

УДК 624.011.1:539.3

НЕМИРОВСКИЙ ЮРИЙ ВЛАДИМИРОВИЧ, докт. физ.-мат. наук,  
профессор,

nemirov@itam.nsc.ru

БОЛТАЕВ АРТЕМ ИВАНОВИЧ, аспирант,

boltaev\_artem@mail.ru

Институт теоретической и прикладной механики

им. С.А. Христиановича СО РАН,

630090, г. Новосибирск, ул. Институтская, 4/1

## НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО РАЗНОСОПРОТИВЛЯЮЩЕГОСЯ МАТЕРИАЛА ОДНОПРОЛЁТНЫХ БАЛОК\*

Рассмотрена задача определения напряжённо-деформированного состояния однопролётных балок, выполненных из нелинейного материала с различными законами деформирования при растяжении и сжатии. Предлагается численный метод решения поставленной задачи, основанный на линеаризации разрешающей системы уравнения. На основе данного алгоритма выполнена серия расчётов, результаты которых свидетельствуют об определённых особенностях деформирования материала, не подчиняющегося классическому закону Гука. Показано, что учёт физической нелинейности и разносопротивляемости материала приводит к существенному изменению всех характеристик напряжённо-деформированного состояния конструкции по сравнению с линейным расчётом. В приведённых в статье расчётах максимальная разница по предельной нагрузке составила 23,4 %, по углам поворота и прогибам соответственно 14,83 и 15,9 %. Это, в свою очередь, указывает на необходимость учёта свойств нелинейности и разносопротивляемости материала в расчёте конструкций.

**Ключевые слова:** нелинейные законы деформирования; брусья; деревянные конструкции; численные методы решения; предельные деформации; пределы прочности.

YURIY V. NEMIROVSKII, DSc, Professor,

nemirov@itam.nsc.ru

ARTEM I. BOLTAEV, Research Assistant,

boltaev\_artem@mail.ru

Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS,

4/1, Institutskaya Str., 630090, Novosibirsk, Russia

## STRENGTH PROPERTIES OF NONLINEAR MATERIAL OF SINGLE BEAMS

The paper presents the investigations of stress-strain state of beams made of nonlinear material subjected to tensile and compressive deformations. The suggested numerical method is based on linearization of the system of equations. Based on this method, a series of numerical experiments is carried out, the results of which show that the deformation properties of the material do not follow the classical Hooke's law. Thus, the physical nonlinearity and different resistance of the material lead to a substantial change in the structural tensile deformation when compared to

\* Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 14-01-00102.

linear calculations. The maximum difference in the load limit is 23,4 %, while in the rotation angles and deflections, it is respectively 14,83 and 15,9 %. This, non-linear properties and different resistance of the material should be taken into account in this structural analysis.

**Keywords:** nonlinear deformation; bars; wooden structures; numerical methods; limit deformation; limit strength.

### Введение

Как известно, древесина относится к материалам, не подчиняющимся классическому закону Гука. Опираясь на диаграммы ( $\sigma - \epsilon$ ) испытания различных пород деревьев при продольном растяжении и сжатии [1–4, 12], можно выделить следующие характерные особенности деформирования древесины: при растяжении диаграмма деформирования вплоть до начала разрушения является слабо искривлённой, а при сжатии её форма значительно искривлена.

Учёт физической нелинейности материала с использованием различных законов деформирования для стержневых конструкций представлен в работах [5, 6]. Однако в них не рассматривается случай изгиба с одновременным растяжением (сжатием), что значительно сужает область применимости данных методик.

Для деревянных конструкций одним из способов учёта физической нелинейности является метод предельного равновесия, описанный в работах [7, 8]. Наряду со своей относительной простотой он имеет ряд недостатков, главным из которых является то, что свойство разносопротивляемости и физической нелинейности древесины учитывается только при определении напряжённо-деформированного состояния (НДС) определённого сечения, находящегося в предельном состоянии. Перемещения, углы поворота, а также распределение усилий в статически неопределимых конструкциях вычисляются с использованием классического закона Гука.

Другой подход связан с использованием метода конечных элементов (МКЭ). В работах [9, 10] на основе МКЭ исследуется напряжённо-деформированное состояние деревянных конструкций с учётом физической, конструктивной и геометрической нелинейности. В работе [11] МКЭ применяется также для расчёта деревянных сетчатых куполов.

Некоторые краткие положения по учёту физической нелинейности центрально-сжатых (растянутых) стержней из древесины даны в работе [12].

В работе [16] даны общие положения по расчёту физически нелинейных разносопротивляющихся стержневых конструкций. На основе этого в работе [13] разработана общая математическая модель деформирования деревянных стропильных покрытий зданий, которая учитывает нелинейные законы деформирования и свойство существенной разносопротивляемости дерева растяжению и сжатию. Стропильное покрытие составлено из прямолинейных стержней, испытывающих поперечный изгиб с растяжением (сжатием). В этой же работе для определения напряжённо-деформированного состояния стропильных конструкций получена общая система нелинейных уравнений (3.3) и (3.10) соответственно для квадратичного и кубического законов деформирования. Данные системы уравнений учитывают совместное действие моментов и продольных сил, что значительно увеличивает их сферу применения по сравнению

с [5, 6]. Далее, в работе [14] был предложен численный метод решения системы (3.3) из [13] и приведены результаты расчёта, свидетельствующие об определённых особенностях деформирования деревянных конструкций и необходимости учёта нелинейности и разнсопротивляемости материала в расчёте. Было показано, что как кривизна стержня  $\kappa$ , так и продольная деформация в центре тяжести сечения  $\epsilon_0$  являются нелинейными функциями одновременно момента  $M$  и продольной силы  $N$ , в то время как в физически линейной теории изгиба балок  $\kappa$  линейно зависит только от  $M$ , а  $\epsilon_0$  только от  $N$ .

В настоящей статье показаны дополнительные эффекты, возникающие при работе нелинейного разнсопротивляющегося материала, а именно – учёт физической нелинейности и разнсопротивляемости материала приводит к существенному изменению всех характеристик напряжённо-деформированного состояния конструкции по сравнению с линейным расчётом. Также приведён численный метод решения системы нелинейных уравнений (3.10) из [13].

### Расчётные схемы балок

Рассмотрим четыре варианта однопролётных балок (рис. 1–4), отличающихся как условиями закрепления, так и видом действующей нагрузки. Для каждой балки введена локальная система координат  $b\zeta$  с продольной осью, проходящей через центр тяжести сечения, и с началом координат в крайней левой точке соответствующей балки.

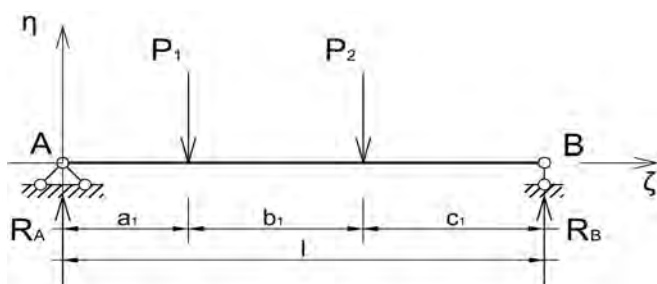


Рис. 1. Расчётная схема балки № 1

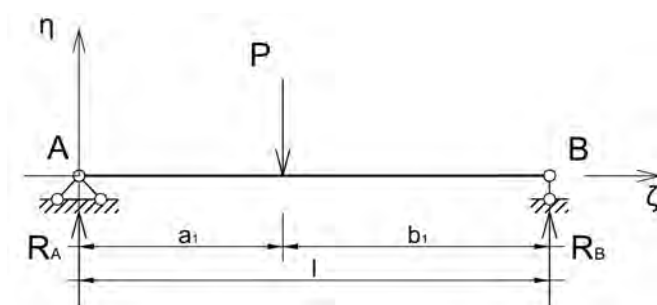


Рис. 2. Расчётная схема балки № 2

Значения параметров, определяющих геометрию расчётных схем балок, приведены в табл. 1. Форма поперечного сечения балок постоянна по длине

и в общем случае может быть произвольной при условии сохранения симметрии относительно оси  $\eta$ . Для расчёта примем два различных вида сечений. Сечение № 1 в виде равнобедренной трапеции (рис. 5, а), а также сечение № 2 (рис. 5, б), образованное путём срезки верхнего и нижнего сегмента у круга.

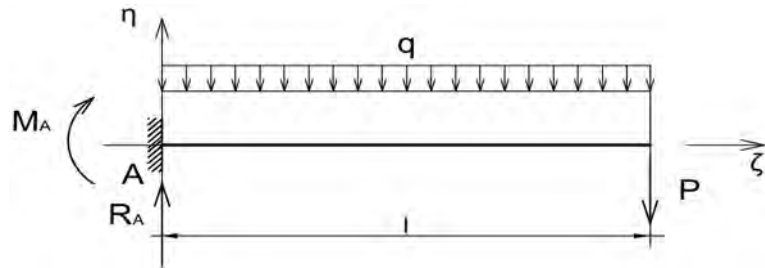


Рис. 3. Расчётная схема балки № 3

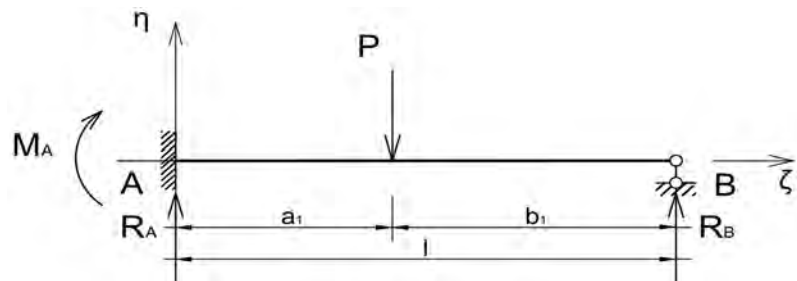


Рис. 4. Расчётная схема балки № 4

Таблица 1

## Значения параметров, определяющих геометрию балок

№ балки	$l$ , см	$a_1$ , см	$b_1$ , см	$c_1$ , см
1	200	80	50	70
2	200	80	120	–
3	200	–	–	–
4	200	80	120	–

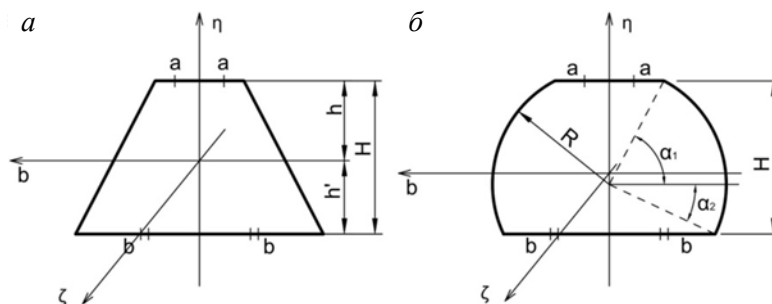


Рис. 5. Различные виды сечений:  
а – сечение № 1; б – сечение № 2

### Алгоритм решения для кубического закона деформирования

В работе [13], в процессе решения задачи об определении напряжённо-деформированного состояния стропильной конструкции, получена общая система нелинейных уравнений (3.10) для кубического закона деформирования древесины. Поиск решения в аналитическом виде представляет собой достаточно трудную задачу, поэтому, создавая алгоритм вычисления для конкретных задач, будем использовать численный метод пошагового интегрирования.

Так как связь между напряжениями и деформациями представлена нелинейной зависимостью, то для решения поставленной задачи необходимо задать не только величину действующей нагрузки, но и историю её приложения. В нашем случае считаем, что нагрузки на каждую из балок прикладываются одновременно.

Пошаговое приложение нагрузки позволяет представить основные неизвестные  $z_0$  (расстояние от центра тяжести до нейтральной оси) и  $\aleph$  (кривизна) с учётом линеаризации в виде

$$\begin{aligned} z_{0(k+1)}^n &\approx z_{0(k)}^{n-1}(z_{0(k)} + n \cdot dz_{0(k+1)}), \\ \aleph_{(k+1)}^n &\approx \aleph_{(k)}^{n-1}(\aleph_{(k)} + n \cdot d\aleph_{(k+1)}), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $k$  – номер шага загрузки;  $z_{0(k+1)}$  и  $\aleph_{(k+1)}$  – значения неизвестных на  $k+1$  шаге;  $z_{0(k)}$  и  $\aleph_{(k)}$  – значения неизвестных на  $k$  шаге;  $dz_{0(k+1)}$  и  $d\aleph_{(k+1)}$  – приращения неизвестных на  $k+1$  шаге загрузки.

Линеаризация основных неизвестных накладывает определённые ограничения на приращения  $dz_{0(k+1)}$  и  $d\aleph_{(k+1)}$ , а именно: чем они меньше, тем точнее получается решение. Уменьшения погрешности можно добиться, увеличив число ступеней приложения нагрузки. Количество таких ступеней подбирается экспериментально, путём проверки решения одной и той же задачи с разной величиной дробления амплитуды нагрузки на ступени.

Перепишем систему (3.10) из [13] для  $k+1$  шага загрузки, подставляя в неё выражения (1):

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^3 \aleph_{(k)}^{n-1}(\aleph_{(k)} + n \cdot d\aleph_{(k+1)}) B_n p_n(z_0) &= N, \\ \sum_{n=1}^3 \aleph_{(k)}^{n-1}(\aleph_{(k)} + n \cdot d\aleph_{(k+1)}) B_n p'_n(z_0) &= M. \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} p_n(z_0) &= \sum_{j=0}^n z_{0(k)}^{j-1} (z_{0(k)} + j \cdot dz_{0(k+1)}) (-1)^j C_n^j d_{n-j} = A_n + dz_{0(k+1)} C_n, \\ p'_n(z_0) &= \sum_{j=0}^n z_{0(k)}^{j-1} (z_{0(k)} + j \cdot dz_{0(k+1)}) (-1)^j C_n^j d_{n-j+1} = \\ &= A'_n + dz_{0(k+1)} C'_n \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{j=0}^n z_{0(k)}^j (-1)^j C_n^j d_{n-j}, \quad C_n = \sum_{j=0}^n z_{0(k)}^{j-1} \cdot j (-1)^j C_n^j d_{n-j}, \\ A'_n &= \sum_{j=0}^n z_{0(k)}^j (-1)^j C_n^j d_{n-j+1}, \quad C'_n = \sum_{j=0}^n z_{0(k)}^{j-1} \cdot j (-1)^j C_n^j d_{n-j+1}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $C_n^j$  – биномиальные коэффициенты [15];  $B_n$  – коэффициенты аппроксимации диаграмм деформирования (приведены в табл. 2 из [13]);  $N$  и  $M$  – продольная сила и изгибающий момент в балке.

Из системы (2) исключаем неизвестную  $d\aleph_{(k+1)}$  и после упрощения приходим к квадратному уравнению (5) относительно  $dz_{0(k+1)}$  с параметрическими коэффициентами (6) – (7), зависящими от предыдущего итерационного шага.

$$K_1 dz_{0(k+1)}^2 + K_2 dz_{0(k+1)} + K_3 = 0. \quad (5)$$

$$K_1 = S_2 S_3 - S_1 S_4, \quad (6)$$

$$K_2 = S_4(N_{(k+1)} - V_1) + S_3(V_2 - M_{(k+1)}) - S_1 V_4 + S_2 V_3,$$

$$K_3 = V_4(N_{(k+1)} - V_1) + V_3(V_2 - M_{(k+1)}).$$

$$V_1 = \sum_{n=1}^3 \aleph_{(k)}^n B_n A_n, \quad V_2 = \sum_{n=1}^3 \aleph_{(k)}^n B_n A'_n,$$

$$V_3 = \sum_{n=1}^3 n \aleph_{(k)}^{n-1} B_n A_n, \quad V_4 = \sum_{n=1}^3 n \aleph_{(k)}^{n-1} B_n A'_n,$$

$$S_1 = \sum_{n=1}^3 \aleph_{(k)}^n B_n C_n, \quad S_2 = \sum_{n=1}^3 \aleph_{(k)}^n B_n C'_n,$$

$$S_3 = \sum_{n=1}^3 n \aleph_{(k)}^{n-1} B_n C_n, \quad S_4 = \sum_{n=1}^3 n \aleph_{(k)}^{n-1} B_n C'_n. \quad (7)$$

$$\aleph_{(k=0)} = \frac{M_{(k=0)}}{B_1 I}, \quad \varepsilon_{0(k=0)} = \frac{N_{(k=0)}}{B_1 A}, \quad (8)$$

$$z_{0(k=0)} = -\frac{\varepsilon_{0(k=0)}}{\aleph_{(k=0)}}.$$

Для итерационного решения уравнения (5) необходимо задаться начальными значениями  $\aleph_{(k=0)}$  и  $z_{0(k=0)}$ . Их можно получить из формул линейного изгиба (8), приняв в качестве нагрузки, действующей на балку, определённую долю от её расчётного значения. Главным критерием при выборе первоначальной нагрузки является её малая величина. Это позволяет конструкции находиться в линейной области деформирования.

Решение уравнения (5) получим в следующем виде:

$$dz_{0(k+1)} = \frac{-K_2 \pm \sqrt{K_2^2 - 4K_3 K_1}}{2K_1}. \quad (9)$$

Исходя из физического смысла решения при  $M > 0$  ( $M < 0$ ) в уравнении (9) сохраняем знак минус (плюс). После вычисления  $dz_{0(k+1)}$  определяем  $d\aleph_{(k+1)}$  по оставшемуся уравнению системы (2) – формула (10). Вычислив приращения неизвестных, находим  $z_{0(k+1)}$  и  $\aleph_{(k+1)}$  по (1). Пройдя все шаги итерационного процесса и определив окончательные значения  $z_0$  и  $\aleph$ , определим  $\varepsilon_0 = -z_0 \aleph$ .

$$d\aleph_{(k+1)} = \frac{M_{(k+1)} - (V_2 + dz_{0(k+1)} S_2)}{V_4 + dz_{0(k+1)} S_4}. \quad (10)$$

В сечениях балок, которые находятся в безизгибном состоянии растяжения (сжатия),  $\aleph = 0$ , а  $\varepsilon_0$  (продольная деформация на уровне начала координат  $b\zeta\eta$ ) определяется по известным формулам [15] из решения кубического уравнения:

$$\sigma = \frac{N}{A} = B_1 \varepsilon + B_2 \varepsilon^2 + B_3 \varepsilon^3. \quad (11)$$

Так как балка № 4 статически неопределима, то уравнений равновесия недостаточно для определения её напряжённо-деформированного состояния. Поэтому в начале решения необходимо задаться произвольным значением неизвестного (например, из решения эквивалентной упругой задачи), в качестве которого выбрано значение момента на левой опоре  $M_A$ . Условием же нахождения его действительного значения будет равенство нулю прогиба на правой опоре балки:

$$w(l) = w_0 + \varphi_0 l - \int_0^l \left( \int_0^l \kappa(x) dx \right) dx < e, \quad (12)$$

где  $e$  – величина заданной невязки. Если условие (12) выполняется, то процесс решения считается законченным, иначе изменяем значение неизвестного усилия  $M_A$  и производим перерасчёт.

В качестве критерия начала разрушения конструкции будем использовать условие превышения максимальных продольных деформаций стержней  $\varepsilon^{\pm(\max)}$  над их предельными значениями  $\varepsilon_*^{\pm}$ , которые даны в табл. 2. из [13]:

$$|\varepsilon^{\pm(\max)}| > |\varepsilon_*^{\pm}|. \quad (13)$$

### Примеры расчёта балок

**Расчёт № 1.** В ходе расчёта будем загружать каждую из балок (рис. 1–4) до наступления начального разрушения по условию (13). Все балки будут рассчитаны с первым и вторым видами поперечного сечения. Оба вида сечения задаются таким образом, чтобы, во-первых, площадь их была одинаковой. Следовательно, объём и стоимость затраченного материала на каждую из балок также будут одинаковыми. Вес и стоимость расходуемых на  $i$ -ю балку материалов определяются по формулам:

$$B_i = l_i A_i \gamma_i, \quad C_i = l_i A_i \gamma_i c_i, \quad (14)$$

где  $A_i$ ,  $\gamma_i$ ,  $c_i$  – соответственно площадь поперечного сечения, удельный вес и стоимость материала  $i$ -й балки.

Во-вторых, оба сечения будут иметь одинаковый момент инерции  $I_b$  относительно горизонтальной оси, проходящей через центр тяжести сечения. В-третьих, минимальный момент сопротивления  $W_b$  также будет одинаковым у обоих сечений. Благодаря второму условию при расчёте с использованием классического закона Гука ( $B_2 = B_3 = 0$ ), замена одного сечения на другое не приведет к изменению прогибов и углов поворота балок, а третье условие обеспечит равенство максимальной нагрузки, которую несёт каждая из балок. Эти три условия принципиально могут быть осуществлены, т. к. каждое из сечений имеет три независимых параметра, характеризующих его форму. И, следовательно, задавая размеры одного поперечного сечения, можно составить три уравнения для определения размеров второго поперечного сечения. Составим эти уравнения. Так как одним из них является равенство моментов инерции, то для равенства минимальных моментов сопротивления достаточно, чтобы  $u_{\max 1} = u_{\max 2}$ . Здесь  $u_{\max 1}$ ,  $u_{\max 2}$  – максимальные расстояния от центра тяжести до фибрового волокна сечений № 1 и № 2 соответственно. Для определённости принимаем  $a < b$ , тогда  $\alpha_1 > \alpha_2$  и  $h > h'$  (рис. 5). При этом искомые уравнения примут вид:

$$\begin{aligned} kH - \frac{1}{2}(h^2 - h'^2)f &= R^2[(\alpha_1 + \alpha_2) + \sin(\alpha_1 + \alpha_2) \cos(\alpha_1 - \alpha_2)], \\ \frac{1}{3}(h^3 + h'^3)k - \frac{1}{4}(h^4 - h'^4)f &= \\ = \frac{1}{4}R^4 \left[ \alpha_1 + \alpha_2 - \frac{1}{2} \sin 2(\alpha_1 + \alpha_2) \cos 2(\alpha_1 - \alpha_2) \right], \\ h &= R \sin \alpha_1 - \frac{2}{3}R \frac{\cos \alpha_2^3 - \cos \alpha_1^3}{(\alpha_1 + \alpha_2) + \sin(\alpha_1 + \alpha_2) \cos(\alpha_1 - \alpha_2)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Левые части уравнений (15) выписаны для сечения № 1, а правые для сечения № 2. Величины  $k$ ,  $f$ ,  $h$  и  $h'$  определяются по формулам (1.3) из [13]. Задав параметры сечения № 2, решаем систему нелинейных уравнений (15) методом Ньютона и тем самым находим размеры сечения № 1, удовлетворяющие поставленным выше условиям.

Заданные таким образом размеры сечений позволят выяснить разницу между работой нелинейного разносопротивляющегося материала и материала, подчиняющегося классическому закону Гука.

Для расчёта принимаем тридцать шагов нагружения и величину заданной невязки  $e = 10^{-3}$ , см. формулу (12). Все балки изготовлены из сосны. Размеры поперечных сечений даны в табл. 2.

Таблица 2

### Геометрические характеристики сечений

№ сечения	1	2
$a$ , см	5,06	2,5
$b$ , см	10,30	5
$H$ , см	13,98	15

Изменение формы поперечного сечения повлияет на процесс решения системы нелинейных уравнений (3.10) из [13] только тем, что произойдёт изменение коэффициентов (3.12) из [13], которые выписаны для сечения № 1. Эти же коэффициенты для сечения № 2 примут вид (16). Коэффициенты (16) выписаны относительно осей, проходящих через центр круга, а не центр тяжести поперечного сечения, как у сечения № 1.

$$\begin{aligned}
 d_1 &= R^2[(\alpha_1 + \alpha_2) + \sin(\alpha_1 + \alpha_2) \cos(\alpha_1 - \alpha_2)], \\
 d_2 &= \frac{2}{3}R^3(\cos \alpha_2^3 - \cos \alpha_1^3), \\
 d_3 &= \frac{1}{4}R^4[(\alpha_1 + \alpha_2) - \frac{1}{2}\sin 2(\alpha_1 + \alpha_2) \cos 2(\alpha_1 - \alpha_2)], \\
 d_4 &= \frac{2}{15}R^5[3(\cos \alpha_1^5 - \cos \alpha_2^5) - 5(\cos \alpha_1^3 - \cos \alpha_2^3)], \\
 d_5 &= \frac{1}{96}R^6[12(\alpha_1 + \alpha_2) - 6\sin 2(\alpha_1 + \alpha_2) \cos 2(\alpha_1 - \alpha_2) - \\
 &\quad - 4(\sin 2\alpha_1^3 + \sin 2\alpha_2^3)].
 \end{aligned} \tag{16}$$

Результаты расчёта приведены в табл. 3. В ней даны значения по модулю суммарной вертикальной нагрузки, максимальных углов поворота и прогибов каждой из балок для двух вариантов сечений. Под суммарной вертикальной нагрузкой понимается сумма всех внешних сил в проекции на ось  $\eta$ , при этом для балки № 1  $P_1$  пропорционально  $P_2$ , а для балки № 3  $P$  пропорционально  $q$ . То есть во всех случаях осуществляется однопараметрическое нагружение.

Из табл. 3 видно, что при замене сечений предельная нагрузка изменяется максимум на 12,38 %, причём она может как возрасти, так и уменьшиться. Так же ведут себя углы поворота и прогибы с максимальной разницей в 13,14 и 13,48 % соответственно. Стоит ещё раз отметить, что при линейном расчёте как предельная нагрузка, так и прогибы и углы поворота балки одинаковы для двух различных сечений, чего совершенно нельзя сказать о результатах физически нелинейного расчёта (табл. 3).



Таблица 3

Результаты расчёта № 1

№ балки	Предельная нагрузка, тс		Максимальный угол поворота, $10^{-3}$ рад		Максимальный прогиб, см	
	$F^*_1$	$F^*_2$	$\theta^*_1$	$\theta^*_2$	$w^*_1$	$w^*_2$
1	2	3	5	6	8	9
1	7,74	7,96	33,7	34,1	2,17	2,20
2	6,12	6,30	27,8	28,3	1,73	1,76
3	2,71	2,40	52,3	46,3	7,41	6,56
4	9,44	8,40	15,5	13,7	1,01	0,89

**Расчёт № 2.** Загружаем балки со всеми характеристиками первого расчёта до наступления начала разрушения по условию (13). Однако теперь балки имеют одно и то же поперечное сечение в виде трапеции (рис. 5, а) с размерами:  $a = 5$  см;  $b = 2,5$  см и  $H = 15$  см. Расчёт проводим как в нелинейной постановке, так и в линейной. Линейный вариант получаем, положив все, кроме первого, коэффициенты аппроксимации диаграмм деформирования материала равными нулю ( $B_2 = B_3 = 0$ ). Предельные деформации для линейного расчёта те же, что и для нелинейного.

Для расчёта принимаем тридцать шагов нагружения и величину заданной невязки  $e = 10^{-3}$ , см. формулу (12).

В табл. 4 приведены значения по модулю суммарной вертикальной нагрузки, максимальных углов поворота и прогибов сечений каждой из балок для трех вариантов расчёта. Столбцы 2, 5 и 8 содержат величины, полученные при нелинейном итерационном расчёте, столбцы 3, 6 и 9 – при линейном итерационном расчёте, а столбцы 4, 7 и 10 – при линейном расчёте по аналитическим формулам сопротивления материалов [5].

Таблица 4

Результаты расчёта № 2

№ балки	Предельная нагрузка, тс			Максимальный угол поворота, $10^{-3}$ рад			Максимальный прогиб, см		
	$F^*_н$	$F^*_л$	$F^*_{л.т}$	$\theta^*_н$	$\theta^*_л$	$\theta^*_{л.т}$	$w^*_н$	$w^*_л$	$w^*_{л.т}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	5,30	6,60	6,58	38,0	43,1	43,1	2,43	2,71	2,71
2	4,32	5,36	5,31	32,2	37,4	37,4	2,00	2,31	2,31
3	1,48	1,84	1,82	34,8	40,8	40,8	5,12	5,93	5,93
4	4,38	5,28	5,27	11,8	13,8	13,8	0,76	0,88	0,88

Из данных табл. 4 видно, что при линейном расчёте балка выдерживает нагрузку в среднем на 23,4 % больше, чем при нелинейном. А прогибы и углы поворота больше в среднем на 14,83 и 15,9 % соответственно. Разность между линейным итерационным и линейным точным расчётами мала и составляет меньше 1 %, причём она обусловлена дискретным шагом нагружения балок

и при его увеличении должна стремиться к нулю, т. к. итерационный расчёт при линейном законе деформирования принимает форму аналитических формул сопротивления материалов.

Разносопротивляемость древесины существенно влияет на перераспределение фибровых продольных деформаций в балке, которые, в свою очередь, ответственны за возникновение последующих процессов разрушения. В качестве примера приведём графики фибровых продольных деформаций балки № 1 из расчёта № 2 (рис. 6). На рис. 6 цифрами 1 и 3 соответственно обозначены графики нижних и верхних фибровых деформаций, полученные из нелинейного расчёта; цифрами 2 и 4 – полученные из линейного расчёта.

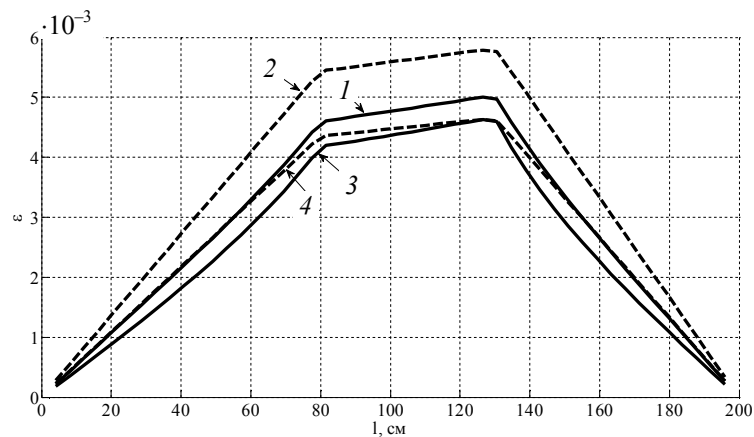


Рис. 6. Фибровые продольные деформации балки № 1 из расчёта № 2

### Заключение

В настоящей работе показано, что переход от линейных моделей деформирования твёрдого тела (подчиняющихся классическому закону Гука) к нелинейным разносопротивляющимся моделям сопровождается появлением новых эффектов:

1. Для балок, имеющих одинаковое НДС с точки зрения физически линейной теории и одинаковый расход материала, появляются существенные различия в предельной нагрузке, прогибах и углах поворота при учёте физической нелинейности (см. расчёт № 1). В расчёте № 1 максимальная разница в предельной нагрузке составила 12,38 %, в прогибах и углах поворота соответственно 13,14 и 13,48 %.

2. Учёт физической нелинейности приводит к значительному снижению, по сравнению с линейным расчётом, как предельной нагрузки, так и максимальных углов поворота и прогибов (см. расчёт № 2). В расчёте № 2 максимальное снижение предельной нагрузки составило 23,4 %, а углов поворота и прогибов соответственно 14,83 и 15,9 %.

3. Также физическая нелинейность приводит к большому перераспределению фибровых продольных деформаций в балке, которые, в свою очередь, ответственны за возникновение последующих процессов разрушения (см. расчёт № 2). В расчёте № 2 различия в продольных деформациях достигают 13,4 %.

Из приведённых расчётов видно, что свойство физической нелинейности и разнотвёрдости оказывает значительное влияние на характеристики НДС деревянных конструкций, поэтому необходимо его всестороннее изучение.

С одной стороны, усложнение математической модели сопротивления деформируемого твёрдого тела приводит к увеличению сложности расчёта, но, с другой стороны, этот подход поможет приблизиться к пониманию реальной работы конструкций и покажет, насколько значимый вклад привнесут эти изменения. Следует также отметить, что появившиеся новые свойства, при их правильном применении, могут помочь более рационально проектировать строительные конструкции.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Леонтьев, Н.Л. Упругие деформации древесины / Н.Л. Леонтьев. – М.; Л. : Гослесбумиздат, 1951. – 120 с.
2. Исследование прочности и деформативности древесины : сб. статей / под ред. Г.Г. Карлсена. – М. : Госстройиздат, 1956. – 172 с.
3. Квасников, Е.Н. Вопросы длительного сопротивления древесины / Е.Н. Квасников. – Л. : Стройиздат, 1972. – 96 с.
4. Тутурин, С.В. Механическая прочность древесины / С.В. Тутурин. – М. : Компания «Спутник +», 2007. – 312 с.
5. Сопротивление материалов / под общ. ред. Г.С. Писаренко. – 4-е изд., перераб. и доп. – Киев : Вища школа. Головное изд-во, 1979. – 696 с.
6. Лукаш, П.А. Основы нелинейной строительной механики / П.А. Лукаш. – М. : Стройиздат, 1978 – 208 с.
7. Хухрянский, П.Н. Прочность древесины / П.Н. Хухрянский. – М.; Л. : Гослесбумиздат, 1955. – 152 с.
8. Коченов, В.М. Несущая способность элементов и соединений деревянных конструкций / В.М. Коченов. – М. : Гос. изд-во лит. по строительству и архитектуре, 1953. – 320 с.
9. Авдеев, С.Н. Учёт нелинейных зависимостей различного рода в сжато-изгибаемых деревянных элементах : автореф. дис. ... канд. техн. наук. – М., 1992. – 23 с.
10. Арленинов, Д.К. Эффективные деревянные конструкции и методы их расчёта с учётом нелинейных зависимостей : автореф. дис. ... докт. техн. наук. – М., 1995. – 43 с.
11. Миряев, Б.В. Методы расчёта и конструктивные решения сетчатых куполов из дерева и пластмасс / Б.В. Миряев. – Пенза : ПГУАС, 2005. – 150 с.
12. Дериглазов, О.Ю. Экспериментальное обоснование модуля упругости в численных расчётах конструкций из древесины сосны / О.Ю. Дериглазов // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. – 2007. – № 3. – С. 155–157.
13. Немировский, Ю.В. Метод расчёта деревянных стропильных покрытий зданий. Сообщение 1: Моделирование и общие закономерности / Ю.В. Немировский, А.И. Болтаев // Изв. вузов. Строительство. – 2014. – № 3. – С. 5–13.
14. Немировский, Ю.В. Метод расчёта деревянных стропильных покрытий зданий. Сообщение 2: Численный метод решения и примеры расчёта / Ю.В. Немировский, А.И. Болтаев // Изв. вузов. Строительство. – 2014. – № 9–10. – С. 13–21.
15. Корн, Г.А. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г.А. Корн, Т.М. Корн. – М. : Наука, 1968. – 720 с.
16. Немировский, Ю.В. Метод расчёта композитных стержневых систем из разномодульных материалов / Ю.В. Немировский // Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики : материалы V Всероссийской научной конференции (Томск, 3–5 октября, 2006 г.). – Томск : Изд-во ТГУ, 2006. – С. 288–290.

## REFERENCES

1. *Leont'ev N.L.* Uprugie deformatsii drevesiny [Elastic deformation of timber]. Moscow : Goslesbumizdat Publ., 1951. 120 p. (rus)
2. *Karlsena G.G.* Issledovanie prochnosti i deformativnosti drevesiny. Sbornik statei [Investigation of strength and deformability of wood. Collection of articles]. Moscow : Gosstroyizdat Publ., 1956. 172 p. (rus)
3. *Kvasnikov E.N.* Voprosy dlitel'nogo soprotivleniya drevesiny [Problems of long-term wood resistance]. Leningrad : Stroyizdat Publ., 1972. 96 p. (rus)
4. *Tuturin S.V.* Mekhanicheskaya prochnost' drevesiny [Mechanical strength of wood]. Moscow : Sputnik+ Publ., 2007. 312 p. (rus)
5. *Pisarenko G.S.* Soprotivlenie materialov [Strength of materials]. Kiev : Vishcha shkola Publ., 1979. 696 p. (rus)
6. *Lukash P.A.* Osnovy nelineinoi stroitel'noi mekhaniki [Fundamentals of nonlinear structural mechanics]. Moscow : Stroyizdat Publ., 1978. 208 p. (rus)
7. *Khukhryanskii P.N.* Prochnost' drevesiny [Strength of wood]. Moscow : Goslesbumizdat Publ., 1955. 152 p. (rus)
8. *Kochenov V.M.* Nesushchaya sposobnost' elementov i soedinenii derevyannykh konstrukttsii [Bearing capacity of elements and compounds of wooden structures]. Moscow : Gosizdat Publ., 1953. 320 p. (rus)
9. *Avdeev S.N.* Uchet nelineinykh zavisimosti razlichnogo roda v szhato-izgibaemykh derevyannykh elementakh [Accounting for non-linear dependencies of wood beam columns]. Moscow, 1992. 23 p. (rus)
10. *Arleninov D.K.* Effektivnye derevyanye konstrukttsii i metody ikh rascheta s uchetom nelineinykh zavisimosti [Strength analysis of wooden structures]. Moscow, 1995. 43 p. (rus)
11. *Miryayev B.V.* Metody rascheta i konstruktivnye resheniya setchatykh kupolov iz dereva i plastmass [Methods of calculation and design solutions reticulated domes made of wood and plastics]. Penza : Penza State University of Architecture and Construction Publ., 2005. 150 p. (rus)
12. *Deriglazov O.Yu.* Eksperimental'noe obosnovanie modulya uprugosti v chislennykh raschetakh konstrukttsii iz drevesiny sosny [Experimental study of elasticity modulus in numerical calculations of pine wood constructions]. *Vestnik TSUAB*. 2007. No. 3. Pp. 155–157. (rus)
13. *Nemirovskii Yu.V., Boltaev A.I.* Metod rascheta derevyannykh stropil'nykh pokrytii zdani. Soobshchenie 1: Modelirovanie i obshchie zakonomernosti [Strength analysis of wooden rafter coverings of buildings. Message 1: design and general regularities]. *News of Higher Educational Institutions. Construction*. 2014. No. 3. Pp. 5–13. (rus)
14. *Nemirovskii Yu.V., Boltaev A.I.* Metod rascheta derevyannykh stropil'nykh pokrytii zdani. Soobshchenie 2: Chislennyi metod resheniya i primery rascheta [Strength analysis of wooden rafter coverings of buildings. Message 2: Numerical methods and examples of calculation]. *News of Higher Educational Institutions. Construction*. 2014. No. 9–10. Pp. 13–21. (rus)
15. *Korn G.A., Korn T.M.* Spravochnik po matematike dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov [Handbook on mathematics for researchers and engineers]. Moscow : Nauka Publ., 1968. 720 p. (rus)
16. *Nemirovskii Yu.V.* Metod rascheta kompozitnykh sterzhnevyykh sistem iz raznomodul'nykh materialov [Strength analysis of composite rod systems]. *Proc. 5th All-Rus. Sci. Conf. 'Fundamental and Applied Problems of Modern Mechanics'*. 2006. Pp. 288–290. (rus)