

СТРОИТЕЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ, ЗДАНИЯ И СООРУЖЕНИЯ

УДК 539.3

*БАРАШКОВ ВЛАДИМИР НИКОЛАЕВИЧ, докт. физ.-мат. наук,
ст. научный сотрудник, профессор,
v.n.bar@mail.ru
Томский государственный архитектурно-строительный университет,
634003, г. Томск, пл. Соляная, 2*

РАСЧЕТ НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТОЛСТЫХ ПЛИТ ВАРИАЦИОННО-РАЗНОСТНЫМ МЕТОДОМ ПРИ ДЕЙСТВИИ РАЗНОНАПРАВЛЕННЫХ ВНЕШНИХ НАГРУЗОК

Задачи расчёта напряжённо-деформированного состояния толстых круглых плит встречаются при анализе элементов различных конструкций, используемых при строительстве и проектировании: сплошных монолитных фундаментов, сосудов давления, штампов и др. В работе изложена методика расчёта квазистатического напряжённо-деформированного состояния круглой толстой плиты при действии осесимметричной внешней нагрузки. Решение проводится вариационно-разностным методом, представляющим собой реализацию вариационного принципа Лагранжа с использованием метода конечных разностей. Геометрические соотношения берутся в форме уравнений Коши, физические соотношения принимаются нелинейными и описываются деформационной теорией пластичности Ильюшина.

Ключевые слова: теория упругости и пластичности; толстая плита; перемещения; деформации; напряжения; вариационный принцип Лагранжа; дискретизация; решение системы линейных алгебраических уравнений.

*VLADIMIR N. BARASHKOV, DSc, Professor,
v.n.bar@mail.ru
Tomsk State University of Architecture and Building,
2, Solyanaya Sq., 634003, Tomsk, Russia*

STRESS-STRAIN STATE ANALYSIS OF THICK PLATES UNDER MULTIDIRECTIONAL EXTERNAL LOADS USING VARIABLE DIFFERENTIAL METHOD

The paper presents the stress-strain analysis of thick circular plates used in the design and construction of solid monolithic foundations, pressure vessels, press-tools and others. The methodology of calculation of quasi-static stress-strain state is suggested in this paper for

a circular plate under the axial external loading. The applied variable differential method is the implementation of Lagrange principle using the finite-difference method. Geometric relations are taken in the form of Cauchy equations, and physical relations are accepted to be nonlinear and described by Ilyushin deformation theory of plasticity.

Keywords: theory of elasticity and plasticity; thick plate; displacement; strain; stress; Lagrange principle; quantification; linear algebraic equations.

Задачи определения напряжённо-деформированного состояния (НДС) толстых круглых плит, которые решаются с позиций теории упругости, рассматривались в работах А.И. Лурье, В.З. Власова, А.С. Вольмира, А.П. Филина и других с использованием различных упрощающих предположений. При этом отмечается, что при реализации задачи теории упругости удовлетворение условий на поверхности является обязательным этапом решения и представляет собой сложную проблему.

Настоящая работа посвящена анализу квазистатического осесимметричного НДС толстой круглой изотропной плиты, нагруженной системой поверхностных нагрузок, приложенных на обеих её поверхностях и отличающихся по величине между собой в несколько раз. На конструкцию также действуют массовые силы большой интенсивности. Такая комбинация внешних нагрузок усложняет выполнение статических граничных условий, поэтому в работе достаточно подробно рассматриваются вопросы, посвященные достоверности полученных результатов.

Вариационно-разностный метод решения осесимметричной задачи теории упругости и пластичности

Для решения задачи теории упругости используется математическая формулировка вариационного принципа Лагранжа

$$\delta \mathcal{E} = 0, \quad (1)$$

где \mathcal{E} – квадратичный функционал полной потенциальной энергии системы «тело – нагрузка», который может быть записан для любой конструкции. Следствием этого является широкое использование этого принципа при решении прикладных задач механики деформируемого твердого тела. Из (1) следуют уравнения равновесия и граничные условия в напряжениях на поверхности тела. Принцип Лагранжа является экстремальным, т. е. для действительного НДС функционал полной потенциальной энергии системы достигает минимума по сравнению с другими возможными состояниями упругого тела. Поэтому возможна следующая формулировка принципа Лагранжа: «...из всех возможных напряженных состояний упругого тела, для которых выполнены граничные условия в перемещениях, а деформации и перемещения связаны геометрическими уравнениями теории упругости, истинным является то, при котором полная потенциальная энергия системы получает минимальное значение» [1].

Таким образом, уравнения равновесия и статические граничные условия служат уравнениями Эйлера для функционала энергии \mathcal{E} . Поэтому при решении задачи теории упругости и пластичности в вариационной постановке (1) нет необходимости заранее удовлетворять граничным условиям в напряжении-

ях. Вариационный принцип Лагранжа является средством получения уравнений равновесия и граничных условий в том случае, когда традиционный способ их вывода не может быть применен. Обладая описанными достоинствами, вариационный принцип Лагранжа явился теоретической основой для создания метода Ритца и вариационно-разностного метода.

Для решения задачи определения упругопластического НДС используется деформационная теория пластичности А.А. Ильюшина [2], в которой зависимость между интенсивностями напряжений σ_i и деформаций ε_i представляется формулой

$$\sigma_i = 3G\varepsilon_i[1 - \omega(\varepsilon_i)], \quad (2)$$

где $\omega(\varepsilon_i)$ – так называемая функция пластичности.

Для определения значений функции пластичности ниже используется аппроксимации зависимости (2) моделью упругопластического тела с линейным упрочнением (двухзвенной ломаной линией) (рис. 1)

$$\omega = 0, \quad \varepsilon_i \leq \varepsilon_T,$$

$$\omega = \lambda \left(1 - \frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_i} \right), \quad \varepsilon_i > \varepsilon_T,$$

где λ – так называемое разупрочнение, которое определяется из выражения $\lambda = 1 - \frac{E_1}{3G}$ (для идеально упругопластического материала $\lambda = 1$); ε_T – деформация начала текучести; E_1 – модуль упрочнения, характеризующий тангенс угла наклона к оси ε_i участка прямой зависимости $\sigma_i(\varepsilon_i)$ за пределом упругости.

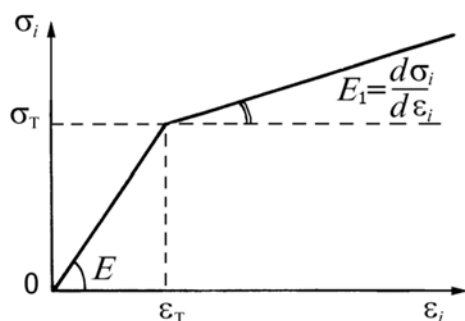


Рис. 1. Зависимость интенсивности напряжений σ_i от интенсивности деформаций ε_i

Для решения упругопластической задачи используется метод упругих решений, при помощи которого нелинейная задача минимизации неквадратичного функционала полной потенциальной энергии системы сводится к последовательности линейных задач минимизации квадратичных функционалов. Задача решается в перемещениях.

Функционал энергии \mathfrak{E} определяется соотношением

$$\mathfrak{E} = U - A_1 - A_2, \quad (3)$$

где U – потенциальная энергия деформации тела; A_1, A_2 – работа объёмных сил и поверхностных нагрузок на вызванных ими перемещениях.

Один из вариантов представления функционала полной потенциальной энергии системы упругопластической задачи через компоненты вектора перемещений в цилиндрических координатах r, θ, z имеет вид

$$\begin{aligned} \mathfrak{E} = & 3\pi \int_0^R \int_0^L \{3K\varepsilon_0^2 + G[1 - \omega(\bar{\varepsilon}_i)]\varepsilon_i^2\} r dr dz - \\ & - 2\pi \int_0^R \int_0^L (R_V u + Z_V w) r dr dz - 2\pi \oint_{S_\sigma} (R_S u + Z_S w) r ds, \end{aligned} \quad (4)$$

где G – модуль сдвига материала конструкции; $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$ – модуль объёмной

деформации; $\omega(\bar{\varepsilon}_i)$ – функция пластичности, известная из решения на предыду-

щей итерации; $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z}{3}$ – средняя деформация в точке; $\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \times$

$\times \sqrt{(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)^2 + (\varepsilon_\theta - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_r)^2} + \frac{3}{2} \gamma_{rz}^2 = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{u}{r} \right)^2 - \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{u}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial r} u \right] + 3 \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2}$ –

интенсивность деформаций в точке; $\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}$ – радиальная деформация;

$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r}$ – окружная деформация; $\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$ – осевая деформация; $\gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}$ –

угловая деформация в координатной плоскости rz ; S_σ – поверхность тела, на которой задана поверхностная нагрузка; R_V, Z_V – проекции объёмных сил на оси координат r, z ; R_S, Z_S – проекции поверхностных нагрузок на оси координат r, z .

Решение задачи состоит в нахождении поля перемещений $u(r, z)$, $w(r, z)$, доставляющих минимум функционалу полной потенциальной энергии системы (4).

Одним из методов, реализующих вариационную задачу (1), является вариационно-разностный метод (ВРМ). Применительно к решению осесимметричных и плоских задач теории упругости ВРМ был разработан Д.С. Гриффином и Р.Б. Келлогом [3]. Идея вариационно-разностного метода состоит в замене вариационной задачи (1) относительно непрерывных функций перемещений вариационной задачей для дискретных значений этих функций в узлах сеточной области. Конечно-разностная сетка покрывает всю расчётную область, представляющую собой в силу осевой симметрии половину осевого сечения конструкции. Сетка наносится таким образом, чтобы в пределах одной ячейки физико-механические характеристики материалов не терпели разрывов. Исходный функционал дискретизируется: входящие в выражение полной энергии (4) производные от перемещений заме-

няются конечно-разностными соотношениями, а интегралы по объёму и поверхности – суммами. В результате задача об отыскании минимума функционала полной энергии \mathcal{E} , являющейся квадратичной функцией относительно деформаций и перемещений, сводится к отысканию минимума функции многих переменных, определённых в узлах конечно-разностной сетки. Необходимые для решения задачи размеры конечно-разностной сетки определяются известным в численных методах способом: до получения на различных сетках одинаковых результатов с заранее заданной точностью. При этом традиционно применяются треугольные и четырёхугольные ячейки. В статье дискретизация расчётной области в двумерной задаче проводится с помощью четырёхугольных ячеек (рис. 2).

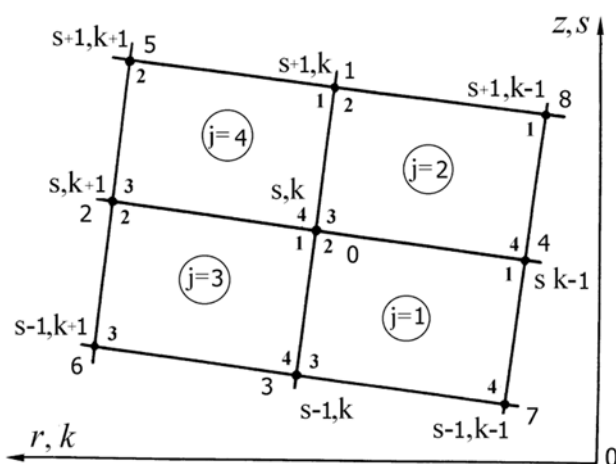


Рис. 2. Шаблон для случая дискретизации расчётной области четырёхугольными ячейками

Значения производных от искомым функций перемещений u , w в четырёхугольной ячейке с номером j представляются конечно-разностными соотношениями [4], которые на случай осесимметричного деформирования тела вращения приводятся к виду

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_j \approx -\frac{\sum_{i=1}^4 (u_{i+1} + u_i)(z_{i+1} - z_i)}{\sum_{i=1}^4 (z_{i+1} + z_i)(r_{i+1} - r_i)}, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_j \approx \frac{\sum_{i=1}^4 (u_{i+1} + u_i)(r_{i+1} - r_i)}{\sum_{i=1}^4 (z_{i+1} + z_i)(r_{i+1} - r_i)}.$$

Аналогично записываются выражения для производных $(\partial w/\partial r)_j, (\partial w/\partial z)_j$. Величина, стоящая в знаменателе, представляет собой удвоенную площадь F_j ячейки с номером j . Преобразуя эти формулы, приходим к простым выражениям для аппроксимации производных в ячейке:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_j \approx \frac{(u_2 - u_4)(z_1 - z_3) + (u_1 - u_3)(z_4 - z_2)}{F_j},$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_j &\approx \frac{(u_2 - u_4)(r_3 - r_1) + (u_1 - u_3)(r_2 - r_4)}{F_j}, \\
\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)_j &\approx \frac{(w_2 - w_4)(z_1 - z_3) + (w_1 - w_3)(z_4 - z_2)}{F_j}, \\
\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_j &\approx \frac{(w_2 - w_4)(r_3 - r_1) + (w_1 - w_3)(r_2 - r_4)}{F_j}, \\
F_j &= (r_3 - r_1)(z_2 - z_4) + (r_2 - r_4)(z_1 - z_3).
\end{aligned} \tag{5}$$

Приближенное конечно-разностное выражение полной потенциальной энергии системы получается суммированием величин энергий \mathcal{E}_j всех J ячеек в предположении, что вследствие малости ячеек в пределах каждой из них функции перемещений и их производные остаются постоянными:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}[u(r, z), w(r, z)] \approx \mathcal{E}(u_m, w_p) = 3\pi \sum_{j=1}^J \left\{ 3K_j(\varepsilon_0^2)_j + G_j[1 - \omega(\bar{\varepsilon}_i)_j](\varepsilon_i^2)_j \right\} r_j \frac{F_j}{2} - \\
- 2\pi \sum_{j=1}^J (R_{V_j} u_j + Z_{V_j} w_j) r_j \frac{F_j}{2} - 2\pi \sum_{k=1}^K (R_{S_k} u_k + Z_{S_k} w_k) r_k \Delta S_k, \tag{6}
\end{aligned}$$

где $K_j, G_j, \omega(\bar{\varepsilon}_i)_j, (\varepsilon_0)_j, (\varepsilon_i)_j$ – соответствующие характеристики и параметры в ячейке с номером j ; u_j, w_j, r_j – средние арифметические значения соответствующих величин в ячейке, которые определяются по формулам типа $u_j = (u_1 + u_2 + u_3 + u_4) / 4$; u_1, u_2, u_3, u_4 – радиальные перемещения узлов 1, 2, 3, 4 в ячейке с номером j (нумерация узлов ячейки показана на рис. 3, а); $F_j / 2$ – площадь ячейки с номером j ; R_{V_j}, Z_{V_j} – соответствующие проекции объёмных сил, приложенных к ячейке; R_{S_k}, Z_{S_k} – соответствующие проекции поверхностных нагрузок, приложенных к k -му участку контура ΔS_k ячейки, $\Delta S_k = \sqrt{(r_1 - r_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$ (рис. 3, б); r_k – средний радиус участка контура ΔS_k ячейки, $r_k = (r_1 + r_2) / 2$; u_k, w_k – средние перемещения участка контура ΔS_k , $u_k = (u_1 + u_2) / 2$, $w_k = (w_1 + w_2) / 2$.

Через u_m, w_p обозначены радиальные и осевые перемещения узлов сетки ($m = m1, m1 + 1, m1 + 2, \dots, M$; $p = p1, p1 + 1, p1 + 2, \dots, P$); $M - m1, P - p1$ – соответственно количество искоемых перемещений u, w , которое определяется типом геометрических граничных условий, задаваемых на контуре тела.

Использование аппроксимаций (5) позволяет получить выражения $(\varepsilon_0^2)_j$ и $(\varepsilon_i^2)_j$ для j -й ячейки, которые присутствуют в формуле для энергии (6).

Таким образом, задача отыскания минимума функционала полной потенциальной энергии системы (4) сводится к отысканию минимума функции многих переменных (6), отнесённых к узлам конечно-разностной сетки.

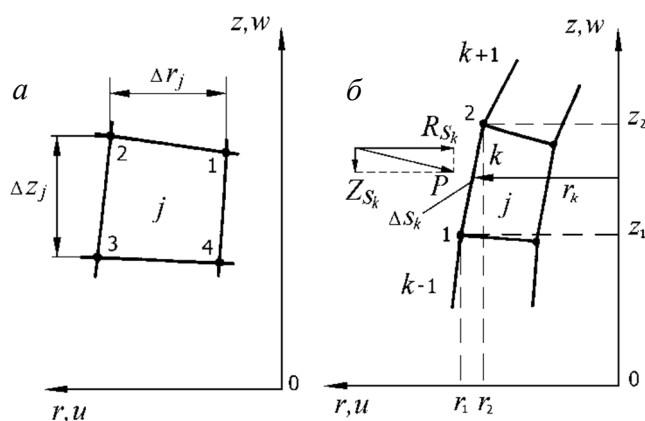


Рис. 3. Нумерация узлов j -й ячейки (а); к вычислению работы поверхностных нагрузок на контуре области (б)

Следует подчеркнуть достоинства вариационно-разностного метода, основанного на вариационном принципе Лагранжа:

- простота математической формулировки задачи;
- ясный физический смысл используемого функционала;
- автоматическое выполнение уравнений равновесия и статических граничных условий;
- возможность использования метода для расчёта тел сложной формы, в том числе неоднородных по физико-механическим характеристикам материалов;
- сводимость проблемы к решению системы линейных алгебраических уравнений, для реализации которой существует достаточно надёжный математический аппарат линейной алгебры;
- возможность поэтапного контроля точности выкладок и промежуточных результатов [5].

В работе С.М. Сквиренко [6] приводится схема алгоритма решения вариационной задачи:

ПРЕДМЕТНАЯ ПОСТАНОВКА – РАСЧЕТНАЯ СХЕМА –
 – КONTИНУАЛЬНАЯ ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА –
 – ДИСКРЕТНАЯ ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА –
 – АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ.

Наличие или отсутствие в схеме последнего звена определяет два пути реализации минимума функции многих переменных: соответственно использование необходимого условия экстремума полной потенциальной энергии системы, приводящего к системе линейных алгебраических уравнений, или прямая минимизация. В работе используется первый путь реализации минимума функции многих переменных.

После дискретизации вариационной задачи и получения выражения сечного аналога функционала энергии использование необходимого условия экстремума

$$\frac{\partial \mathcal{E}(u_m, w_p)}{\partial u_m} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{E}(u_m, w_p)}{\partial w_p} = 0$$

$$(m = m1, m1 + 1, \dots, M; \quad p = p1, p1 + 1, \dots, P)$$

сводит задачу минимизации функции многих переменных $\mathcal{E}(u_m, w_p)$ к решению системы n линейных алгебраических уравнений относительно $n = (M - m1) + (P - p1)$ искомым компонент вектора перемещений узлов конечно-разностной сетки

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} f_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (7)$$

Здесь a_{ij} – элементы матрицы коэффициентов $\{A\}$ СЛАУ; f_j – проекции вектора перемещений u_m, w_p на оси координат; b_i – свободные члены, включающие в себя статические и геометрические граничные условия. Необходимо отметить, что в задачах механики деформируемого твёрдого тела матрица коэффициентов $\{A\}$, к которой приводит ВРМ, симметрична, положительно определена и имеет ленточную структуру [7, 8], что улучшает сходимость и значительно сокращает объём необходимой памяти при реализации СЛАУ на ЭВМ, что очень важно для практических приложений.

В работе полученная система линейных алгебраических уравнений (7) решается итерационным методом Гаусса – Зейделя. Алгоритм этого метода, сходимость которого доказана на основе общей теории разностных схем [9], в предположении, что диагональные элементы матрицы отличны от нуля ($a_{ii} \neq 0$), записывается в следующем виде:

$$\sum_{j=1}^i a_{ij} f_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^n a_{ij} f_j^{(k)} = b_i,$$

где $f_j^{(k)}$ – j -я компонента вектора решения итерационного приближения с номером k .

Величина перемещения f_j на $(k+1)$ -й итерации определяется из уравнения

$$a_{ii} f_i^{(k+1)} = - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} f_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} f_j^{(k)} + b_i.$$

Из последнего соотношения видно, что метод Гаусса – Зейделя относится к так называемым неявным двухслойным итерационным методам.

О сходимости метода итераций П.М. Сосис в работе [8] пишет: «... Было доказано, что существуют универсальные итерационные алгоритмы, обладающие неизбежной сходимостью. Например, процесс Зейделя обладает неизбежной сходимостью для симметричных положительно определенных матриц, а этим свойством обладают матрицы методов сил и деформаций (при правильной постановке задачи). Однако необходимо ещё, чтобы в системе было диагональное преобладание (т. е. главные коэффициенты больше побоч-

ных). В противном случае процесс будет сходиться настолько медленно, что решение трудно будет получить».

В качестве критерия окончания итерационного процесса решения СЛАУ используется условие равенства с заранее заданной погрешностью ε вычисления искомым величин перемещений в двух последовательных итерациях. О близости к истинному решению также можно судить по степени выполнения теоремы Клапейрона (при использовании прямых методов решения СЛАУ теорема Клапейрона выполняется точно), согласно которой в состоянии равновесия

$$U = (A_1 + A_2) / 2, \tag{8}$$

или соотношения, получаемого подстановкой (8) в выражение для функционала энергии

$$\Xi = U - A_1 - A_2 = U - 2U = -U. \tag{9}$$

Следует отметить, что выражение (9) позволяет в процессе отладки программы и счёта задачи контролировать правильность процесса вычислений и выбранного направления движения к минимуму функции энергии [10].

Изложенный алгоритм неоднократно был протестирован на многочисленных примерах решения упругих и упругопластических задач, а также сравнением с экспериментом. С помощью созданного варианта ВРМ был решён ряд статических и квазистатических упругопластических задач для существенно неоднородных тел вращения в дву-и трёхмерной постановках.

Численные результаты

Рассматривается толстая круглая плита, нагруженная системой поверхностных нагрузок с интенсивностями q_1 , q_2 , q_3 и объёмной силой с коэффициентом перегрузки N (рис. 4).

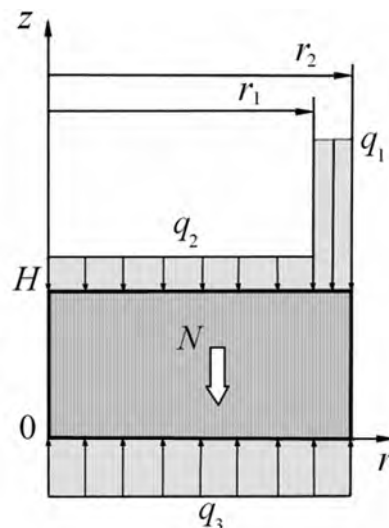


Рис. 4. Расчётная схема толстой плиты

Расчёт НДС проводится вариационно-разностным методом для значе- ний нагрузок: $q_1 = 725$ МПа, $q_2 = 140$ МПа, $q_3 = 350$ МПа, $N = 2000$. Гео- метрические размеры плиты следующие: $r_1 = 3,6$ см, $r_2 = 4,3$ см, толщина $OH = 2,4$ см. Физико-механические характеристики материала – модуль упругости $E = 2,02 \cdot 10^5$ МПа; коэффициент поперечной деформации (коэф- фициент Пуассона) $\nu = 0,3$; деформация начала текучести $\varepsilon_T = 0,0035$; плот- ность $\rho = 7800$ кг/м³.

При расчёте осесимметрично нагруженных тел вращения окружные пе- ремещения v , угловые деформации $\gamma_{r\theta}$, $\gamma_{\theta z}$ и касательные напряжения $\tau_{r\theta}$, $\tau_{\theta z}$ равны нулю. В то же время радиальные u и осевые w перемещения, ли- нейные ε_r , ε_θ , ε_z и угловые γ_{rz} деформации, нормальные σ_r , σ_θ , σ_z и кас- тельные τ_{rz} напряжения являются функциями координат r , z и не зависят от полярного угла θ .

Решение исходной динамической задачи в квазистатической постановке (пренебрегающей инерционными членами в уравнениях движения во всех или некоторых направлениях) возможно благодаря введению в расчётную схему нагружения массовых сил, являющихся следствием использования связанной с плитой неинерциальной системы цилиндрических координат r , θ , z . Согласно принципу Даламбера, «... всякое тело, движущееся с ускорением, можно рас- сматривать как неподвижное, добавив к реально действующим силам фиктив- ные силы инерции» [11]. Возникающие осевые силы инерции равняются произ- ведению ускорения конструкции в данный момент времени на его массу. Для работы с появляющимися массовыми силами вводится понятие коэффициента перегрузки (или просто перегрузки N), который определяется отношением ускорения тела a в данный момент к ускорению силы тяжести g : $N = a / g$.

Согласно расчётной схеме плиты (рис. 4), в выражении полной энергии (4) отсутствуют нагрузки, которые проецируются на ось r : $R_V = S_V = 0$. Объ- ёмная сила $Z_V = \gamma N = \rho g N$, где γ – удельный вес материала плиты. При реше- нии реализуются следующие статические и геометрические граничные условия:

- жёсткая стенка: $r = r_2$: $u(r_2, z) = 0$, $\tau_{rz}(r_2, z) = 0$;
- условия симметрии: $r = 0$: $u(0, z) = 0$, $\tau_{rz}(0, z) = 0$;
- угловая точка: $r = r_2$, $z = 0$, $w(r, z) = 0$.

Расчёты проводились для относительной погрешности вычисления пе- ремещений $\varepsilon = 0,001$.

Зависимости осевого перемещения плиты w от радиуса r представле- ны на рис. 5. Кривые 1, 2, 3, 4 соответствуют перемещениям узлов сетки для значений осевой координаты z , соответственно равной 0, 0,96; 1,92 и 2,40 см. Из рисунка видно, что большая часть плиты прогибается в направлении оси Oz . Лишь у внешнего края $r = r_2$, где действует давление q_1 , значительно превос- ходящее по величине q_3 , точки плиты получают отрицательные осевые пере- мещения w тем больше, чем ближе они расположены к верхней поверхности

$z = H$. Таким образом, представленные на рис. 5 результаты также демонстрируют характер изменения осевых перемещений по толщине плиты.

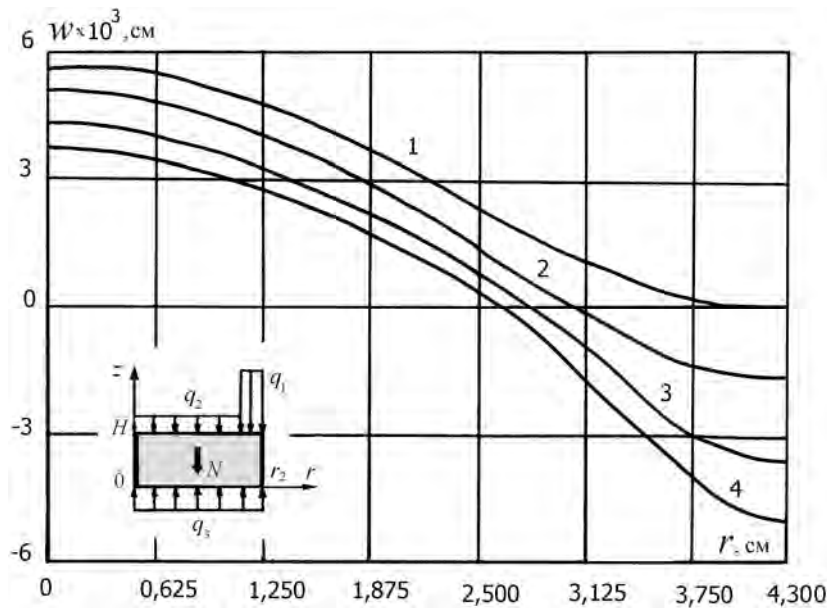


Рис. 5. Осевые перемещения круглой плиты

Распределение напряжений $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{rz}$ в средней по толщине части плиты в зависимости от радиуса r показано на рис. 6. Все напряжения, как это видно из рисунка, являются сжимающими. При этом напряжение σ_z значительно превосходит по величине остальные напряжения. Это особенно заметно в той части плиты, где приложено давление q_1 . Вычисления интенсивности деформаций ϵ_i показали, что для заданной системы нагрузок и материала плиты деформации не превышают деформацию начала текучести ϵ_T и зон упругопластических деформаций не наблюдается.

В табл. 1 представлены радиальные u_1, u_2 и осевые w_3, w_4, w_5 перемещения характерных узлов плиты с номерами 1, 2, 3, 4, 5 для двух вариантов размера конечно-разностной сетки: (11×6) , (21×11) . Первое число в скобках обозначает количество узлов по координате r , второе – по координате z . Эти узлы имеют следующие координаты (r, z) : 1 – $(r_2 / 2, 0)$; 2 – $(r_2 / 2, H)$; 3 – $(0, 0)$; 4 – $(0, H)$; 5 – (r_2, H) . В нижней строке табл. 1 помещена величина погрешности δ вычисления перемещений на двух сетках, которая не превышает 4 %.

Для контроля правильности и точности расчётов используется теорема Клапейрона, выражаемая соотношением (8). Составляющие полной потенциальной энергии, соответствующие её минимальному значению, полученному на сетке (11×6) , равны: $U = 459,146$ Дж, $A_1 = -5,557$ Дж, $A_2 = 923,942$ Дж.

Относительная погрешность выполнения соотношения (8) не превышает 0,01 %, что говорит о высокой точности полученного решения даже на достаточно грубой сетке.

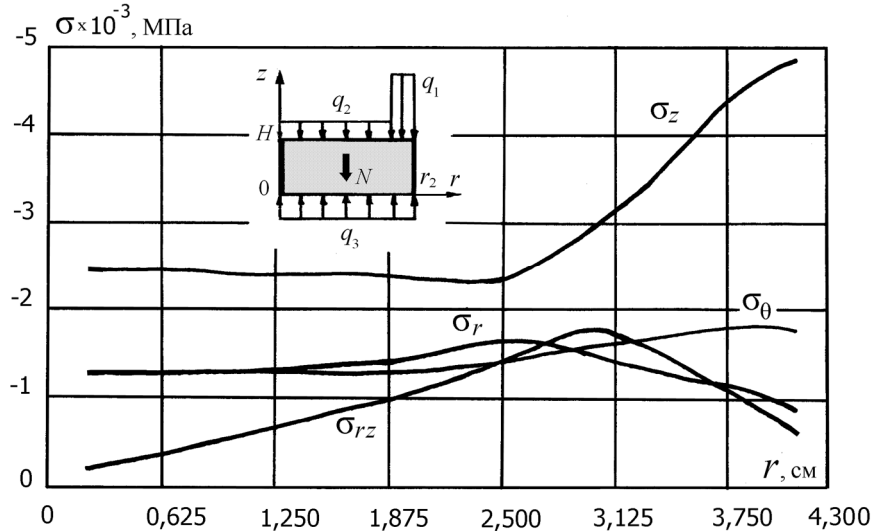


Рис. 6. Зависимость напряжений средней по толщине части плиты от координаты r

Таблица 1

**Зависимость величин перемещений плиты
от размеров конечно-разностной сетки**

Сетка	Перемещения, см				
	u_1	u_2	w_3	w_4	w_5
(11×6)	-0,00161	-0,00129	0,00563	0,00369	-0,00483
(21×11)	-0,00154	-0,00130	0,00557	0,00360	-0,00499
δ	4 %	1 %	1 %	2,5 %	3,5 %

Точность получаемого решения также следует проверять и по степени выполнения статических граничных условий, которые исходя из метода решения задачи удовлетворяются автоматически при минимизации функционала энергии. Степень удовлетворения граничных условий в напряжениях полностью зависит от степени дискретизации функционала энергии, т. е. от выбора параметров конечно-разностной сетки и аппроксимирующих выражений для производных.

В табл. 2 представлены результаты проверки выполнения статических граничных условий на верхней $z = H$ и нижней $z = 0$ поверхностях плиты, на которых действуют поверхностные нагрузки с интенсивностями q_1 , q_2 , q_3 . Числа, стоящие в столбцах, обозначают несовпадение полученных величин осевых напряжений σ_z с заданными величинами нагрузок q_1 , q_2 , q_3 в процентах.

Таблица 2

Погрешность выполнения статических граничных условий от размеров конечно-разностной сетки

Сетка	q_1	q_2	q_3
(11×6)	7,0 %	7,0 %	2,0 %
(21×11)	4,0 %	2,3 %	0,7 %

Из данных таблицы видно, что на верхней поверхности плиты имеет место большее несовпадение напряжений σ_z с заданными нагрузками q_1 и q_2 , чем на нижней поверхности, на которой задана нагрузка q_3 . Этот факт можно объяснить ступенчатым характером изменения внешнего давления на поверхности $z = H$ и значительной разницей между величинами интенсивностей q_1 и q_2 . Не следует также забывать, что напряжения вычисляются средними для ячеек и величины их обязательно будут отличаться от соответствующих величин интенсивности внешних поверхностных нагрузок, приложенных на контуре ячеек. Использование для расчёта сетки с вчетверо меньшей площадью ячеек (вторая строка табл. 2) значительно уменьшает величину погрешности выполнения статических граничных условий.

Таким образом, задача определения осесимметричного напряженно-деформированного состояния тела вращения, сформулированная как проблема поиска экстремума функционала Лагранжа, с использованием конечно-разностных представлений сведена к задаче минимизации функции большого числа переменных, являющихся компонентами вектора перемещений в узлах конечно-разностной сетки. При дискретизации функционала полной потенциальной энергии системы в двумерном случае используются аппроксимации производных через контурные интегралы.

Получены результаты расчёта осесимметричного НДС круглой толстой плиты, нагруженной системой массовых сил большой интенсивности и поверхностными нагрузками. Последние распределены вдоль радиуса в виде кусочно-постоянной функции, при этом уровни нагрузок на разных участках по величине отличаются между собой в несколько раз. В этом случае проблема выполнения статических граничных условий на верхней и нижней поверхностях плиты является особенно сложной. Приведены результаты, показывающие, что эта проблема успешно решена, что говорит в пользу достоверности полученных результатов определения НДС конструкции.

Следует отметить, что в ходе решения задачи проверялось выполнение теоремы Клапейрона. Низкий уровень погрешности при проверке этой теоремы позволяет утверждать, что задача решается с высокой точностью и также подтверждает достоверность полученных результатов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Колтунов, М.А. Упругость и прочность цилиндрических тел / М.А. Колтунов, Ю.Н. Васильев, В.А. Черных. – М. : Высшая школа, 1975. – 528 с.
2. Ильюшин, А.А. Пластичность / А.А. Ильюшин. – М.; Л. : ОГИЗ, 1948. – 376 с.

3. Гриффин, Д.С. Численное решение осесимметричных и плоских задач упругости / Д.С. Гриффин, Р.Б. Келлог // Механика : сб. переводов иностр. статей. – М. : Мир, 1968. – № 2 (108). – С. 111–125.
4. Нох, В.Ф. СЭЛ – совместный эйлерово-лагранжев метод для расчета нестационарных двумерных задач / В.Ф. Нох // Вычислительные методы в гидродинамике : сб. статей. – М. : Мир, 1967. – С. 128–184.
5. Барашков, В.Н. Алгоритм реализации задачи теории упругости и пластичности вариационно-разностным методом. Ч. 1 / В.Н. Барашков // Известия Томского политехнического университета. – 2003. – Т. 306. – № 3. – С. 23–28.
6. Сквиренко, С.М. Об одной численной реализации вариационных принципов в теории упругости / С.М. Сквиренко // Вопросы проектирования и расчета самолетов : сб. трудов. – Ташкент : Изд-во Таш. ПИ, 1977. – Вып. 205. – С. 3–8.
7. Кармишин, А.В. Вариационный метод получения конечно-разностных уравнений ортотропных пластин / А.В. Кармишин, В.И. Мяченков, А.А. Репин // Некоторые вопросы прочности конструкций. – ГОНТИ, 1967. – Вып. 3. – С. 63–71.
8. Сосис, П.М. Статически неопределимые системы / П.М. Сосис. – Киев : Будівельник, 1968. – 311 с.
9. Самарский, А.А. Теория разностных схем / А.А. Самарский. – М. : Наука, 1977. – 656 с.
10. Барашков, В.Н. Моделирование пространственного напряженно-деформированного состояния балки-стенки / В.Н. Барашков, А.А. Матвеев // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. – 2010. – № 3. – С. 92–104.
11. Бояршинов, С.В. Основы строительной механики машин / С.В. Бояршинов – М. : Машиностроение, 1973. – 456 с.

REFERENCES

1. Koltunov M.A., Vasiliev Y.N., Chernykh V.A. Uprugost' i prochnost' tsilindricheskikh tel [The resilience and strength of cylindrical body]. Moscow : Vysshaya Shkola Publ., 1975. 528 p. (rus)
2. Ilyushin A.A. Plastichnost' [Plasticity]. Leningrad : OGIZ Publ., 1948. 376 p. (rus)
3. Griffin D.S., Kellogg R.B. Numerical solution of axisymmetric and plane problems of elasticity. In: Mekhanika [Periodic collection of translations of foreign articles]. Moscow : Mir Publ., 1968. No. 2 (108). Pp. 111–125. (transl. from Engl.)
4. Noh V.F. SEL – simultaneous Euler-Lagrangian method for calculation of nonstationary two-dimensional problems. Computational methods in fluid dynamics: Sat. articles. Moscow : Mir Publ., 1967. Pp. 128–184. (transl. from Engl.)
5. Barashkov V.N. Algoritm realizatsii zadachi teorii uprugosti i plastichnosti variatsionno-raznostnym metodom. Ch. I [The algorithm of task implemenetation of the theory of elasticity and plasticity using variable differential method. Part I]. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*. 2003. V. 306. No. 3. Pp. 23–28. (rus)
6. Skvirenko S.M. Ob odnoi chislennoi realizatsii variatsionnykh printsipov v teorii uprugosti [Numerical implementation of variable principles in the theory of elasticity]. *Coll. Papers 'Problems of Airplane Design'*. Tashkent: Tash. PI Publ., 1977. V. 205. Pp. 3–8. (rus)
7. Karmishin A.V., Myachenkov V.I., Repin A.A. Variatsionnyi metod polucheniya konechno-raznostnykh uravnenii ortotropnykh plastin [Variable method of finite difference equations of op-orthotropic plates]. *Nekotorye voprosy prochnosti konstruksii*. GONTI Publ., 1967. V. 3. Pp. 63–71. (rus)
8. Sosis P.M. Sticheski neopredelime sistemy [Statically indeterminate systems]. Kiev : Budivelnik, 1968. 311 p. (rus)
9. Samarskiy A.A. Teoriya raznostnykh skhem [The theory of differential schemes]. Moscow : Nauka Publ., 1977. 656 p. (rus)
10. Barashkov V.N., Matveenko A.A. Modelirovanie prostranstvennogo napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya balki-stenki [Modeling the spatial stress-strain state of the beam-wall]. *Vestnik TSUAB*. 2010. No. 3. Pp. 92–104. (rus)
11. Boyarshinov S.V. Osnovy stroitel'noi mekhaniki mashin [Fundamentals of structural mechanics of machines]. Moscow : Mashinostroenie Publ., 1973. 456 p. (rus)