

Вестник Томского государственного
архитектурно-строительного университета.
2025. Т. 27. № 1. С. 217–232.

Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo
arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta –
Journal of Construction and Architecture.
2025; 27 (1): 217–232.
Print ISSN 1607-1859
Online ISSN 2310-0044

ISSN 1607-1859 (для печатной версии)
ISSN 2310-0044 (для электронной версии)

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

УДК 624.21.014.072

DOI: 10.31675/1607-1859-2025-27-1-217-232

EDN: ZRTVFQ

К ВОПРОСУ РАСЧЕТА АСФАЛЬТОБЕТОННОЙ ПЛИТЫ НА УПРУГО-ПОДАТЛИВОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

**Наталья Анатольевна Чернышова, Александр Аверьянович Алексеев,
Алексей Андреевич Банников**

*Томский государственный архитектурно-строительный университет,
г. Томск, Россия*

Аннотация. *Актуальность.* Совершенствование расчета конструктивного элемента нежесткой дорожной одежды покрытия на упруго-податливом полупространстве с учетом инерционности поведения является актуальной задачей в теории упругости и упруго-вязко-пластического деформирования.

Цель. Уточняется расчет плиты из асфальтобетона (как конструктивного элемента проезжей части) от давления колеса автомобиля с определением перемещений, податливости полупространства и с частичным отрывом плиты от основания и «паразитных» колебаний методами упругости строительной механики.

Практическая значимость. Представлен математический аппарат расчета при контакте временной автомобильной нагрузки с асфальтобетонной плитой проезжей части в зависимости от граничных условий закрепления плиты на упруго-податливом полупространстве.

Ключевые слова: асфальтобетон, проезжая часть, колебания, упругие связи, временная нагрузка, деформации, прочность

Для цитирования: Чернышова Н.А., Алексеев А.А., Банников А.А. К вопросу расчета асфальтобетонной плиты на упруго-податливом полупространстве // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. 2025. Т. 27. № 1. С. 217–232. DOI: 10.31675/1607-1859-2025-27-1-217-232. EDN: ZRTVFQ

ORIGINAL ARTICLE

STRENGTH ANALYSIS OF PREFABRICATED BITUMINOUS SLAB ON ELASTIC HALF-SPACE

Natalya A. Chernyshova, Aleksandr A. Alekseev, Aleksei A. Bannikov

Tomsk State University of Architecture and Building, Tomsk, Russia

Abstract. The paper studies a prefabricated bituminous slab on elastic half-space having inertia when operating at live loads.

Purpose: The building mechanics problem is solved for the prefabricated bituminous slab as a structural element of roadway with the detection of displacements of elastic half-space, partial slab detachment from the base and parasitic oscillations.

Research findings: An attempt is made to provide the accurate strength analysis of the prefabricated bituminous slab.

Practical implications: A mathematical calculation apparatus is presented for the contact of a temporary automobile load with the bituminous slab, depending on the boundary conditions of elastic half-space.

Keywords: bitumen, carriageway, vibrations, elastic bonds, live load, deformation, strength

For citation: Chernyshova N.A., Alekseev A.A., Bannikov A.A. Strength Analysis of Prefabricated Bituminous Slab on Elastic Half-Space. Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta – Journal of Construction and Architecture. 2025; 27 (1): 217–232. DOI: 10.31675/1607-1859-2025-27-1-217-232. EDN: ZRTVFQ

Расчет асфальтобетонных плит на упругом и упруго-податливом полупространстве является одной из сложных задач строительной механики [1]. К общим трудностям, присущим расчету плит различной толщины, состоящих из двух и более слоев асфальтобетона, добавляются вопросы, связанные с установлением перемещений поверхности упруго-податливого полупространства, на которое опирается асфальтобетонное покрытие с учетом роли упругих связей. Передаваемые от воздействия колеса автомобиля на плиту полупространства нагрузки, особенно динамические и инерционные, влияют на отрыв плиты от основания с одновременным проявлением «паразитных» колебаний [2]. В настоящее время наиболее приемлемые решения в задачах расчета различных плит конечной и бесконечной длины на упруго-податливом полупространстве отражены в известных работах О.Я. Шехтера, А.В. Винокуровой, Б.З. Коренева, Г.С. Шапиро, М.М. Филоненко-Бородич и др.

Поскольку конструктивный элемент нежесткой дорожной одежды в виде асфальтобетонной плиты характеризуется сравнительно невысокой сопротивляемостью изгибу и анизотропией свойств упруго-податливого основания, необходимо совершенствовать методы теоретико-эмпирического расчета, которые должны обладать не только универсальностью, но и введением в расчет теории упругости, строительной механики и механики твердого деформированного тела с учетом проявления в работе плиты проезжей части дополнительных упруго-вязко-пластичных свойств и ползучести во времени, учитывающих деструктивные свойства при статическом и динамическом воздействии нагрузки. В качестве конструктивных решений предлагается рассматривать два варианта [3]:

- один слой асфальтобетона на поверхности упруго-податливого однородного полупространства;
- два слоя асфальтобетона конечной толщины на поверхности упруго-податливого полупространства.

По аналогии с зарубежными исследованиями принимаем за основной вид покрытия двухслойную асфальтобетонную плиту, рассматривая её как саморазгружающуюся слоистую конструкцию во времени за счет наиболее ответственного слоя, непосредственно контактирующего с упруго-податливым полупространством. Тогда условием постоянства во времени эксплуатационных качеств и параметров конструкции при стационарных силовых, температурных и реологических условиях должна обеспечиваться прочность и деформативность в слоях и соответствовать неравенству

$$\Delta\alpha(t) \frac{d}{d\sigma_0(t)} \left(\frac{E_n(t)}{E_b(t)} \right) < \frac{d\sigma_0(t)}{d(t)}, \quad (1)$$

где $\Delta\alpha$ – разница удельной деформации слоев; t – время эксплуатации; E_n – модуль деформации нижнего слоя; E_b – модуль деформации верхнего слоя; σ_0 – напряжение, равное длительному сопротивлению.

Таким образом, расчет асфальтобетонной плиты проезжей части нежестких дорожных одежд рассматривается как задача Буссинеска с граничными условиями расчета схем Н.И. Безухова – А.П. Синицына (рис. 1).

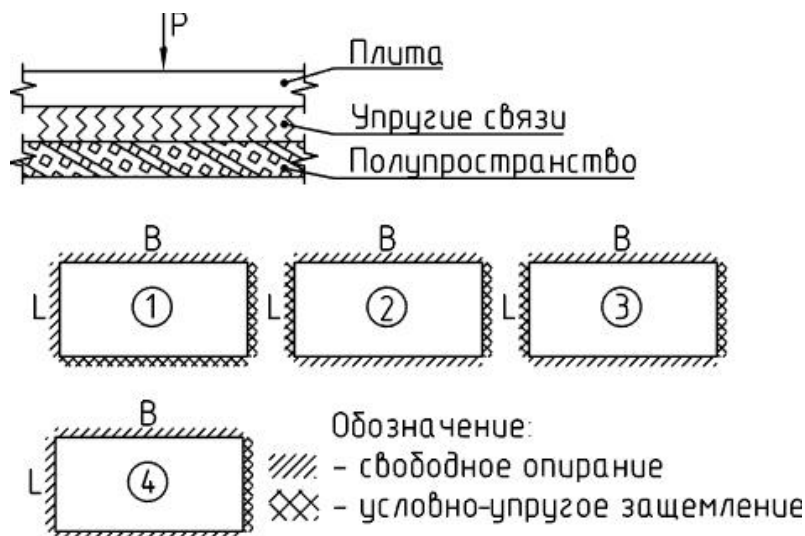


Рис. 1. Расчетная схема и граничные условия асфальтобетонной плиты:

1, 2, 3 – полубесконечной длины; 4 – бесконечной длины

Fig. 1. Calculation scheme and boundary conditions of bituminous slab:

1, 2, 3 – semi-infinite length; 4 – infinite length

Используя элементы эндохронной (упруговязкой) теории упругости и инкрементальной теории пластичности, определяем коэффициент условного упругого защемления λ [4]:

$$\lambda = \kappa_c \frac{R}{EJn}, \quad (2)$$

где EJn – жесткость анизотропной плиты с условно-упругим защемлением, равна $\frac{Eh^3_{пл}}{12(1-\mu)}$; κ_c – коэффициент постели; μ – коэффициент Пуассона; R – равнодействующая сил упругого распределения, действующая на плоскость, ограничивающая полубесконечное или бесконечное тело, равна $\sqrt{x^2 + z^2}$.

На основании бигармонического условия Буссинеска при $R = \sqrt{x^2 + z^2}$ и $\frac{dR}{dz} = \frac{z}{R}$ деформации и напряжения в плите будут определяться [5]:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu \sigma_z]; & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu \sigma_x]; & \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G}; \\ \sigma_x &= \frac{P}{2\pi R^2} \left[\frac{(1-2\mu)R}{R+z} - \frac{3x^3}{R^3} \right]; \\ \sigma_z &= \frac{3P}{2\pi R^2} \frac{z^3}{R^3}; \\ \tau_{xz} &= -\frac{3P}{2\pi R^2} \frac{xz^2}{R^3}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Перемещения и деформации условных упругих связей между плитой и упруго-податливым полупространством определяются равенством

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\text{связей}} &= -\frac{P(1+\mu)(1-2\mu)}{2\pi \cdot E \cdot x}; \\ Y_{\text{связей}} &= \frac{P(1-\mu^2)}{\pi \cdot E \cdot x}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

При $x = 0,5$ м

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\text{связей}} &= -\frac{P(1+\mu)(1-2\mu)}{\pi E}; \\ Y_{\text{связей}} &= -\frac{P(1-\mu^2)}{0,5\pi \cdot E}. \end{aligned} \right\}$$

Расчет асфальтобетонных плит нежесткого типа дорожной одежды, лежащей на упругом основании в виде железобетонных монолитных или сборных плит, достаточно проработан и известен. Более того, совершенствование расчета будет заключаться в рассмотрении несущего слоя асфальтобетонной плиты как упруговязкого полупространства, расположенного на упруго-податливом полупространстве. Под полупространством понимается тело, ограниченное с одной стороны плоскостью (рис. 1), основной характеристикой которого является перемещение ε_n . Существует и другое определение полупространства – это тело, ограниченное плоскостью-полуплоскостью.

Все контактные задачи на полупространстве, ограниченные полуплоскостью, относятся к задачам Буссинеска – Фламана [5], а задача на полупространстве, ограниченная плоскостью-полуплоскостью, – к задачам Буссинеска [6]. Для таких вариантов расчета предельное состояние по прочности и деформативности связано с нарушением сплошности верхнего слоя плиты покрытия и рассматривается во времени с наступлением «местного» предельного состояния упруго-податливого полупространства с характеристиками [7]:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_n &= -\frac{P(1-\mu)x}{2\pi ER^2} \left[\frac{(1-2\mu)R}{R+z} - \frac{z}{R} \right]; \\ Y_n &= \frac{P(1+\mu)}{2\pi \cdot E \cdot R} \left[2(1-\mu) + \frac{z^2}{R^2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Асфальтобетонная плита проезжей части относится к плитам средней толщины и рассматривается в трех вариантах.

1. Плита конечной или бесконечной длины на упруго-податливом полупространстве – модель Ю.Н. Работнова. При изгибе такой плиты прогиб с учетом «паразитного» явления в плите и полупространстве (рис. 2) равен:

$$Y = \frac{M}{2\alpha^2 \cdot EJx} + \frac{Q}{2\alpha^3 EJ}, \quad (6)$$

где $Q = \frac{dM}{dx}$; M – изгибающий момент от силы $P = P_l \cdot x$.

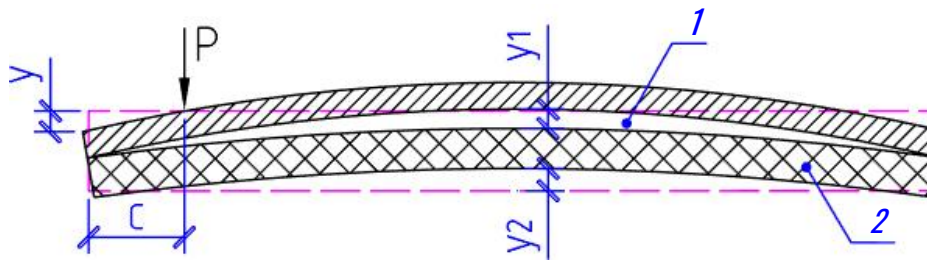


Рис. 2. Изгиб полубесконечной плиты на упруго-податливом полупространстве при $y_1 = y_2$:

1 – плита; 2 – полупространство

Fig. 2. Bending of a semi-infinite slab on elastic half-space at $y_1 = y_2$:

1 – slab; 2 – half-space

«Паразитное» явление для плиты, для полупространства и для деформирования упругих связей носит деструктивный характер, влияет на сдвигоустойчивость слоев покрытия и отрыв от упруго-податливого полупространства (рис. 3) [8].

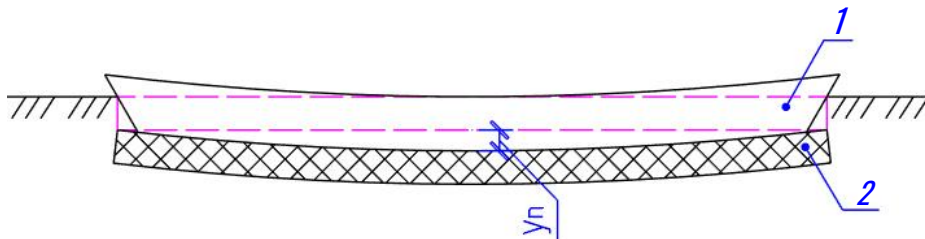


Рис. 3. Расчетная схема плиты с учетом «паразитного» изгиба полупространства:

1 – плита; 2 – полупространство

Fig. 3. Calculation scheme of the slab with parasitic bending of half-space:

1 – slab; 2 – half-space

2. Плита неограниченной (бесконечной) длины на упруго-податливом полупространстве [9].

Реакция упруго-податливого полупространства пропорциональна прогибу. В этом случае имеет место равенство вида

$$g = -C \cdot y, \quad (7)$$

где g – реакция, распределенная по длине плиты, равна $\frac{P}{l_{\Pi}}$; l_{Π} – расчетная длина плиты; $C \cdot y$ – реакция упруго-податливого полупространства; C – расстояние от нагрузки P до края плиты.

Расчетная схема в виде двухслойной среды, состоящей из одного или двух слоёв, лежащей на слое упруго-податливого полупространства из ограниченного по высоте слоя щебня или другого материала, является условием совершенствования расчета в упругой и упругопластической стадиях работы. Щебеночное основание под асфальтобетонной плитой как упруго-податливое полупространство представляет собой «эталонную модель» для решения контактных задач при воздействии статических и динамических нагрузок. В этом случае процесс нагружения можно считать равновесным – в каждый момент времени нагружения соблюдается условие равновесной равнонапряженности, для которой справедливы статические методы механики деформированного тела. Это упрощение в дальнейшем способствует достижению «местного предельного» равновесия по сдвигу в одном элементе либо на границе плиты и упруго-податливого полупространства и отождествляется с предельным состоянием дорожной одежды. Перемещение слоев в плоскости их контакта будет означать появление максимальных активных напряжений сдвига, формулы (4), (5). Как известно, упругость, вязкость и пластичность многих материалов, особенно геологического происхождения (грунты, пески, скальные породы), нельзя ассоциировать с законом Гука и поверхностью пластического течения Губера – Мизеса – Генки, для оценки напряженно-деформированного состояния конструкции «плита – упругие связи – упруго-податливое полупространство» необходимо использовать известные законы ортогональности и постулат Друкера [10, 11]. Ввиду малости деформаций плиты, по сравнению с её толщиной, для плиты средней толщины возможно условие, что уравнения деформаций и перемещений нелинейных параллельных осей OZ принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon(x, z); \\ y &= y(x, z). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

В этом случае соотношения между «напряжениями и деформациями» могут быть записаны в виде

$$\left. \begin{aligned} \sigma_i &= (\sigma_{ij} - \delta_{\Pi} \cdot \sigma_0); \\ \varepsilon_i &= (\varepsilon_{ij} - \delta_{\Pi} \cdot \varepsilon_0), \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где σ_{ij} – девиатор напряжений – характеризует, насколько заданное напряженное состояние отличается (отклоняется) от объемного; $\sigma_0 = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$; $\sigma_{ij} \cong \sigma_0$. δ_{Π} – символ Кронекера при использовании ортогональной системы в декартовых координатах: $\delta_{\Pi} = 1$ при $\sigma_{ij} = \sigma_0$; $\delta_{\Pi} = 0$, если $\sigma_{ij} \neq \sigma_0$; ε_{ij} – компонента девиатора деформаций. Для упругого тела достаточными являются зависимости

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2Q} \left(\sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{3\mu}{1+\mu} \sigma_0 \right); \\ \varepsilon_0 &= \frac{1}{2Q} \left(\frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3} \right); \\ \sigma_{ij} &= 3G \cdot \varepsilon_{ij}, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

где $G = \frac{E}{3}$.

Для асфальтобетонной плиты зависимость между σ_i (напряжением), ε_i (деформацией) и скоростью деформации $\dot{\varepsilon}_i$, как для упруговязкого материала, может быть принята в виде

$$\sigma_i = E \cdot \varepsilon_i + E \cdot \dot{\varepsilon}_i = 2G \cdot \dot{\varepsilon}_i, \quad (11)$$

где $G = \frac{E}{2}$; $\dot{\varepsilon}_i$ – скорость деформации.

Для плиты средней толщины из упруговязкого пластического материала рассматриваются два случая. Первый – плита нагружается силами P_i от проходящего транспорта; второй – плита разгружается после ухода транспорта с расчетного участка плиты. Принимаем в расчет $E_{дл} = E$ – длительный модуль упругости, равен модулю Юнга, и $E_m > E$ – мгновенный модуль. Тогда в процессе нагружения закон деформированного состояния во времени для упруго-вязкого тела действует при условии

$$\sigma_i = E \cdot \varepsilon + E_m \cdot n \cdot \varepsilon_i, \quad (12)$$

где $n = \frac{E_m}{E_{дл}}$ – коэффициент вязкости; $E_{дл} = 2G$; $G = \frac{E_m}{2}$.

Если в некоторый момент времени $t_0 - t_i$ после ухода нагрузки происходит процесс разгрузки, то плита, получив предварительные деформации удлинения (укорочения), будет следовать закону

$$\varepsilon_i = \varepsilon_0 \cdot e^{\frac{-E(t_0 - t_i)}{E_m \cdot n}}, \quad (13)$$

где ε_0 – начальная (исходная) деформация в теле при $t = t_0$.

Когда нагрузка имеет постоянную скорость изменения при $t = 0$, $\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E_m}$.

При $t = t_i$ выражение трансформируется и имеет вид

$$\sigma_t = E_m \cdot \varepsilon_i. \quad (14)$$

Двухслойная асфальтобетонная плита средней толщины изгибается не только под действием конкретных сил от временной нагрузки в зависимости от граничных условий, но и от сил срединной плоскости, расположенной между слоями h_b и h_n или посередине каждого слоя. Это позволяет для плит средней толщины при $h_{пл} \leq \frac{1}{5} b_{пл}$ учитывать деформации срединной плоскости, умень-

шая погрешности в расчетах на величины $\frac{h_{пл}^2}{b_{пл}^2}$ по сравнению с единицей. Для плиты прямолинейной с нормальными деформациями в срединной плоскости в процессе нагружения происходит процесс искривления (рис. 4, а, б) так, что деформации сдвига по толщине плиты изменяются по параболическому закону (квадратной параболы), и выражение для нормальных напряжений по высоте σ_z принимается равным:

$$\sigma_z = \frac{P_i}{2} \left(1 - 3 \frac{z}{h_{пл}} + 4 \frac{z^2}{h_{пл}^2} \right). \quad (15)$$

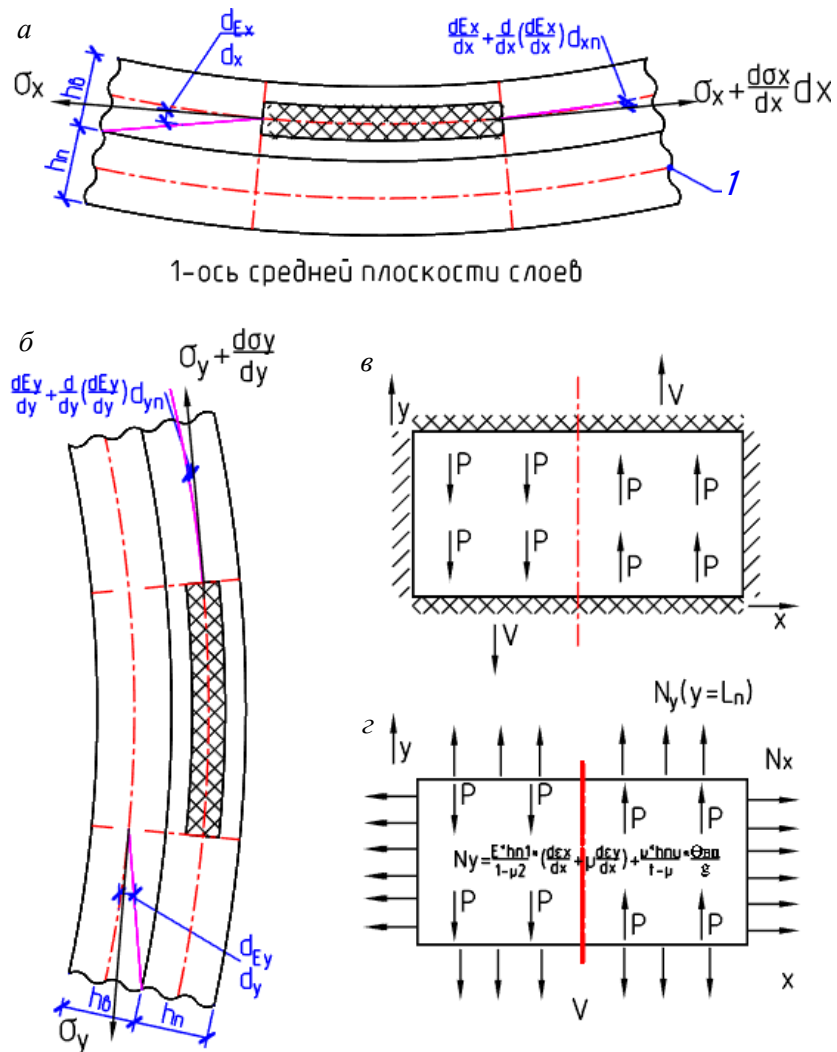


Рис. 4. Изгиб двухслойной плиты от сил в срединной плоскости:
а, б – от действия поперечных сил; в, г – от действия сдвиговых сил
Fig. 4. Bending of a two-layer slab due to median plane forces:
а, б – transverse forces; в, г – shear forces

Нормальные напряжения при интегрировании ε_z по z будут равны:

$$\varepsilon_z = \varepsilon_{\text{ср}} + \frac{\mu}{1-\mu} \frac{z^2}{2} \gamma_{\text{сдв}}, \quad (16)$$

где $\varepsilon_{\text{ср}}$ – перемещение в срединной плоскости в функции x, y, z ; $\gamma_{\text{сдв}}$ – некоторая функция сдвига.

Для плит, обладающих жесткостью на изгиб $E \cdot J_n$, влиянием сил, направленных перпендикулярно срединной плоскости, пренебрегаем [12]. Таким образом, функция интенсивности деформации срединной плоскости будет иметь вид

$$f(\varepsilon_i) = \lambda \left(1 - \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_{\text{ср}}} \right), \quad (17)$$

где $\lambda = 1 - \frac{G}{E}$ – параметр некоторого разупрочнения материала в плите. Тогда напряжения в плите с учетом напряжений и деформаций срединной плоскости запишутся в виде

$$\sigma_i = E \left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_{\text{ср}}} \right) \left(1 - \frac{G}{E} \right) \right] \varepsilon_i, \quad (18)$$

где $\varepsilon_i = \frac{\sigma_T}{E'}$; E' – секущий модуль деформации.

При совместном действии поперечных и продольных сил в срединной плоскости в виде сдвига плоскостей необходимо иметь уравнение равновесия взаимосвязи от влияния поперечных нагрузок P_i на деформацию в срединной плоскости, которое рассматривается в нелинейной теории упругости.

При составлении уравнения равновесия проекции напряжений σ_x на ось x , σ_y на ось y , σ_z на ось z , касательных с учетом уклона изогнутой срединной плоскости τ_{xy} на ось oz и oy , при $z = \frac{h_{\text{пл}}}{2}$ и $z = h_{\text{пл}}$ значения $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xz}$ будут соответственно равны:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{GM'_x}{h_{\text{пл}}^2}; \\ \sigma_y &= \frac{GM'_y}{h_{\text{пл}}^2}; \\ \tau_{xz} &= \frac{3}{2} \frac{Q_x}{h_{\text{пл}}}, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

где

$$M'_x = \int_{-\frac{h_{\text{пл}}}{2}}^{\frac{h_{\text{пл}}}{2}} \sigma_x \cdot \psi_z \cdot d_z;$$

$$\psi_z = \frac{2-\mu}{1-\mu} \frac{z^3}{6} - \frac{2}{1-\mu} \frac{h_{пл}^2}{8};$$

$$Q_x = \int_{-\frac{h_{пл}}{2}}^{\frac{h_{пл}}{2}} \tau_{yz} \frac{d\psi_z}{dz} dz.$$

Значения интенсивности сил, действующих в срединной плоскости N_x , N_y , N_z , соответственно равны, кг/м:

$$N_x = \int_{-\frac{h_{пл}}{2}}^{\frac{h_{пл}}{2}} \sigma_{xz} dz; \quad N_y = \int_{-\frac{h_{пл}}{2}}^{\frac{h_{пл}}{2}} \sigma_y dy; \quad N_{xz} = \int_{-\frac{h_{пл}}{2}}^{\frac{h_{пл}}{2}} \tau_{xz} dz. \quad (20)$$

Деформации асфальтобетонной плиты на упруго-податливом основании с учетом частичного отрыва плиты от основания, а также влияние её анизотропности и «паразитивности» в процессе эксплуатации определяются по формулам ε_x , ε_y , ε_z , γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{xz} и представлены в таблице.

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= a_{11} \cdot \sigma_x + a_{12} \cdot \sigma_y + a_{13} \cdot \sigma_z + a_{14} \cdot \tau_{xy} + a_{15} \cdot \tau_{yz} + a_{16} \cdot \tau_{xz}; \\ \varepsilon_y &= a_{21} \cdot \sigma_x + a_{22} \cdot \sigma_y + a_{23} \cdot \sigma_z + a_{24} \cdot \tau_{xy} + a_{25} \cdot \tau_{yz} + a_{26} \cdot \tau_{xz}; \\ \varepsilon_z &= a_{31} \cdot \sigma_x + a_{32} \cdot \sigma_y + a_{33} \cdot \sigma_z + a_{34} \cdot \tau_{xy} + a_{35} \cdot \tau_{yz} + a_{36} \cdot \tau_{xz}; \\ \gamma_{xy} &= a_{41} \cdot \sigma_x + a_{42} \cdot \sigma_y + a_{43} \cdot \sigma_z + a_{44} \cdot \tau_{xy} + a_{45} \cdot \tau_{yz} + a_{46} \cdot \tau_{xz}; \\ \gamma_{yz} &= a_{51} \cdot \sigma_x + a_{52} \cdot \sigma_y + a_{53} \cdot \sigma_z + a_{54} \cdot \tau_{xy} + a_{55} \cdot \tau_{yz} + a_{56} \cdot \tau_{xz}; \\ \gamma_{xz} &= a_{61} \cdot \sigma_x + a_{62} \cdot \sigma_y + a_{63} \cdot \sigma_z + a_{64} \cdot \tau_{xy} + a_{65} \cdot \tau_{yz} + a_{66} \cdot \tau_{xz}. \end{aligned}$$

Деформации, мм	Напряжения, МПа					
	σ_x	σ_y	σ_z	σ_{xy}	σ_{yz}	σ_{zx}
ε_x	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}
ε_y	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	a_{26}
ε_z	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	a_{36}
γ_{xy}	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	a_{46}
γ_{yz}	a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	a_{55}	a_{56}
γ_{xz}	a_{61}	a_{62}	a_{63}	a_{64}	a_{65}	a_{66}

При $a_{12} = a_{21}$, $a_{13} = a_{31}$, $a_{14} = a_{41}$, $a_{15} = a_{51}$, $a_{16} = a_{61}$,
 $a_{23} = a_{32}$, $a_{24} = a_{42}$, $a_{25} = a_{52}$, $a_{26} = a_{62}$, $a_{34} = a_{43}$,
 $a_{35} = a_{53}$, $a_{36} = a_{63}$, $a_{45} = a_{54}$, $a_{46} = a_{64}$, $a_{56} = a_{65}$,
 $a_{11} = \frac{1}{E}$, $a_{12} = -\frac{\mu}{E}$, $a_{22} = a_{33} = a_{11}$.

Таким образом, учет деформирования срединной плоскости плиты позволяет для анизотропных тел вести подсчет напряжений по формуле

$$\sigma_i = E' \cdot \varepsilon_i, \quad (21)$$

где $E' = \operatorname{tg} \alpha$ – секущий модуль деформации 1-го рода.

С учетом сдвига формула (21) принимает вид

$$\frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_i = G' \sqrt{2} \varepsilon_i, \quad (22)$$

где $G' = \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{3} E'$ – модуль деформации 2-го рода при сдвиге.

Соотношение между деформациями и напряжениями в физическом законе деформирования представим в виде

$$\sigma + n \cdot \sigma = E \cdot \varepsilon + E_m \cdot n \cdot \varepsilon_i, \quad (23)$$

где $n = \frac{E_m}{E_{дл}}$ – коэффициент вязкости; $E_{дл}$ – длительный модуль упругости, $E_{дл} \approx E$;

E_m – мгновенный модуль упругости, $E_m > E_{дл}$.

Для упруго-вязко-пластического состояния материала асфальтобетонной плиты справедливо равенство

$$\varepsilon = \varepsilon_{уп} + \varepsilon_{пл} = \frac{1}{3E_v} d\sigma, \quad (24)$$

где E_v – объемный модуль деформации, равен:

$$\frac{E}{3(1-2\mu)} \approx 0,84E; \quad \sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}.$$

Приращение неупругих деформаций и напряжений с удалением от места приложения нагрузки для плиты, в том числе и срединной плоскости, удобно определить с использованием так называемой «поверхности неупругой жесткости», представляющей собой геометрию всех мест приращения деформаций и напряжений $d\varepsilon_i$ и $d\sigma_i$, пропорциональных касательному пластическому модулю неупругих деформаций $G_{пл}$ и касательному модулю неупругих напряжений E^* , симметричных между собой в стадии приращения неупругих деформаций из равенства

$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon_i &= 2G'_{пл} \cdot d\varepsilon_{пл}; \quad G'_{пл} = \frac{E}{2}; \\ d\sigma_i &= E^* \cdot d\sigma_{пл} = 3E_v \cdot d\varepsilon_{пл}. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Введем коэффициент β , характеризующий пластические свойства асфальтобетона, равный 2. Тогда неупругие деформации начнут проявляться и развиваться при нагрузке P , равной

$$P = P_T = \frac{\sigma_i(\sigma_T)A}{f \cdot \beta \cdot h_{пл} \frac{A}{2J_{пл}}}, \quad (26)$$

где $h_{пл}$ – высота расчетного слоя плиты; A – площадь поперечного сечения плиты; f – прогиб плиты от P_T ; $J_{пл}$ – момент инерции сечения плиты.

Используя метод упругих решений А.А. Ильюшина, теории малых упругопластических деформаций и диаграмм « $\sigma_i - \varepsilon_i$ » Прандтля, для состояния ε_{cp} запишем условие

$$\left. \begin{aligned} \sigma_i - \sigma_0 &= \frac{2G_{пл}}{\psi_{пл}} (\varepsilon_i - \varepsilon_0); \\ \tau_{xy} &= \frac{G'_{пл}}{\psi_{пл}} \gamma_{xy}, \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

где $\psi_{пл}$ – функция пластичности на поверхности «неупругой жесткости» плиты, равная

$$\psi_{пл} = 1 + \frac{3}{2} \frac{E^* \cdot \varepsilon_{пл}}{\sigma_i (1 + \mu)};$$

где
$$E^* = \frac{E}{1 + \frac{\sigma_i}{\sigma_T}}, \quad G_{пл} = \frac{G}{1 + \frac{\sigma_i}{\sigma_T}}, \quad G = \frac{E}{2};$$

μ – коэффициент Пуассона; $\sigma_i = \sigma_T$, $\varepsilon_{пл} = 0,011$.

Значения интенсивности пластических деформаций, по данным А.И. Биргера, приняты в виде

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{пл} &= 2\sigma_i (\psi_{пл} - 1) \left(\frac{1 + \mu}{3E} \right); \\ \sigma_{пл} &= \frac{E}{1 + \frac{\nu \cdot \varepsilon_{пл}}{\varepsilon_T}} [\varepsilon_i - \varepsilon_{пл} (1 - \nu)], \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

если $\nu = 1$, то $E = E^*$.

График зависимости E^* в функции нагрузки P изображен на рис. 5.

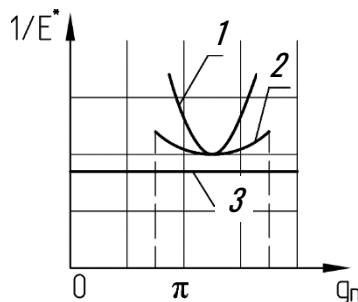


Рис. 5. Зависимость модуля E^* от нагрузки:

1 – по теории пластичности; 2 – с учетом упрочнения; 3 – с учетом анизотропии

Fig. 5. Dependence of elastic modulus on load:

1 – according to plasticity theory; 2 – accounting for hardening; 3 – accounting for anisotropy

Для асфальтобетонной плиты прямоугольной формы с размерами: a – ширина плиты, b – длина – предельная нагрузка, отвечающая предельным значениям пластической деформации $\varepsilon_{пл} = 0,011$, будет определяться по формуле [13]:

$$P_{пр} = 4M_T \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) = 1,112 \cdot 4\pi M_T, \quad (29)$$

где $M_T = \sigma_T \frac{h_{пл}}{4}$.

Пример: рассмотрим изгиб прямоугольной асфальтобетонной плиты средней толщины $h_{пл} = h_1 + h_2 = 0,08 + 0,04 = 0,12$ м, у которой два противоположных края свободно оперты, а два других – условно-упруго защемлены – пример Э. Рейснера (рис. 6).

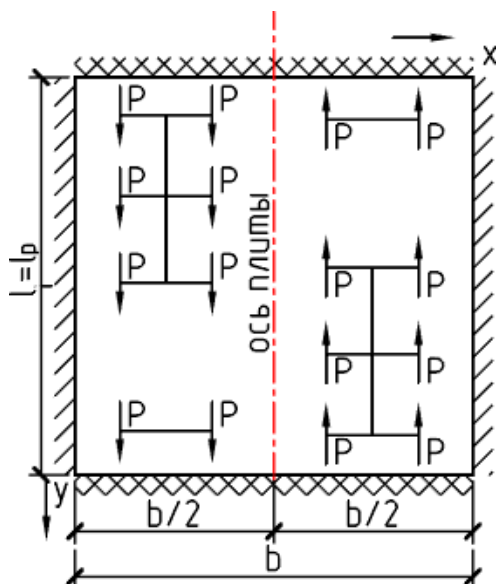


Рис. 6. Расчетная схема плиты конечной длины:

b – ширина плиты; l_p – расчетная длина плиты

Fig. 6. Design scheme of finite length slab:

b – slab width; l_p – calculated slab length

Изгибная жесткость асфальтобетонной плиты равна $EJ_u = \frac{E_{пл} h_2^3}{12(1-\mu)}$,

$\mu = 0,5$. Временную автомобильную нагрузку, действующую на плиту, приведем к равномерно распределенной полосой $g_{вр} = 5,0$ т/м.

Функция прогиба $y(x, y)$ и функция сдвига $\gamma_{сдв}(x, y)$ имеют вид

$$y(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_i(x) \sin \frac{k\pi y}{l} + \frac{8-3\mu}{1-\mu} \frac{h_{пл}^2}{40} \frac{g_{вр}}{EJ_n} \frac{y(l-y)}{2};$$

$$\gamma_{сдв}(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{сдв}(x) \sin \frac{k \cdot \pi \cdot x}{l},$$

где

$$X_i(x) = \frac{4g_{вр} \cdot l^4}{k^5 \cdot \pi^5 EJ_{пл}}.$$

Граничные условия:

– для свободного края: $y = 0, y = l, f = \frac{d^2 y}{dy^2} = 0$,

$$\gamma_{сдв} = 0, \quad \frac{d^2 y}{dy^2} = -\frac{8-3\mu}{1-\mu} \frac{h_{пл}^2}{40} \frac{d^2 \gamma_{сдв}}{dy^2};$$

$$M_x = 0, \quad Q_x = \frac{dM_x}{dx} = 0, \quad f = 0, \quad \gamma_{сдв} = 0;$$

– для условно-упругого защемления: при $x = \text{const}$ прогиб $f = 0$, функция сдвига $\gamma_{сдв} = 0$, т. е.

$$\frac{dy}{dx} + \frac{8+\mu}{1-\mu} \frac{h_{пл}^2}{40} \frac{d\gamma_{сдв}}{dx} = 0;$$

$$M_x = \int_{-\frac{h_{пл}}{2}}^{\frac{h_{пл}}{2}} \sigma_x \cdot \psi_z \cdot dz; \quad Q_x = \int_{-\frac{h_{пл}}{2}}^{\frac{h_{пл}}{2}} \tau_{yz} \frac{d\psi(z)}{dz} dz.$$

Выводы

Совершенствование расчета асфальтобетонной плиты покрытия проезжей части на упруго-податливом полупространстве включает уточнения при решении контактной задачи Буссинеска – Фламана, кроме того, уточняются параметры напряженно-деформированного состояния конструкции «плита – упругие связи – упруго-податливое полупространство» на основе постулата Друкера от совместного действия поперечных и продольных сил.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Горбунов-Посадов М.И. Таблицы для расчета тонких плит на упругом основании / Акад. строительства и архитектуры СССР. Науч.-исслед. ин-т оснований и подземных сооружений. Москва : Госстройиздат, 1959. 98 с.
2. Справочник по теории упругости. Киев : Будівельник, 1977. 418 с.
3. Кривисский А.М. Новые схемы для расчета нежестких дорожных одежд. Москва : Научно-техническое изд-во Министерства автомобильного транспорта и шоссейных дорог РСФСР, 1968. 77 с.
4. Коган Б.И. О применении точного решения теории упругости для многослойного полупространства к расчету нежестких дорожных покрытий // Труды ХАДИ. Вып. 21. Харьков : Изд-во ХГУ, 1958. С. 113–125.
5. Hui D, Hansen J.S. The Swallowtail and Butterfly cusps and their application in the initial post-buckling of single-mode structural systems // Quarterly of Applied Mathematics. 1980. V. 38. № 1. P. 17–36.
6. Bazant Z.P. Endochronic Inelasticity and Incremental Plasticity // International Journal of Solids and Structures. 1978. V. 14. P. 691–714.
7. Пратусевич Я.А., Мещеряков В.Б. О приведении двумерных и трехмерных задач теории упругости к задачам одномерным и двумерным // Вопросы механики. Труды МИИТ. Вып. 164. Москва : Высшая школа, 1963. С. 5–15.
8. Drucker D.C. Some implication of work hardening and Ideal Plasticity // Quarterly of Applied Mathematics. 1950. V. 7. P. 411–418.
9. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. Москва : Машиностроение, 1975. 399 с.
10. Лукаш П.А. Основы нелинейной строительной механики. Москва : Стройиздат, 1978. 204 с.

11. Чернышов А.И., Алексеев А.А., Мокин Д.И., Гаусс К.С., Тарбеева Ю.В. Асфальтовый бетон повышенной водо- и морозостойкости // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. 2016. № 1. С. 180–189.
12. Ибрахим Раванд Абдуллах. Анализ методов расчета деформаций нежестких дорожных одежд // Молодой ученый. 2016. № 30 (134). С. 75–83. URL: <https://moluch.ru/archive/134/37438/> (дата обращения: 24.01.2025).
13. Углова Е.В., Шило О.А. Анализ критериев расчета нежестких дорожных одежд в условиях воздействия интенсивного транспортного потока // Транспортные сооружения : интернет-журнал. 2018. № 3. URL: <https://t-s.today/PDF/14SATS318.pdf>. DOI: 10.15862/14SATS318

REFERENCES

1. Gorbunov-Posadov M.I. Tables for Calculating Slabs on Elastic Foundation. Moscow: Gostroiizdat, 1959. 98 p. (In Russian)
2. Theory of Elasticity Handbook. Kyiv: Budivelnik, 1977. 418 p. (In Russian)
3. Krivisskii A.M. New Schemes for Calculating Flexible Road Surfaces. Moscow, 1968. 77 p. (In Russian)
4. Kogan B.I. Application of Exact Solution of Theory of Elasticity for Multilayer Half-Spaces to Calculate Non-Rigid Pavements. Trudy KhADI. Vol. 21. Kharkov, 1958. Pp. 113–125. (In Russian)
5. Hui D., Hansen J.S. The Sallowtail and Butterfly Cuspoids Application in the Initial Post-Buckling of Single-Mode Structural Systems. Quarterly of Applied Mathematics. 1980; 38(1): 17–36.
6. Bazant Z.P. Endochronic Inelasticity and Incremental Plasticity. International Journal of Solids and Structures. 1978; 14: 691–714.
7. Pratushevich Ya.A., Meshcheryakov V.B. Reduction of Two- and Three-Dimensional Problems of Elasticity Theory to One- and Two-Dimensional Problems. In: Problems of Mechanics. Trudy MIIT. Vol. 164. Moscow: Vysshaya shkola, 1963. Pp. 5–15. (In Russian)
8. Drucker D.C. Some Implication of Work Hardening and Ideal Plasticity. Quarterly of Applied Mathematics. 1950; 7: 411–418.
9. Malinin N.N. Applied Theory of Plasticity and Creep. Moscow: Mashinostroenie, 1975. 398 p. (In Russian)
10. Lukash P.A. Fundamentals of Nonlinear Structural Mechanics. Moscow: Stroyizdat, 1978. 204 p. (In Russian)
11. Chernyshov A.I., Alekseev A.A., Mokshin D.I., Gauss K.S., Tarbeeva Yu.V. Asphalt concrete with increased water and frost resistance. Vestnik of Tomsk State University of Architecture and Building. 2016; (1): 180–189. (In Russian)
12. Ibrahim, Ravand Abdullah. Strength Analysis of Non-Rigid Road Pavements. Molodoi uchenyi. 2016; 30 (134): 75–83. Available: <https://moluch.ru/archive/134/37438/> / (accessed January 24, 2025). (In Russian)
13. Uglova E.V., Shilo O.A. Strength Analysis of Non-Rigid Road Pavements under Heavy Traffic. Transportnye sooruzheniya. 2018; (3). DOI: 10.15862/14SATS318 (In Russian)

Сведения об авторах

Чернышова Наталья Анатольевна, канд. геол.-мин. наук, доцент, Томский государственный архитектурно-строительный университет, 634003, г. Томск, пл. Соляная, 2, tisi20080611@mail.ru

Алексеев Александр Аверьянович, канд. техн. наук, доцент, Томский государственный архитектурно-строительный университет, 634003, г. Томск, пл. Соляная, 2, alekseev10@yandex.ru

Банников Алексей Андреевич, ассистент, Томский государственный архитектурно-строительный университет, 634003, г. Томск, пл. Соляная, 2, lexsew@mail.ru

Authors Details

Natalya A. Chernyshova, PhD, A/Professor, Tomsk State University of Architecture and Building, 2, Solyanaya Sq., 634003, Tomsk, Russia, tisi20080611@mail.ru

Aleksandr A. Alekseev, PhD, A/Professor, Tomsk State University of Architecture and Building, 2, Solyanaya Sq., 634003, Tomsk, Russia, alekseev10@yandex.ru

Aleksei A. Bannikov, Assistant Lecturer, Tomsk State University of Architecture and Building, 2, Solyanaya Sq., 634003, Tomsk, Russia, lexsew@mail.ru

Вклад авторов

Все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.
Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Authors contributions

The authors contributed equally to this article.
The authors declare no conflicts of interests.

Статья поступила в редакцию 05.12.2024
Одобрена после рецензирования 24.12.2024
Принята к публикации 17.01.2025

Submitted for publication 05.12.2024
Approved after review 24.12.2024
Accepted for publication 17.01.2025