

Вестник Томского государственного  
архитектурно-строительного университета.  
2024. Т. 26. № 4. С. 187–198.

ISSN 1607-1859 (для печатной версии)  
ISSN 2310-0044 (для электронной версии)

Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo  
arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta –  
Journal of Construction and Architecture.  
2024; 26 (4): 187–198.

Print ISSN 1607-1859  
Online ISSN 2310-0044

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

УДК.624.04

DOI: 10.31675/1607-1859-2024-26-4-187-198

EDN: SRVIGY

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЖОРДАНОВЫХ ИСКЛЮЧЕНИЙ В АНАЛИЗЕ УСИЛИЙ ПРИ ИЗМЕНЕНИЯХ РАСЧЕТНОЙ СХЕМЫ БАЛКИ

**Дмитрий Николаевич Песцов, Маргарита Олеговна Моисеенко,  
Татьяна Алексеевна Трепутнева**

*Томский государственный архитектурно-строительный университет,  
г. Томск, Россия*

**Аннотация.** *Актуальность.* Работа посвящена актуальной проблеме сокращения времени расчетов при решении задач оптимизации стержневых систем.

*Цель* – исследование изменений усилий в поперечных сечениях статически неопределимой балки при внесении изменений в ее расчетную схему.

Поставленная цель достигается применением жордановых исключений для решения разрешающей системы уравнений. Применение жордановых исключений для анализа изменений рассматривается на примере формирования статически неопределимой балки путем соединения двух ранее рассчитанных статически неопределимых балок в одну.

*Результаты.* Использование данных в результате расчета двух отдельных статически неопределимых балок и аппарата жордановых исключений, позволило получить значения усилий и перемещений для статически неопределимой балки, сформированной путем соединения двух отдельных балок без необходимости формирования и решения новой системы разрешающих уравнений.

*Выводы.* Применение жордановых исключений для решения разрешающей системы уравнений позволяет определять новые значения усилий в поперечных сечениях стержней и перемещения узлов системы при внесении изменений (введение либо удаление опорных или внутренних связей, изменение жесткостных характеристик элементов статически неопределимых систем и т. д.) в расчетную схему без необходимости формирования и решения новой системы разрешающих уравнений при каждом изменении.

**Ключевые слова:** жордановы исключения, расчетная схема, стержневая система, анализ усилий

**Для цитирования:** Песцов Д.Н., Моисеенко М.О., Трепутнева Т.А. Использование жордановых исключений в анализе усилий при изменениях расчетной схемы балки // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. 2024. Т. 26. № 4. С. 187–198. DOI: 10.31675/1607-1859-2024-26-4-187-198. EDN: SRVIGY

## ORIGINAL ARTICLE

## JORDAN ELIMINATIONS IN FORCE ANALYSIS WHEN CHANGING BEAM STRUCTURAL DESIGN

Dmitrii N. Pestsov, Margarita O. Moiseenko, Tatyana A. Treputneva  
Tomsk State University of Architecture and Building, Tomsk, Russia

**Abstract. Purpose:** The aim of the work is to study changes in forces in cross sections of a statically indeterminate beam when changing the structural design.

**Methodology:** Jordan elimination is used to solve the system of equations. Jordan elimination used in the force analysis is considered on the example of the formation of a statically indeterminate beam by connecting two previously calculated statically indeterminate beams into one.

**Research findings:** The data obtained for two separate statically indeterminate beams and Jordan elimination allow to calculate the forces and displacements for a statically indeterminate beam obtained by connecting two separate beams without the need to solve a new system of resolving equations.

**Keywords:** Jordan elimination; structural design; rod system; force analysis

**For citation:** Pestsov D.N., Moiseenko M.O., Treputneva T.A. Jordan Eliminations in Force Analysis When Changing Beam Structural Design. Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta – Journal of Construction and Architecture. 2024; 26 (4): 187–198. DOI: 10.31675/1607-1859-2024-26-4-187-198. EDN: SRVIGY

В работах [1, 2, 3] на примере статически неопределимой балки (рис. 1, а) показан метод, позволяющий определять усилия в элементах балки без необходимости формирования новой системы разрешающих уравнений и их полного перерасчета в случае внесения таких изменений в расчетную схему [4, 5], как введение или удаление внешних связей. Для вычисления усилий использовались жордановы исключения (ЖИ) [6, 7, 8, 9] и тип конечного элемента, представленный на рис. 1, б.

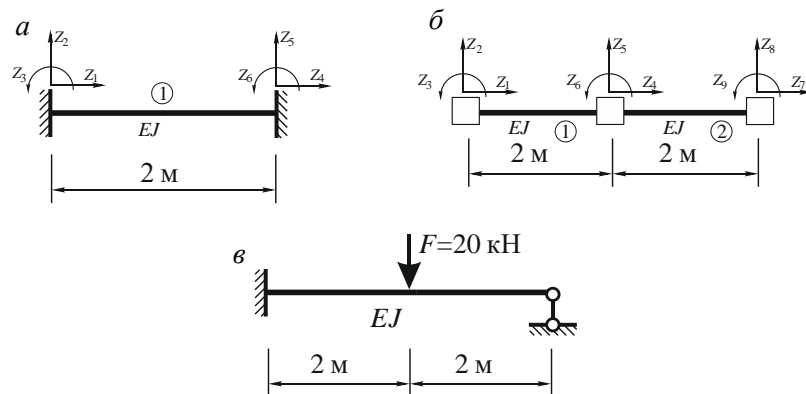


Рис. 1. Расчетные схемы балки:

а – статически неопределимая балка; б – конечный элемент метода перемещений; в – статически неопределимая балка с расстановкой связей

Fig. 1. Schematic of the beam:

а – statically indeterminate beam; б – final element of the displacement method; в – statically indeterminate beam with connections

В табл. 1 для балки, показанной на рис. 1, а, приведены данные, полученные в работе [1]. Элементы таблицы, находящиеся на пересечении столбца  $F$  и строк  $Z_1, Z_2, Z_3, Z_8$ , соответствуют значениям опорных реакций для балки длиной 4 м, загруженной посередине сосредоточенной силой  $F$ , имеющей жесткое защемление слева, шарнирное опирание справа (рис. 1, а).

Таблица 1  
Table 1

|       | $Z_1$ | $Z_2$ | $Z_3$ | $Z_4$ | $Z_5$ | $Z_6$ | $Z_7$ | $Z_8$ | $Z_9$ | $F$    |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|
| $Z_1$ | 0     | 0     | 0     | -1    | 0     | 0     | -1    | 0     | 0     | 0      |
| $Z_2$ | 0     | 0,05  | 0,19  | 0     | -0,69 | 0,28  | 0     | -0,05 | 0,38  | 13,75  |
| $Z_3$ | 0     | 0,19  | 0,75  | 0     | -0,75 | 0,13  | 0     | -0,19 | 0,5   | 15     |
| $Z_4$ | 1     | 0     | 0     | 0,05  | 0     | 0     | 0,05  | 0     | 0     | 0      |
| $Z_5$ | 0     | -0,69 | 0,75  | 0     | 0,58  | 0,13  | 0     | 0,32  | -0,5  | -11,67 |
| $Z_6$ | 0     | -0,28 | -0,13 | 0     | 0,13  | 0,31  | 0     | 0,29  | -0,25 | -2,5   |
| $Z_7$ | 1     | 0     | 0     | 0,05  | 0     | 0     | 0,1   | 0     | 0     | 0      |
| $Z_8$ | 0     | -0,05 | -0,19 | 0     | -0,31 | -0,28 | 0     | 0,05  | -0,38 | 6,25   |
| $Z_9$ | 0     | -0,38 | -0,5  | 0     | -0,5  | -0,25 | 0     | 0,38  | 1     | 10     |

Используя полученные данные (табл. 1), проведем дальнейшие изменения в расчетной схеме.

Из балки, представленной на рис. 1, а, получим балку, представленную на рис. 2, не составляя новую систему разрешающих уравнений и не производя полный их перерасчет.

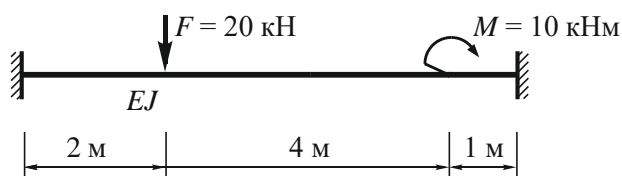


Рис. 2. Статически неопределимая балка  
Fig. 2. Statically indeterminate beam

Для такого преобразования добавим к балке (рис. 1) справа дополнительную балку (рис. 3, а).

Сформируем систему разрешающих уравнений для балки, изображенной на рис. 3, а, как показано в работе [1]. Примем  $EJ = 1$  кН·м<sup>2</sup>,  $EJ = 50$  кН. Делим балку на два конечных элемента, стержень 3 и стержень 4 (рис. 3, б).

Для стержня 3:

$$l_3 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(2 - 0)^2 + (0 - 0)^2} = 2 \text{ м};$$

$$\cos \alpha_3 = \frac{x_2 - x_1}{l_3} = \frac{2 - 0}{2} = 1; \quad \sin \alpha_3 = \frac{y_2 - y_1}{l_3} = \frac{0 - 0}{2} = 0.$$

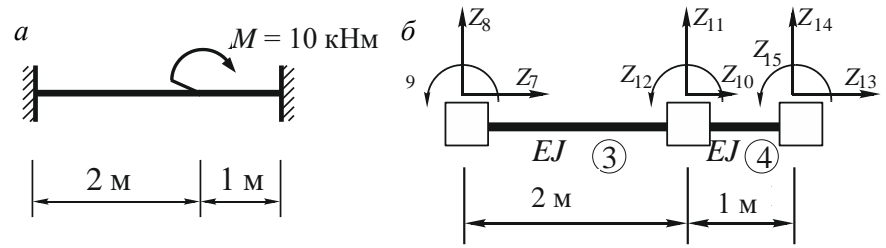


Рис. 3. Правая часть балки:

*a* – правая статически неопределимая балка; *б* – расстановка связей

Fig. 3. Right part of the beam:

*a* – statically indeterminate beam; *b* – connections

Матрица жесткости стержня 3 в местной системе координат:

$$\begin{aligned}
 [k_3^*] = & \begin{pmatrix} \frac{EA}{l_3} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l_3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ}{l_3^3} & \frac{6EJ}{l_3^2} & 0 & -\frac{12EJ}{l_3^3} & \frac{6EJ}{l_3^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{l_3^2} & \frac{4EJ}{l_3} & 0 & -\frac{6EJ}{l_3^2} & \frac{2EJ}{l_3} \\ -\frac{EA}{l_3} & 0 & 0 & \frac{EA}{l_3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EJ}{l_3^3} & -\frac{6EJ}{l_3^2} & 0 & \frac{12EJ}{l_3^3} & -\frac{6EJ}{l_3^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{l_3^2} & \frac{2EJ}{l_3} & 0 & -\frac{6EJ}{l_3^2} & \frac{4EJ}{l_3} \end{pmatrix} = \\
 & \begin{pmatrix} \frac{50}{2} & 0 & 0 & -\frac{50}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 \cdot 1}{8} & \frac{6 \cdot 1}{4} & 0 & -\frac{12 \cdot 1}{8} & \frac{6 \cdot 1}{4} \\ 0 & \frac{6 \cdot 1}{4} & \frac{4 \cdot 1}{2} & 0 & -\frac{6 \cdot 1}{4} & \frac{2 \cdot 1}{2} \\ -\frac{50}{2} & 0 & 0 & \frac{50}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12 \cdot 1}{8} & -\frac{6 \cdot 1}{4} & 0 & \frac{12 \cdot 1}{8} & -\frac{6 \cdot 1}{4} \\ 0 & \frac{6 \cdot 1}{4} & \frac{2 \cdot 1}{2} & 0 & -\frac{6 \cdot 1}{4} & \frac{4 \cdot 1}{2} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} 25 & 0 & 0 & -25 & 0 & 0 \\ 0 & 1,5 & 1,5 & 0 & -1,5 & 1,5 \\ 0 & 1,5 & 2 & 0 & -1,5 & 1 \\ -25 & 0 & 0 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & -1,5 & -1,5 & 0 & 1,5 & -1,5 \\ 0 & 1,5 & 1 & 0 & -1,5 & 2 \end{vmatrix}$$

Матрица направляющих косинусов:

$$[C_3] = \begin{vmatrix} \cos\alpha_3 & -\sin\alpha_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin\alpha_{31} & \cos\alpha_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha_3 & -\sin\alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\alpha_3 & \cos\alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Матрица жесткости стержня 3 в общей системе координат:

$$[k_3] = [C_3]^T [k_3^*] [C_3] = \begin{vmatrix} 25 & 0 & 0 & -25 & 0 & 0 \\ 0 & 1,5 & 1,5 & 0 & -1,5 & 1,5 \\ 0 & 1,5 & 2 & 0 & -1,5 & 1 \\ -25 & 0 & 0 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & -1,5 & -1,5 & 0 & 1,5 & -1,5 \\ 0 & 1,5 & 1 & 0 & -1,5 & 2 \end{vmatrix}$$

Для стержня 4:

$$l_4 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2} = 1 \text{ м};$$

$$\cos\alpha_4 = \frac{x_2 - x_1}{l_4} = \frac{1-0}{1} = 1; \quad \sin\alpha_4 = \frac{y_2 - y_1}{l_4} = \frac{0-0}{2} = 0.$$

Сформируем матрицу жесткости стержня 2 в местной системе координат:

$$[k_4^*] = \begin{vmatrix} Z_{10} & Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & Z_{14} & Z_{15} \\ \frac{EA}{l_4} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l_4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ}{l_4^3} & \frac{6EJ}{l_4^2} & 0 & -\frac{12EJ}{l_4^3} & \frac{6EJ}{l_4^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{l_4^2} & \frac{4EJ}{l_4} & 0 & -\frac{6EJ}{l_4^2} & \frac{2EJ}{l_4} \\ -\frac{EA}{l_4} & 0 & 0 & \frac{EA}{l_4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EJ}{l_4^3} & -\frac{6EJ}{l_4^2} & 0 & \frac{12EJ}{l_4^3} & -\frac{6EJ}{l_4^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{l_4^2} & \frac{2EJ}{l_4} & 0 & -\frac{6EJ}{l_4^2} & \frac{4EJ}{l_4} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{50}{1} & 0 & 0 & -\frac{50}{1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 \cdot 1}{1} & \frac{6 \cdot 1}{1} & 0 & -\frac{12 \cdot 1}{1} & \frac{6 \cdot 1}{1} \\ 0 & \frac{6 \cdot 1}{1} & \frac{4 \cdot 1}{1} & 0 & -\frac{6 \cdot 1}{1} & \frac{2 \cdot 1}{1} \\ -\frac{50}{1} & 0 & 0 & \frac{50}{1} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12 \cdot 1}{1} & -\frac{6 \cdot 1}{1} & 0 & \frac{12 \cdot 1}{1} & -\frac{6 \cdot 1}{1} \\ 0 & \frac{6 \cdot 1}{1} & \frac{2 \cdot 1}{1} & 0 & -\frac{6 \cdot 1}{1} & \frac{4 \cdot 1}{1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 50 & 0 & 0 & -50 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6 & 0 & -12 & 6 \\ 0 & 6 & 4 & 0 & -6 & 2 \\ -50 & 0 & 0 & 50 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6 & 0 & 12 & -6 \\ 0 & 6 & 2 & 0 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

Матрица направляющих косинусов:

$$[C_4] = \begin{pmatrix} \cos \alpha_4 & -\sin \alpha_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \alpha_4 & \cos \alpha_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha_4 & -\sin \alpha_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \alpha_4 & \cos \alpha_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица жесткости стержня 4 в общей системе координат:

$$[k_4] = [C_4]^T [k_4^*] [C_4] = \begin{pmatrix} 50 & 0 & 0 & -50 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6 & 0 & -12 & 6 \\ 0 & 6 & 4 & 0 & -6 & 2 \\ -50 & 0 & 0 & 50 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6 & 0 & 12 & -6 \\ 0 & 6 & 2 & 0 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

Значения перемещений и усилий в балке, приведенной на рис. 3, а, даны в табл. 2.

Таблица 2

Table 2

|          | $Z_7$ | $Z_8$ | $Z_9$ | $Z_{10}$ | $Z_{11}$ | $Z_{12}$ | $Z_{13}$ | $Z_{14}$ | $Z_{15}$ | $F$ |
|----------|-------|-------|-------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|-----|
| $Z_7$    | 25    | 0     | 0     | -25      | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0   |
| $Z_8$    | 0     | 1,5   | 1,5   | 0        | -1,5     | 1,5      | 0        | 0        | 0        | 0   |
| $Z_9$    | 0     | 1,5   | 2     | 0        | -1,5     | 1        | 0        | 0        | 0        | 0   |
| $Z_{10}$ | -25   | 0     | 0     | 75       | 0        | 0        | -50      | 0        | 0        | 0   |
| $Z_{11}$ | 0     | -1,5  | -1,5  | 0        | 13,5     | 4,5      | 0        | -12      | 6        | 0   |
| $Z_{12}$ | 0     | 1,5   | 1     | 0        | 4,5      | 6        | 0        | -6       | 2        | 10  |
| $Z_{13}$ | 0     | 0     | 0     | -50      | 0        | 0        | 50       | 0        | 0        | 0   |
| $Z_{14}$ | 0     | 0     | 0     | 0        | -12      | -6       | 0        | 12       | -6       | 0   |
| $Z_{15}$ | 0     | 0     | 0     | 0        | 6        | 2        | 0        | -6       | 4        | 0   |

Сделав по табл. 2 три шага ЖИ с разрешающими элементами (РЭ)  $Z_{10}$ ,  $Z_{11}$ ,  $Z_{12}$ , получим табл. 3, содержащую значения перемещений и усилий в балке на рис. 4, б.

Таблица 3

Table 3

|          | $Z_7$ | $Z_8$ | $Z_9$ | $Z_{10}$ | $Z_{11}$ | $Z_{12}$ | $Z_{13}$ | $Z_{14}$ | $Z_{15}$ | $F$   |
|----------|-------|-------|-------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|-------|
| $Z_7$    | 16,7  | 0     | 0     | -0,33    | 0        | 0        | -16,7    | 0        | 0        | 0     |
| $Z_8$    | 0     | 0,444 | 0,667 | 0        | -0,27    | 0,444    | 0        | -0,44    | 0,667    | -4,44 |
| $Z_9$    | 0     | 0,667 | 1,333 | 0        | -0,22    | 0,333    | 0        | -0,67    | 0,667    | -3,33 |
| $Z_{10}$ | 0,33  | 0     | 0     | 0,01     | 0        | 0        | 0,667    | 0        | 0        | 0     |
| $Z_{11}$ | 0     | 0,259 | 0,222 | 0        | 0,1      | -0,07    | 0        | 0,740    | -0,44    | 0,740 |
| $Z_{12}$ | 0     | -0,44 | -0,33 | 0        | -0,07    | 0,22     | 0        | 0,444    | 0        | -2,22 |
| $Z_{13}$ | -16,7 | 0     | 0     | -0,67    | 0        | 0        | 16,67    | 0        | 0        | 0     |
| $Z_{14}$ | 0     | -0,44 | -0,67 | 0        | -0,74    | -0,44    | 0        | 0,444    | -0,67    | 4,444 |
| $Z_{15}$ | 0     | 0,667 | 0,667 | 0        | 0,444    | 0        | 0        | -0,67    | 1,333    | 0     |

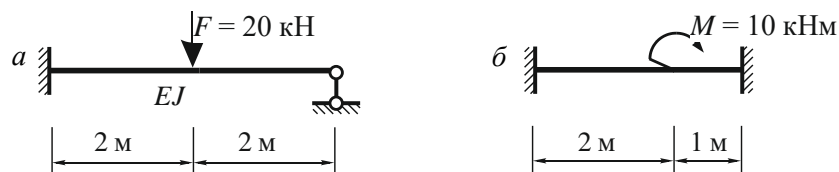


Рис. 4. Две отдельные статически неопределимые балки:

$a$  – левая балка;  $b$  – правая балка

Fig. 4. Two separate statically indeterminate beams:

$a$  – left beam;  $b$  – right beam

В табл. 1, 3 содержатся данные отдельно для левой и правой балок (рис. 4, а, б). Соединим два стержня в одну конструкцию. Вначале введем для левой балки (рис. 4, а) горизонтальную и моментную связи на правой опоре, сделав два шага ЖИ по элементам на пересечении строк и столбцов с одинаковыми индексами  $Z_7$  и  $Z_9$  в табл. 1. Полученные значения соответствуют балке, показанной на рис. 5, а. Значения усилий и перемещений записаны в табл. 4.

Таблица 4  
Table 4

|       | $Z_1$ | $Z_2$ | $Z_3$ | $Z_4$ | $Z_5$ | $Z_6$ | $Z_7$ | $Z_8$ | $Z_9$ | $F$   |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $Z_1$ | 12,5  | 0     | 0     | -0,5  | 0     | 0     | -12,5 | 0     | 0     | 0     |
| $Z_2$ | 0     | 0,19  | 0,375 | 0     | -0,5  | 0,375 | 0     | -0,19 | 0,38  | 10    |
| $Z_3$ | 0     | 0,38  | 1     | 0     | -0,5  | 0,25  | 0     | -0,38 | 0,5   | 10    |
| $Z_4$ | 0,5   | 0     | 0     | 0,02  | 0     | 0     | 0,5   | 0     | 0     | 0     |
| $Z_5$ | 0     | 0,5   | 0,5   | 0     | 0,333 | 0     | 0     | 0,5   | -0,5  | -6,67 |
| $Z_6$ | 0     | -0,38 | -0,25 | 0     | 0     | 0,25  | 0     | 0,38  | -0,25 | 0     |
| $Z_7$ | -12,5 | 0     | 0     | -0,5  | 0     | 0     | 12,5  | 0     | 0     | 0     |
| $Z_8$ | 0     | -0,19 | -0,38 | 0     | -0,5  | -0,38 | 0     | 0,19  | -0,38 | 10    |
| $Z_9$ | 0     | 0,38  | 0,5   | 0     | 0,5   | 0,25  | 0     | -0,38 | 1     | -10   |

В табл. 3, 4 находятся значения усилий и перемещений для двух отдельных балок с жесткими защемлениями по краям (рис. 5).

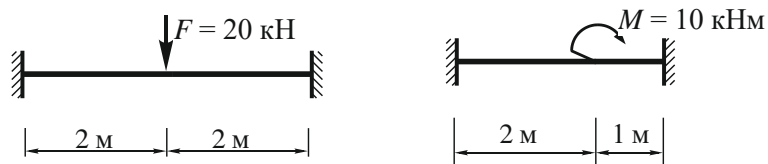


Рис. 5. Статически неопределимые балки с жесткими закреплениями по концам  
Fig. 5. Statically indeterminate beams with rigid fasteners at its ends

Соберем две отдельные балки в одну (рис. 6). Для этого необходимо соединить две таблицы. Данные записываются по соответствующим ячейкам, числа из табл. 3, 4 с элементами на пересечении строк и столбцов с индексами  $Z_7$ ,  $Z_8$ ,  $Z_9$  суммируются. После всех преобразований получим значения, приведенные в табл. 5, которая представляет собой систему разрешающих уравнений смешанного метода [2] для балки, представленной на рис. 6.



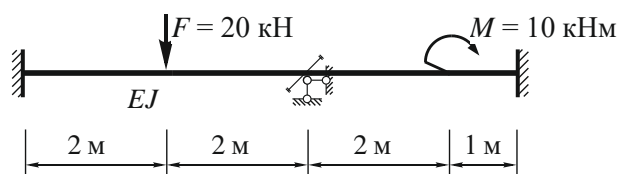


Рис. 6. Статически неопределимая балка, собранная из двух отдельных балок  
 Fig. 6. Statically indeterminate beam assembled from two separate beams

Таблица 5  
 Table 5

|          | $Z_1$ | $Z_2$   | $Z_3$  | $Z_4$ | $Z_5$ | $Z_6$  | $Z_7$   | $Z_8$   | $Z_9$  | $Z_{10}$ | $Z_{11}$ | $Z_{12}$ | $Z_{13}$ | $Z_{14}$ | $Z_{15}$ | $F$    |
|----------|-------|---------|--------|-------|-------|--------|---------|---------|--------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|--------|
| $Z_1$    | 12,5  | 0       | 0      | -0,5  | 0     | 0      | -12,5   | 0       | 0      | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0      |
| $Z_2$    | 0     | 0,1875  | 0,375  | 0     | -0,5  | 0,375  | 0       | -0,1875 | 0,375  | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 10     |
| $Z_3$    | 0     | 0,375   | 1      | 0     | -0,5  | 0,25   | 0       | -0,375  | 0,5    | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 10     |
| $Z_4$    | 0,5   | 0       | 0      | 0,02  | 0     | 0      | 0,5     | 0       | 0      | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0      |
| $Z_5$    | 0     | 0,5     | 0,5    | 0     | 0,333 | 0      | 0       | 0,5     | -0,5   | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | -6,67  |
| $Z_6$    | 0     | -0,375  | -0,25  | 0     | 0     | 0,25   | 0       | 0,375   | -0,25  | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0        | 0      |
| $Z_7$    | -12,5 | 0       | 0      | -0,5  | 0     | 0      | 29,1667 | 0       | 0      | -0,333   | 0        | 0        | -16,67   | 0        | 0        | 0      |
| $Z_8$    | 0     | -0,1875 | -0,375 | 0     | -0,5  | -0,375 | 0       | 0,6319  | 0,2917 | 0        | -0,2593  | 0,444    | 0        | -0,444   | 0,6667   | 5,5556 |
| $Z_9$    | 0     | 0,375   | 0,5    | 0     | 0,5   | 0,25   | 0       | 0,2917  | 2,3333 | 0        | -0,222   | 0,333    | 0        | -0,667   | 0,667    | -13,33 |
| $Z_{10}$ | 0     | 0       | 0      | 0     | 0     | 0      | 0,333   | 0       | 0      | 0,013    | 0        | 0        | 0,667    | 0        | 0        | 0      |
| $Z_{11}$ | 0     | 0       | 0      | 0     | 0     | 0      | 0       | 0,259   | 0,222  | 0        | 0,099    | -0,074   | 0        | 0,741    | -0,444   | 0,7407 |
| $Z_{12}$ | 0     | 0       | 0      | 0     | 0     | 0      | 0       | -0,444  | -0,333 | 0        | -0,074   | 0,222    | 0        | 0,444    | 0        | -2,222 |
| $Z_{13}$ | 0     | 0       | 0      | 0     | 0     | 0      | -16,667 | 0       | 0      | -0,667   | 0        | 0        | 16,667   | 0        | 0        | 0      |
| $Z_{14}$ | 0     | 0       | 0      | 0     | 0     | 0      | 0       | -0,444  | -0,667 | 0        | -0,741   | -0,444   | 0        | 0,444    | -0,667   | 4,444  |
| $Z_{15}$ | 0     | 0       | 0      | 0     | 0     | 0      | 0       | 0,667   | 0,667  | 0        | 0,444    | 0        | 0        | -0,667   | 1,333    | 0      |

Для получения перемещений и усилий в балке, показанной на рис. 2, необходимо удалить связи  $Z_7$ ,  $Z_8$ ,  $Z_9$  в балке, изображенной на рис. 6. Сделать это можно, произведя расчеты ЖИ по табл. 5 с РЭ, находящимися на главной диагонали (элементы на пересечении строк и столбцов с одинаковыми индексами  $Z_7$ ,  $Z_8$ ,  $Z_9$ ).

Табл. 6 представляет собой данные усилий и перемещений для балки, изображенной на рис. 2.

Таблица 6  
Table 6

|                 | Z <sub>1</sub> | Z <sub>2</sub> | Z <sub>3</sub> | Z <sub>4</sub> | Z <sub>5</sub> | Z <sub>6</sub> | Z <sub>7</sub> | Z <sub>8</sub> | Z <sub>9</sub> | Z <sub>10</sub> | Z <sub>11</sub> | Z <sub>12</sub> | Z <sub>13</sub> | Z <sub>14</sub> | Z <sub>15</sub> | F       |
|-----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|---------|
| Z <sub>1</sub>  | 7,143          | 0              | 0              | -0,714         | 0              | 0              | -0,429         | 0              | 0              | 0               | 0               | 0               | -7              | 0               | 0               | 0       |
| Z <sub>2</sub>  | 0              | 0,035          | 0,122          | 0              | -0,802         | 0,175          | 0              | -0,394         | 0,21           | 0               | 0               | 0               | 0               | 0               | 0               | 14,985  |
| Z <sub>3</sub>  | 0              | 0,122          | 0,571          | 0              | -1,02          | -0,102         | 0              | -0,735         | 0,306          | 0               | 0               | 0               | 0               | 0               | 0               | 18,163  |
| Z <sub>4</sub>  | 0,714          | 0              | 0              | 0,029          | 0              | 0              | 0,017          | 0              | 0              | 0               | 0               | 0               | 0               | 0               | 0               | 0       |
| Z <sub>5</sub>  | 0              | 0,802          | 1,02           | 0              | 0,972          | 0              | 0              | 0,945          | -0,332         | 0               | 0               | 0               | 0               | 0               | 0               | -16,346 |
| Z <sub>6</sub>  | 0              | -0,175         | 0,102          | 0              | 0              | 0,554          | 0              | 0,682          | -0,192         | 0               | 0               | 0               | 0               | 0               | 0               | -6      |
| Z <sub>7</sub>  | 0,429          | 0              | 0              | 0,017          | 0              | 0              | 0,034          | 0              | 0              | 0,011           | 0               | 0               | 0,571           | 0               | 0               | 0       |
| Z <sub>8</sub>  | 0              | 0,394          | 0,735          | 0              | 0,945          | 0,682          | 0              | 1,679          | -0,21          | 0               | 0,389           | -0,676          | 0               | 0,606           | -0,98           | -12,128 |
| Z <sub>9</sub>  | 0              | -0,21          | -0,306         | 0              | -0,332         | -0,192         | 0              | -0,21          | 0,455          | 0               | 0,047           | -0,058          | 0               | 0,21            | -0,163          | 7,23    |
| Z <sub>10</sub> | 0              | 0              | 0              | 0              | 0              | 0              | 0,011          | 0              | 0              | 0,017           | 0               | 0               | 0,857           | 0               | 0               | 0       |
| Z <sub>11</sub> | 0              | 0              | 0              | 0              | 0              | 0              | 0              | 0,389          | 0,047          | 0               | 0,21            | -0,262          | 0               | 0,945           | -0,735          | -0,797  |
| Z <sub>12</sub> | 0              | 0              | 0              | 0              | 0              | 0              | 0              | -0,676         | -0,058         | 0               | -0,262          | 0,542           | 0               | 0,105           | 0               | 0,758   |
| Z <sub>13</sub> | -7             | 0              | 0              | 0              | 0              | 0              | -0,571         | 0              | 0              | -0,857          | 0               | 0               | 7,143           | 0               | 0               | 0       |
| Z <sub>14</sub> | 0              | 0              | 0              | 0              | 0              | 0              | 0              | -0,606         | -0,21          | 0               | -0,945          | -0,105          | 0               | 0,035           | -0,122          | 5,015   |
| Z <sub>15</sub> | 0              | 0              | 0              | 0              | 0              | 0              | 0              | 0,98           | 0,163          | 0               | 0,735           | -0,49           | 0               | -0,122          | 0,571           | -3,265  |

Таким образом, рассмотренный выше метод позволяет учитывать изменения в расчетной схеме балки (добавлять или удалять внешние и внутренние связи, добавлять или удалять элементы) без необходимости формирования и решения новой системы разрешающих уравнений при каждом изменении в расчетной схеме балки.

## СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Песцов Д.Н. Применение жордановых исключений для анализа стержневых систем при изменениях в расчетной схеме // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. 2021. Т. 23. № 1. С. 96–104.
2. Песцов Д.Н. Статический анализ шарнирно-стержневых систем при изменениях в расчетной схеме // Сборник трудов молодых ученых НГАСУ. Новосибирск : Новосиб. гос. архит.-строит. ун-т, 1999. № 2. 152 с.
3. Песцов Д.Н., Те А.Б. Анализ шарнирно-стержневых систем при изменениях в расчетной схеме // Сборник тезисов докладов научно-технической конференции, Новосибирск, 01–30 апреля 1995 г. Новосибирск : Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет (Сибстрин), 1995. С. 2–4.

4. *Серазутдинов М.Н., Убайдуллоев М.Н., Низамеев В.Г.* Расчет нагруженных конструкций, усиливаемых способами увеличения сечения и изменения расчетной схемы // Известия Казанского государственного архитектурно-строительного университета. 2016. № 3 (37). С. 255–262.
5. *Кабанцев О.В., Тамразян А.Г.* Учет изменений расчетной схемы при анализе работы конструкции // Инженерно-строительный журнал. 2014. № 5 (49). С. 15–26.
6. *Те А.Б.* Механическая интерпретация жордановых исключений в задачах расчета статически неопределимых систем // Исследования по строительной механике и строительным конструкциям. Томск : Изд-во Том. ун-та, 1989. С. 144–150.
7. *Перельмутер А.В., Сливкер В.И.* Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. Москва : ДМК-Пресс, 2011. 736 с.
8. *Прихач Н.К., Кондратьева Н.А.* Математическое программирование. Минск : БНТУ, 2021. 157 с.
9. *Зуховицкий С.И., Авдеева Л.И.* Линейное и выпуклое программирование. Москва : Наука, 1967. 460 с.

## REFERENCES

1. *Pestsov D.N.* Jordan Eliminations in Bar System Analysis with Changes in Design Model. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta – Journal of Construction and Architecture*. 2021; 23 (1): 96–104. (In Russian)
2. *Pestsov D.N.* Static Analysis of Hinge-Rod Systems with Changes in Structural Design. *Sbornik trudov molodykh uchenykh NGASU*. 1999; (2) 152. (In Russian)
3. *Pestsov D.N., Te A.B.* Analysis of Hinge-Rod Systems with Changes in Structural Design. In: *Proc. Sci. Conf.*, Novosibirsk, April 1–9. 1995. Pp. 2–4. (In Russian)
4. *Serazutdinov M.N., Ubaidulloev M.N., Nizameev V.G.* Calculation of Loaded Structures with Reinforced Cross Section and Changed Structural Design. *Izvestiya Kazanskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta*. 2016; 3 (37): 255–262. (In Russian)
5. *Kabantsev O.V., Tamrazyan A.G.* Changes in Structural Design in Analysis of Operation. *Inzhenerno-stroitel'nyi zhurnal*. 2014; 5 (49): 15–26. (In Russian)
6. *Te A.B.* Mechanical Interpretation of Jordan Eliminations in Calculation of Statically Indeterminate Systems. In: *Research on Structural Mechanics and Structures*. Tomsk: TSU, 1989. Pp. 144–150. (In Russian)
7. *Perel'muter A.V., Slivker V.I.* Design Models of Constructions and Their Analysis. Moscow: ДМК-Press, 2011. 736 p. (In Russian)
8. *Prikhach N.K., Kondrat'eva N.A.* Mathematical Programming. Minsk, 2021. 157 p. (In Russian)
9. *Zukhovitskii S.I., Avdeeva L.I.* Linear and Convex Programming. Moscow: Nauka, 1967. 460 p. (In Russian)

## Сведения об авторах

*Песцов Дмитрий Николаевич*, канд. техн. наук, Томский государственный архитектурно-строительный университет, 634003, г. Томск, пл. Соляная, 2, DmitryPestsov@rambler.ru

*Моисеевко Маргарита Олеговна*, канд. техн. наук, Томский государственный архитектурно-строительный университет, 634003, г. Томск, пл. Соляная, 2, mmo77@mail.ru

*Трепутнева Татьяна Алексеевна*, канд. техн. наук, Томский государственный архитектурно-строительный университет, 634003, г. Томск, пл. Соляная, 2, tta2019tta@yandex.ru

## Authors Details

*Dmitry N. Pestsov*, PhD, Tomsk State University of Architecture and Building, 2, Solyanaya Sq., 634003, Tomsk, Russia, DmitryPestsov@rambler.ru

*Margarita O. Moiseenko*, PhD, Tomsk State University of Architecture and Building, 2, Solyanaya Sq., 634003, Tomsk, Russia, mmo77@mail.ru

*Tatiana A. Treputneva*, PhD, Tomsk State University of Architecture and Building, 2, Sol-  
yanaya Sq., 634003, Tomsk, Russia, tta2019tta@yandex.ru

**Вклад авторов**

Все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.  
Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Authors contributions**

The authors contributed equally to this article.  
The authors declare no conflicts of interests.

Статья поступила в редакцию 21.05.2024  
Одобрена после рецензирования 06.06.2024  
Принята к публикации 14.06.2024

Submitted for publication 21.05.2024  
Approved after review 06.06.2024  
Accepted for publication 14.06.2024