplitude-frequency characteristics and vibration shape for their compliance with real conditions.

Purpose: Identification of errors in impact forces and changes in acceleration as random variables and the errors analysis in recorded accelerograms of vibrations, depending on the type of inertial pulses.

Practical implications: An in-depth analysis of transformation of input disturbing pulses from impact using the Hertz method and output reactions in the form of complex spectra of the beam free vibrations.

Keywords: spectrum, sampling, oscillations, accelerogram, impulse, amplitude, random process

For citation: Kartopoltsev A.V. Spectral Analysis of Beam Free Vibrations under One-Time Dynamic Load. Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta – Journal of Construction and Architecture. 2025; 27 (4): 206–220. DOI: 10.31675/1607-1859-2025-27-4-206-220. EDN: MORLDB

Уравнения динамики конструкции отличаются от статических уравнений тем, что в них содержатся инерционные члены от импульсного проявления при ударе, а внешние силы и компоненты напряженно-деформированного состояния являются функциями дополнительного аргумента времени t . Особенность и актуальность спектрального анализа собственных колебаний балок состоит в использовании асимптотического метода поведения частот и форм колебаний, например, в направлении точного вычисления средней плотности частот в выборке, а также применении метода волновых чисел с учетом вторичного эффекта инерции и деформации сдвига. При достаточно быстром изменении случайной ударной нагрузки во времени ее характерные периоды оказываются сопоставимыми с периодом собственных колебаний балки.

В этих условиях необходимыми являются исследования колебаний с учетом инерционного процесса, в частности удара по Герцу, представляющего собой случайный процесс. В качестве метода исследования случайных процессов в спектральном анализе предлагается использовать корреляционные методы, основанные на изучении связей между входными и выходными параметрами колебаний, т. к. значительная часть информации о случайном процессе собственных колебаний заключается в средних значениях и корреляционных функциях выборки спектра, подчиняющегося нормальному закону распределения плотностей вероятностей. Случайный процесс может быть упрощен, если он становится ква-

зистатическим и неизменным во времени и сближается с абстракцией реального процесса, т. к. все случайные нагрузки обладают свойством эргодичности, а также достаточно большой продолжительностью реализаций выборки колебаний и значительной информацией о статических свойствах процесса.

Для эргодических случайных процессов осреднение реализации выборки заменяется процессом осреднения по ансамблю реализации пиковых значений, осредненных по времени с помощью преобразования Фурье. Преобразования Фурье для стационарного эргодического случайного динамического процесса адекватны спектральной плотности корреляционной функции типа дельта-функция Дирака. Корреляционные функции и соответствующие им спектральные плотности удобны для описания выделяющихся пиков случайного процесса в выборке и являются прямыми анализаторами спектрального процесса. Спектральный анализ и определение спектральных характеристик свободных колебаний не является достаточным условием в решении задач. Поэтому необходимо найти совместное распределение вероятностей выходных параметров различной мощности (пиков) на протяжении выборки и осредненные числа пересечения заданного уровня в единицу времени, распределение экстремумов на заданном интервале времени [1].

При динамических испытаниях одиночным ударом груза по балке в ней возникают механические импульсы периодического и непериодического характера (рис. 1).

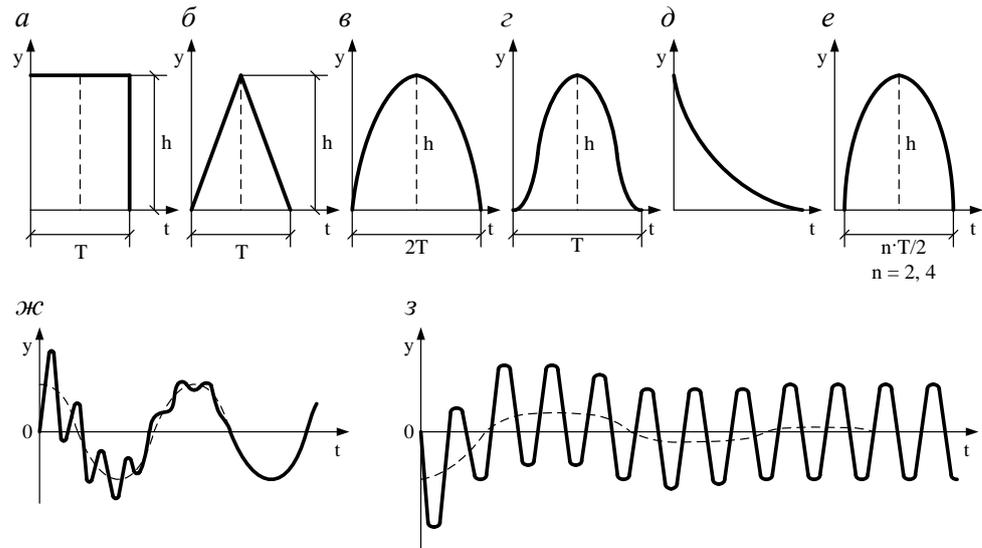


Рис. 1. Типовые формы ударных инерционных импульсов в методе Герца: а – прямоугольный; б – треугольный; в – косинусоидальный с периодом $T = 2T$ и амплитудой $A_0 = h$; г – колокольный импульс; д – экспоненциальный; е – синусоидальный; ж – импульс в виде затухающей синусоиды; з – импульс в форме отрезка синусоиды, состоящей из целого числа периодов $n = 2, 4$

Fig. 1. Typical waveforms of inertial pulses in the Hertz method: а – rectangular; б – triangular; в – cosinusoidal waveform with period $T = 2T$ and an amplitude $A_0 = h$; д – bell-shaped; е – exponential; ж – damped sinusoid; з – sinusoid segment consisting of the whole number of periods $n = 2, 4$

При периодических затухающих импульсах число n импульсов в единицу времени t равно обратной величине периода T , т. е. $\frac{1}{T} = n$, при этом частота импульсов собственных колебаний Θ_{p_0} [2] равна

$$\Theta_{p_0} = (1 - \frac{t}{T})100 \%, \quad (1)$$

где t – продолжительность соударения, с.

В некоторых случаях продолжительность импульса t принимается как промежуток времени между двумя одинаковыми значениями $\frac{g}{g_{\text{пик}}}$, где $g_{\text{пик}}$ – пиковое значение, или высота импульса (рис. 1). Например, для синусоидального импульса (рис. 1, *e*)

$$g_{\text{пик}} = g \frac{\cos p_0 \frac{T}{2}}{(1 - (\frac{2}{\pi} - p_0 \frac{1}{T}))^2}; \quad g = \frac{2}{\pi} h \cdot T;$$

$$t = n \frac{T}{2}; \quad n = 2h; \quad T = \frac{2\pi}{p_0}.$$

Ширина спектра импульса равна $\frac{1,5}{t}$.

Для прямоугольного импульса соответственно

$$t = \frac{T}{2}; \quad g = h \cdot T; \quad g_{\text{пик}} = g \frac{\sin p_0 \frac{T}{2}}{p_0 - \frac{T}{2}},$$

где h – высота импульса;

для треугольного импульса

$$g = h; \quad g_{\text{пик}} = g \frac{1 - \cos p_0 \frac{T}{2}}{\frac{1}{2}(p_0 \frac{T}{2})^2}.$$

Продолжительность импульса принимается в зависимости от вида удара и колебательного процесса в балке и рассматривается как случайный процесс, при котором значения, характеризующие колебания g_1, g_2, g_n в различные моменты времени t_1, t_2, t_n , являются случайными (рис. 2).

Для синусоидальной формы колебания функция затухания e^{-nt} выражает запаздывание начальной формы колебания смещением по фазе, равной ΔT , и выражение для g_a [3] имеет вид

$$\left. \begin{aligned} g_a &= g_0 \sin(p_0 \cdot t + \varphi_k); \\ g_a &= g_0 \cos(p_0 \cdot t + \varphi_k), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где $p_0 \cdot t + \varphi_k$ – фазовый угол; φ_k – начальная фаза колебания $\approx \frac{\pi}{2}$, соответствует g_0 , равному $A_0 \sin(p_0 \cdot t + \varepsilon)$; ε – характеристическая функция распределения или фаза колебания.

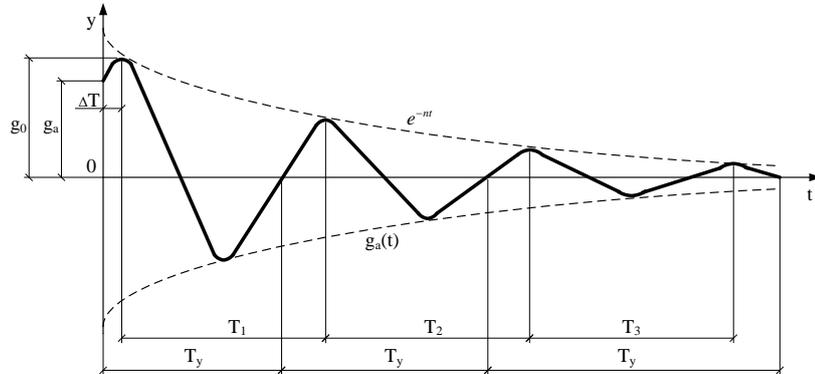


Рис. 2. Свободные синусоидальные колебания с переменной амплитудой

Fig. 2. Free sinusoidal vibrations with variable amplitude

Запишем условие

$$\sin p_0 \cdot t = \sin \frac{2\pi \cdot t_i}{T_i}; \quad \cos p_0 \cdot t = \cos \frac{2\pi \cdot t_i}{T_i}. \quad (3)$$

Из равенства $\frac{g_0}{p_0} = g_0 \cos \varepsilon$ определим ε :

$$\cos \varepsilon = \frac{1}{p_0}. \quad (4)$$

Для случайного колебательного процесса интегральная функция распределения вероятностей в момент времени t , $f(x, t)$ принимается на условиях осредненных амплитудных значений g_a (рис. 3).

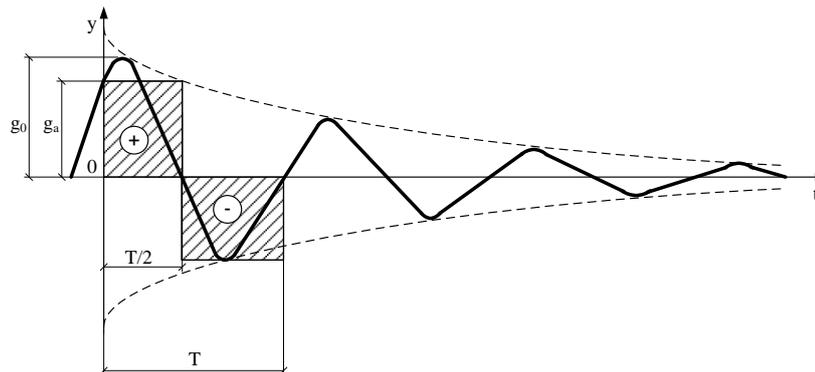


Рис. 3. График осреднения амплитудных значений синусоидальных колебаний

Fig. 3. Averaging of amplitude values of sinusoidal vibrations

Линеаризованная форма колебаний представляется формулой

$$g_a = \frac{2g_0}{\pi} = 0,636g_0. \quad (5)$$

Для гармонических стационарных колебаний формула (5) переписывается в виде

$$g_a = \frac{1}{\sqrt{2}} g_0 \approx 0,707 g_0. \quad (6)$$

Для оценки вклада конкретного вида гармоник колебательного процесса используется коэффициент Ферли (Клир фактор), равный

$$K_{p_0} = \frac{\sqrt{p_{01}^2 + p_{02}^2 + \dots p_{0n}^2}}{p_{01} + p_{02} + \dots p_{0n}}, \quad (7)$$

где $p_{01}, p_{02}, \dots, p_{0n}$ – частота собственных колебаний рассматриваемых форм; K_{p_0} оценивает весомость и вклад частоты i -й гармоники в спектре колебаний по отношению к первой (определяющей) форме колебания. Спектральный состав формы случайных гармонических колебаний на частоте и фазе определяется из разложения в ряд интеграла Фурье:

$$g_a = g_0 \cos(p_0 \cdot t + \varphi_k) + a_0 \sin p_0 \cdot t, \quad (8)$$

где $a_0 = p_{0i} \cdot p_0 \cos \varphi_k$ – фазовый спектр; $\varphi_k = -\varphi_{p_0}$ – начальная фаза колебаний, в зависимости от вида импульса.

Тогда интегральная функция распределения вероятностей случайного процесса колебаний может быть представлена в виде

$$f(x_i t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \cos ix + b_i \sin ix), \quad (9)$$

где $b_i = p_0 \sin \varphi_k$ – амплитудно-фазовый спектр; $\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dy$; $f(x)$ – корреляционная функция [4].

Принимая условия, что величина усредненной амплитуды в спектре выборки пропорциональна полной энергии импульса, справедливо равенство

$$A_0 = g_0 = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)^2 dt, \quad (10)$$

где $f(t)$ – периодическая функция спектра, в зависимости от вида импульса.

Для экспоненциально-затухающей синусоиды колебания величина прогиба балки адекватна осредненному значению амплитуды A_0 , равной

$$Y(A_0) = e^{-p_0 t} \cdot g_0 \sin(p_0 \cdot t + \varphi_k), \quad (11)$$

где $p_0 = \frac{2\pi}{T}$, для первой формы $p_{01} = \frac{1}{T}$, для второй $p_{02} = \frac{2}{T}$, для третьей

$$p_{03} = \frac{3}{T}.$$

Периодическая функция $f(t)$ в виде ряда Фурье имеет вид

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_0 \cdot e^{2\pi k \frac{t}{T}}, \quad (12)$$

где k – коэффициент формы гармоники; $k = 1$ – первая форма гармоники, $k = 2$ – вторая форма гармоники, $k = 3$ – третья форма гармоники. Для осредненных величин $k = 1,11$, что характерно для полупериода колебания.

Прямая связь между спектральным разложением и поведением реальных механических систем основывается на определении спектра колебаний с использованием преобразований Фурье с интегрированием в бесконечных пределах. Спектральный анализ выступает как средство обработки и получения экспериментальных динамических характеристик свободных колебаний балок от ударного воздействия нагрузкой по методу Герца. Этот подход позволяет анализировать диапазон воздействия ударной силы и характер связей в момент соударения тел. Ударной силой будем называть силу, которая действует на балку в течение очень короткого промежутка времени t_y . В процессе ее действия величина силы сначала возрастает от нуля до весьма больших величин, а потом вновь уменьшается до нуля [5]. В момент проявления ударной силы вступают во взаимодействие связи, которые и формируют алгоритм спектрального анализа. Например, учет кинетической энергии потерянных скоростей может быть выполнен по теории Карно [6].

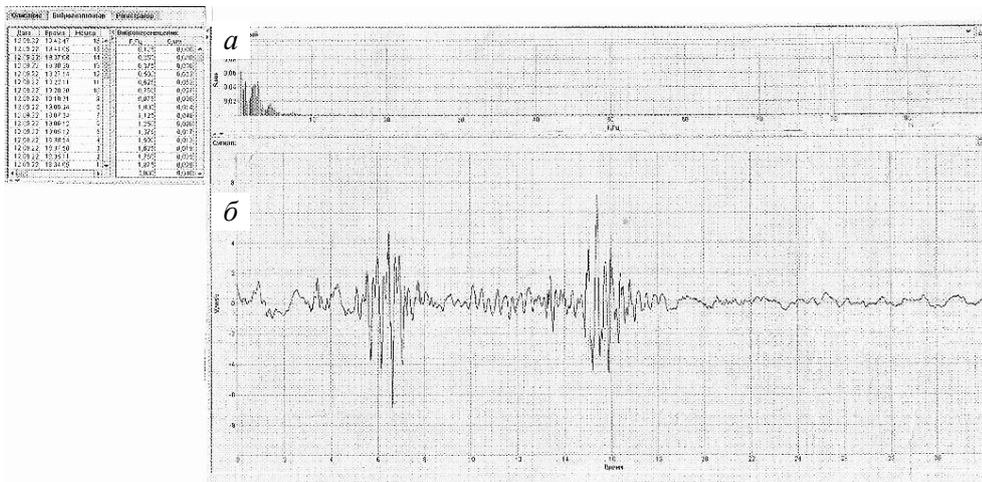
Спектральный анализ амплитудно-частотных характеристик свободных колебаний балок удобно проводить с применением методов искусственной периодизации. Ударное воздействие по Герцу и вызываемые им колебания рассматриваются как непериодический однократный процесс, случайный по своей природе, характеристики которого нельзя точно предвидеть. Численные методы амплитудно-частотного спектрального анализа свободных колебаний всегда были и остаются трудоемкими, особенно в случае непериодических колебаний с разложением временных рядов Фурье по спектральным составляющим с помощью полосовой цифровой фильтрации [7]. Это позволяет исследовать закономерности формирования колебательного процесса, определять спектр генерации собственных колебаний, а также оценивать фазу и модули взаимного спектра, функции когерентности спектра мощности записанных временных рядов Фурье.

Характеристики и частоты собственных колебаний могут оцениваться уровнем половинной мощности спектральных пиков выборки [8]. Методом экспресс-анализа удастся вычислить спектр сигнала любого участка выборки, заполнить цифровую фильтрацию (полосу низких и высоких частот) выборки, оценить динамику спектрального состава, а также мгновенные спектры колебаний с использованием искусственной периодизации. Корреляция в спектральном анализе одной выборки записи колебания используется на протяжении одного сегмента обработки выборки и выбирается исходя из заданных условий (рис. 4, а):

$$T_s \geq \frac{4\pi}{\varepsilon_{c \min}}, \quad (13)$$

где $\varepsilon_{c \min}$ – минимальное возможное значение ε_c для конкретной формы колебания, импульса, ударной силы и связей.

Метод корреляции заключается в том, что при однократном ударном воздействии спектр реакции в балке, измеренной в любой ее точке, достигает максимума на тех же частотах, на которых находится максимум спектра воздействия в виде собственных частот самой балки. Для разделения максимумов используется правило [9, 10], согласно которому на собственных частотах все точки балки колеблются в фазе 0° либо в противофазе $\pm 180^\circ$ в виде синхронных колебаний. В середине пролета балки амплитуда колебания первой основной гармоники максимальная, поскольку именно там находится пучность стоячих волн второй гармоники колебания (рис. 4, б).



m_p и m_δ – приведенная масса соответственно нагрузки и балки; I – момент инерции; $\ln \delta$ – логарифмический декремент затухания, равный $\ln \frac{A_0}{A_i} - \frac{1}{n} \ln \frac{A_i}{A_{i+1}}$, A_i – амплитуда i -го периода колебания, t – продолжительность импульса колебания.

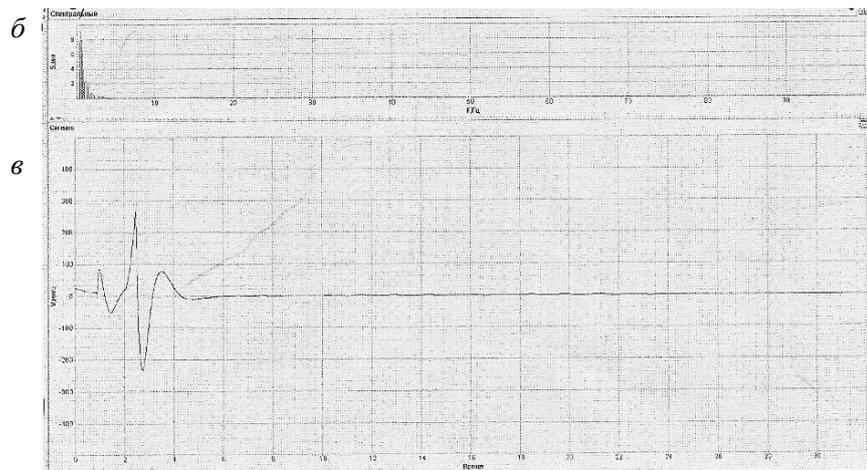


Рис. 5. Динамическое нагружение ударом одиночного автомобиля:

a – общий вид удара; *б* – спектр частот при въезде на балку; *в* – спектр частот ударного воздействия при $x = 1,0$

Fig. 5. Dynamic load from one vehicle:

a – general view of impact; *b* – frequency spectrum when entering the beam; *c* – frequency spectrum at $x = 1.0$

При соударении тел по методу Герца учитывается инерционное увеличение амплитуды A_i за счет диссипации. Тогда логарифмический декремент затухания $\ln \delta$ будет равен

$$\left. \begin{aligned} \ln \delta &= \frac{\pi - \eta}{Y_1 - \frac{\eta_2}{4}} \text{ – по С. Крэнделлу} \\ \text{или} \\ \ln \delta &= \frac{\pi \cdot E}{\eta_1 \cdot p_0} \text{ – по Г. Кольскому,} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

где η – коэффициент инерционного увеличения амплитуды A_i свободных колебаний за счет диссипации [12]; η_1 – коэффициент диссипации = 0,01.

В стадии численного анализа виброграмм свободных колебаний (рис. 5, б, в) величина логарифмического декремента затухания равна $1,7 \cdot 10^{-3}$, тогда как при спектральном анализе его величина составляет $\pi \frac{\Delta p_0}{p_0}$, где Δp_0 – ширина

спектра частот свободного колебания на уровне максимума спектральной плотности и ширине спектра амплитуд выборки, определяемой в зависимости от вида импульса: для синусоидального $\Delta f = \frac{1}{t}$, для треугольного $\Delta f = \frac{2}{t}$.

Спектральная частота собственных колебаний p_0 определяется исходя из формы колебаний в виде

$$Y = 0,58 \sin \frac{\pi \cdot x}{l}, \quad (16)$$

где 0,58 – коэффициент, введенный для сопоставления результатов точного и приближенного спектральных методов [13]; l – длина балки.

Первая, основная, частота собственных колебаний определяется из выражения

$$p_{01} = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}, \quad (17)$$

где m – приведенная масса груза и балки.

Независимо от вида удара, частота собственных колебаний при численном анализе одинакова, тогда как при спектральном анализе обнаружено расхождение в значениях: при упругом ударе частота собственных колебаний составила 2,86 Гц (период 0,350 с) с доверительным интервалом $\pm 0,15$ Гц и $\pm 0,0017$ с, а при неупругом ударе частота собственных колебаний равна 2,974 Гц (период 0,336 с). Расхождение составило 4,5 %. Коэффициент затухания ε , определенный по полуширине спектрального пика выборки на промежутке $(t_0 - t_1)$, соответствующем полному периоду собственных колебаний, равен

$$\varepsilon = \frac{1}{t_1 - t_0} \ln [A_i(t_1) - A(t_0)], \quad (18)$$

где $A(t_i)$ – среднее значение амплитуды между начальным и конечным элементами времени выбранного диапазона (момент времени $t = t_0$ и $t = t_1$).

Спектральный анализ отдельных участков выборки колебаний позволяет оценить динамику спектра колебаний балки с учетом их спектральной плотно-

сти. Например, при одиночном ударе по пролетному строению моста теоретически рассчитанная частота собственных колебаний составила $p_0 = 3,0$ Гц, $T_c = 0,333$ с, тогда как спектральный анализ виброграмм показал значения $p_0^3 = 2,94$ Гц, $T_c^3 = 0,3$ с, коэффициент затухания $0,1 \text{ с}^{-1} \leq \varepsilon \leq 0,18 \text{ с}^{-1}$, логарифмический декремент $\ln \delta = 0,046$ [14]. На рис. 6 приведены спектральные плотности характеристик участков виброграмм спектрального анализа.

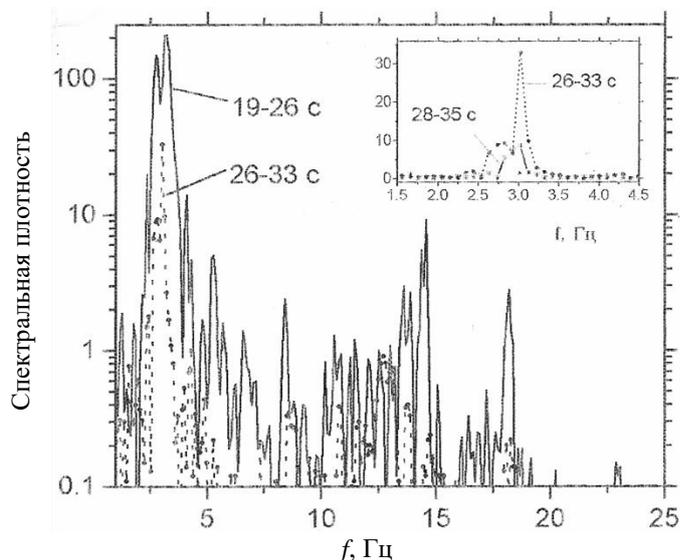


Рис. 6. Спектральные плотности частотных колебаний
Fig. 6. Spectral density of frequency modes

Таким образом, весь процесс спектрального анализа виброграмм и осциллограмм колебаний балок пролетных строений мостов основан на амплитудно-временном преобразовании исходных выборок. Методика включает интегрирование и дифференцирование исходных данных с учетом результатов записывающих и регистрирующих вибрационных преобразователей, вычисление частотного спектра выбранного участка реализации с использованием преобразований Фурье и Лапласа. Преобразование Лапласа, связывающее функции комплексного переменного (изображение) с функцией вещественного переменного (оригинала), в ряде случаев оказывается более удобным, чем преобразование Фурье [15, 16]. В процессе центрирования сигналов и спектральной обработки используются окна Хеминга и Хана, а их полуширина выбирается как часть от количества точек в спектре выборки. В отличие от интеграла Фурье, где функция $f(t)$ представляется суммой бесконечно большого числа элементарных гармонических колебаний, для преобразования Лапласа функция $f(t)$ представляется суммой бесконечно большого числа элементарных колебаний, убывающих по экспоненциальному закону:

$$f(t) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\sigma-\infty}^{\sigma+\infty} F(p) l^m \cdot dp \right), \quad (19)$$

где $p = i \cdot p_0$; $F(p)$ – изображение; i – выбранный вид гармоники; p_0 – частота собственных колебаний i -й формы гармоники колебаний.

В алгоритме расчета взаимного спектра выборки (+ или –) в преобразовании Фурье вводится корреляционная функция двух переменных $x(t)$ и $y(t)$. Корреляция – это эргодический стационарный процесс усреднения при вычислении спектра случайных величин выборки. Случайный процесс выборки при колебаниях представляется как функция $\xi(\Theta, t)$ двух переменных: случайный параметр $\Theta = p_0$ и непрерывный текущий параметр $t = t_1$. При $t = t_0$ определяемое усреднение есть не что иное, как операция интегрирования, например, для определения среднего времени выборки $t = t_1 = t_{cp}$ справедливо выражение вида

$$\xi(t_1 = t_{cp}) = \frac{1}{T} \int_{\Theta}^{\frac{T}{2}} \xi(t_1) dt. \quad (20)$$

Средняя функция корреляции и средний спектр выборки связаны между собой преобразованием Фурье в виде

$$S_{t(p_0)} = \int_{t=0}^{t_{cp}} \xi(t_{cp}) e^{-p_0 \cdot t_{cp}} dt_{cp}. \quad (21)$$

Проведя усреднение по времени, получим связь между средним спектром и средней функцией корреляции. Произведение $S_{t(p_0)} d p_0$ представляет собой элементарную спектральную плотность дисперсии частот на участке выборки, соответствующей элементарному отрезку $d p_0$ по оси частот (см. рис. 6). По величине спектральной плотности дисперсии выборки определяем истинную корреляционную функцию случайного процесса колебания. Таким образом, спектральная плотность дисперсии $S_{t(p_0)}$ аналогична спектральной энергетической мощности исследуемой выборки колебания (рис. 7).

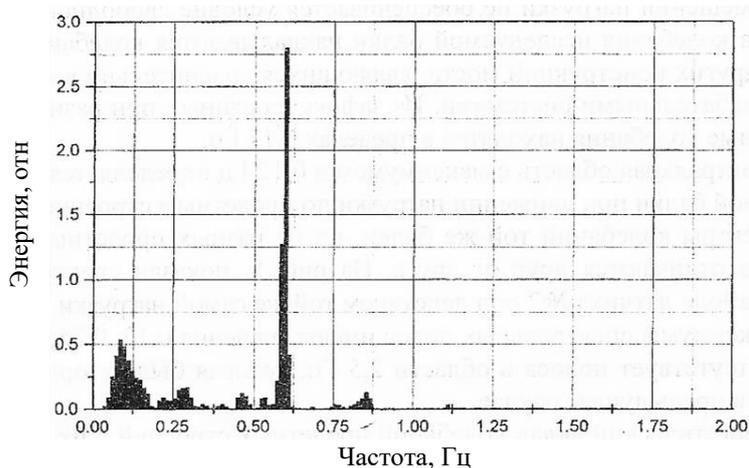


Рис. 7. Энергетический спектр мощности выборки без учета инерционности массы балки
Fig. 7. Energy spectrum of sampling regardless of the beam mass inertness

В этом случае энергетическая мощность спектра выборки выражается отношением

$$\frac{S_{t(p_0)}}{t_1} = \frac{S_{t(p_0)}}{T}. \quad (22)$$

Отношение (22) приближает к нормированию характеристик случайного процесса. Разделив корреляционную функцию $f(t)$ и спектральную плотность $S_{t(p_0)}$ на дисперсию, получаем показатель нормированной корреляционной функции в виде коэффициента корреляции случайного процесса от 0 до ± 1 в зависимости от продолжительности интервала корреляции t . Выражение для $S_{t(p_0)}$ спектральной плотности частотных значений выборки включает область отрицательных и положительных частот. Интегральное преобразование $S_{t(p_0)}$ [17] при значении

$$A_0 = 2\alpha \left[\frac{1}{\alpha^2 (\beta - p_0)^2} + \frac{1}{\alpha^2 + (\beta + p_0)^2} \right]$$

будет иметь вид

$$S_{t(p_0)} = \frac{\alpha}{\pi} A_i \cdot x \frac{p_0^2 + \alpha^2 + \beta^2}{(p_0^2 - \beta^2 - \alpha^2) + 4\alpha^2 p_0^2}, \quad (23)$$

где $\alpha = 1$; $\beta = 2,5$ – для синусоидальной формы колебания с импульсом типа, показанного на рис. 1, з. Для положительных частот выражение (23) имеет вид

$$S_{t(p_0)} = \frac{2\alpha}{\pi} A_i \cdot x \frac{p_0^2 + \alpha^2 + \beta^2}{(p_0^2 - \beta^2 - \alpha^2) + 4\alpha^2 p_0^2}. \quad (24)$$

Распределение плотностей вероятностей с помощью дельта-функции Дирака позволяет выделить одиночный импульс выборки с характеристиками

$p_0 = \frac{2\pi}{T}$ и $S_{t(p_0)}$ в виде

$$S_{t(p_0)} = T \frac{\sin p_0 \frac{T}{2}}{p_0 \frac{T}{2}}. \quad (25)$$

Выводы

Исследование закономерности формирования колебательного процесса ударным воздействием по методу Герца основано на определении спектра генерации амплитудно-частотных характеристик собственных колебаний, фазовых соотношений и модулей взаимного спектра, а также функции когерентности спектра энергетической мощности. Предложенный метод позволяет анализировать выборки с использованием преобразований Фурье и Лапласа.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Тихонов В.И. Выбросы случайных процессов // Успехи физических наук. 1962. Т. 77. № 3. С. 70–73.
2. Иорши Ю.И. Виброметрия. Москва : Государственное научно-техническое изд-во машиностроительной литературы, 1963. 756 с.
3. Шиманский Ю.А. Динамический расчет судовых конструкций. Ленинград : Государственное изд-во судостроительной литературы, 1948. 407 с.
4. Бочкарев Н.Н., Картопольцев А.В. Техническая вибродиагностика пролетных строений мостов // Акустика речи, медицинская и биологическая акустика, архитектурная и строительная акустика, шумы и вибрации, аэроакустика : сб. трудов XX сессии Российского акустического общества. Том 3. Москва : ГЕОС, 2008. С. 228–233.
5. Мак-Миллан В.Д. Динамика твердого тела. Москва : Изд-во иностранной литературы, 1951. 467 с.
6. Анпель П. Теоретическая механика. Том II. Москва : Государственное изд-во физико-математической литературы, 1960. 487 с.
7. Батуев Г.С., Голубков Ю.В., Ефремов А.К., Федосов А.А. Инженерные методы исследования ударных процессов. Москва : Машиностроение, 1969. 247 с.
8. Харкевич А.А. Спектры и анализ. Москва : Физматгаз, 1962. 249 с.
9. Кренделл С. Случайные колебания. Москва : Мир, 1967. 356 с.
10. Гусев С.К. К анализу выбросов случайных функций // Известия вузов. Машиностроение. 1967. № 3. С. 27–30.
11. Хазанов М.Л. Методика анализа результатов динамических испытаний мостовых сооружений // Наука и техника в дорожной отрасли. 2007. № 3. С. 26–28.
12. Картопольцев А.В., Колмаков Б.Д., Зголич М.В. К вопросу о диссипативности деформирования балок пролетных строений мостов // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. 2016. № 2. С. 194–199.
13. Кан С.Н., Цветков А.В. Определение собственных частот поперечных колебаний прямых стержней при сложных граничных условиях // Новые облегченные конструкции зданий : межв. сб. статей. Ростов-на Дону, 1982. С. 92–98.
14. Бочкарев Н.Н., Картопольцев А.В. Автоматизация мониторинга вибрационных характеристик пролетных строений автодорожных мостов // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. 2003. № 1. С. 161–167.
15. Paltre P., Proulx J. Structure testing of large – Seale Structures // Structural Engineering International. 1997. V. 7. № 1. P. 29–34.
16. Патент № 2284489 Российская Федерация, МПК G01M 7/02 (2006.01). Способ вибрационного контроля технического состояния пролетных строений мостовых конструкций : № 2005109688/28 : заявл. 04.04.2005 : опубл. 27.09.2006 / Селиванова Т.В., Бочкарев Н.Н., Картопольцев А.В. Государственный реестр изобретений Российской Федерации, 2005.
17. Spliner L.M. Errors in power spectra due to finite sample // J.Appl. phys. 1954. V. 25. № 5. P. 653–659.

REFERENCES

1. Tikhonov V.I. Emissions of Random Processes. *Uspekhi Fizicheskikh Nauk*. 1962; 77 (3): 70–73. (In Russian)
2. Iorish Yu.I. Vibrometry. Moscow: Mashinostroenie, 1963. 756 p. (In Russian)
3. Shimansky Yu.A. Dynamic Calculation of Ship Structures. Leningrad: Sudostroenie. 1948. 407 p. (In Russian)
4. Bochkarev N.N., Kartopol'tsev A.V. Technical Vibration Diagnostics of Bridge Spans. In: *Proc. 20th session of the Russian Acoustical Society "Speech, Medical and Biological, Architectural and Building Acoustics, Noise and Vibration, Aeroacoustics"*, vol. 3, Moscow: GEOS, 2008, Pp. 228–233. (In Russian)
5. Macmillan W.D. Dynamics of Rigid Bodies. Moscow: Foreign Literature Publishing House. 1951. 467 p. (Russian translation)
6. Appel P. Theoretical Mechanics. Vol. T. II. Moscow: Fizmatlit, 1960. 487 p. (In Russian)

7. *Batuev G.S., Golubkov Yu.V., Efremov A.K., Fedosov A.A.* Engineering Methods in Studying Impact Processes. Moscow: Mashinostroenie, 1969, 247 p. (In Russian)
8. *Kharkevich A.A.* Spectra and Analysis. Moscow: Fizmatgiz, 1962. 249 p. (In Russian)
9. *Krendell S. (Ed.)* Random Oscillations. Moscow: Mir, 1967. 356 p. (Russian translation)
10. *Gusev S.K.* On the Analysis of Outliers of Random Functions. *Izvestiya vuzov. Mashinostroenie.* 1967; (3): 27–30 (In Russian)
11. *Khazanov M.L.* Analysis of dynamic test results of bridge structures. *Nauka i tekhnika v dorozhnoi otrasli.* 2007; (3): 26–28. (In Russian)
12. *Kartopoltsev A.V., Kolmakov B.D., Zgolich M.V.* Dissipative Deformation of Bridge Span Beams. *Vestnik of Tomsk State University of Architecture and Building.* 2016; (2): 194–199. (In Russian)
13. *Kan S.N., Tsvetkov A.V.* Determination of natural frequencies of transverse vibrations of straight rods under complex boundary conditions. In: Cool. Papers ‘New Lightweight Building Structures’, Rovstov-on-Don, 1982, Pp. 92–98. (In Russian)
14. *Bochkarev N.I., Kartopoltsev A.V.* Automation of Monitoring Vibration Characteristics of Road Bridge Spans. *Vestnik of State University of Architecture and Building.* 2003; (1): 161–167. (In Russian)
15. *Paultre P., Proulx J.* Dynamic Testing of Large-Scale Structures. *Journal of the International Association for Bridge and Structural Engineering.* 1997; 1/97: 29–34.
16. *Bochkarev N.N., Kartopoltsev A.V.* Vibration Monitoring of Technical Condition of Bridge Spans. Patent Russ. Fed. No. 228448, 2005. (In Russian)
17. *Spetner L.M.* Errors in Power Spectra due to Finite Sample. *Journal of Applied Physics.* 1954; 25 (5): 653–659.

Сведения об авторе

Картопольцев Андрей Владимирович, канд. техн. наук, доцент, ООО «ДИАМОС», 634003, г. Томск, пер. Соляной, 24/1, diamos@mail.ru

Author Details

Andrey V. Kartopoltsev, PhD, A/Professor, ООО “DIAMOS”, 24/1, Solyanoy Str., 634003, Tomsk, Russia, diamos@mail.ru