

УДК 624.21.042.8

*КАРТОПОЛЬЦЕВ ВЛАДИМИР МИХАЙЛОВИЧ, докт. техн. наук,
профессор,
kaf_most@mail.ru
Томский государственный архитектурно-строительный университет,
634003, г. Томск, пл. Соляная, 2,
САФРОНОВ ВАСИЛИЙ МИХАЙЛОВИЧ, гл. ассистент,
Высшее строительное училище «Любен Каравелов»,
1373, Болгария, г. София, ул. Суходолска, 175,
КАРТОПОЛЬЦЕВ АНДРЕЙ ВЛАДИМИРОВИЧ, канд. техн. наук, доцент,
kaf_most@mail.ru
КОЛМАКОВ БОРИС ДМИТРИЕВИЧ, аспирант,
boriskolmakov@mail.ru
Томский государственный архитектурно-строительный университет,
634003, г. Томск, пл. Соляная, 2*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ В СТАЛЕЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ МОСТАХ

Рассмотрены и проанализированы условия и зависимости между параметрами нагружения и характеристиками напряженно-деформированного состояния сталежелезобетонных мостовых балок в условиях статического и динамического нагружения. Получены зависимости, отражающие реальное воздействие системы «автомобиль + пролетное строение» на несущие балки и их напряженно-деформированное состояние. Отмечается особая роль инерционного воздействия нагрузки от веса балок при динамическом нагружении.

Ключевые слова: сталежелезобетонные балки; динамическое нагружение; усилия; деформации; напряжения; жесткость; геометрические характеристики.

*VLADIMIR M. KARTOPOLTSEV, DSc, Professor,
kaf_most@mail.ru
Tomsk State University of Architecture and Building,
2, Solyanaya Sq., 634003, Tomsk, Russia,
VASILII M. SAFRONOV, Chief Assistant,
Luben Karavelov Higher School for Civil Engineering,
175, Suhodolska Str., 1373, Sofia, Bulgaria,
ANDREI V. KARTOPOLTSEV, PhD, A/Professor,
kaf_most@mail.ru
BORIS D. KOLMAKOV, Research Assistant,
boriskolmakov@mail.ru
Tomsk State University of Architecture and Building,
2, Solyanaya Sq., 634003, Tomsk, Russia*

STRESS-STRAIN STATE OF COMPOSITE BRIDGES

The paper presents the analysis of the conditions and dependencies of the loading parameters and the stress-strain state of composite steel bridge beams under static and dynamic load-

ing. The dependences are obtained for the real impact of the vehicle–superstructure system on the supporting beams and the stress-strain state. The special attention is paid to the inertial effects from the dead weight of the beams under the dynamic loading.

Keywords: composite beams; dynamic loading; force; deformation; stress; stiffness; geometry.

При общепризнанной высокой надежности сталежелезобетонных пролетных строений мостов в процессе их эксплуатации на современные подвижные нагрузки с дефектами на проезжей части все же происходит снижение их долговечности и остаточного ресурса. Связано это, прежде всего, с проявлениями изменения напряженно-деформированного состояния и жесткости несущих балок. Техническая диагностика мостовых сталежелезобетонных конструкций показала, что для обеспечения долговечности и длительной безопасной эксплуатации необходим более совершенный анализ напряженно-деформированного состояния несущих балок пролетных строений с дальнейшим совершенствованием их расчета в рамках существующих предельных состояний и возможности автоматического регулирования статических и динамических параметров, характеризующих эксплуатационную способность мостов [1]. Эти обстоятельства составляют основу входных управляющих параметров напряженно-деформированного состояния мостового сооружения в целом.

Управление эксплуатационными параметрами сталежелезобетонных мостов на основе критического анализа напряженно-деформированного состояния и автоматического регулирования характеристик работы пролетного строения представляет актуальную задачу и относится к пионерным направлениям проектирования в отечественном и зарубежном мостостроении.

Ретроспективный анализ исследований динамической работы пролетных строений мостов показал, что единственным параметром, отражающим воздействие временной подвижной нагрузки, является динамический коэффициент [Там же]. Однако результаты теоретических и экспериментальных исследований в этой области за последние 30 лет указывают на недостаточность такого трактования в учете воздействия подвижной нагрузки с дефектами на проезжей части и несущих конструкциях [2–4].

Сталежелезобетонное пролетное строение в виде комбинированной системы, воспринимающей воздействие системы «автомобиль + пролетное строение» в режимах статического и динамического нагружения с учетом дефектов проезжей части, рассматривается в напряженно-деформированном состоянии, в рамках гармонических колебаний с учетом инерционности масс нагружения.

Условие, обеспечивающее эксплуатационную прочность мостового сооружения, имеет вид

$$\alpha(P_{\text{п}} + P_{\text{вр}})(1 + \mu_g) \leq m \cdot A \cdot R_n, \quad (1)$$

где α – коэффициент перехода от нагрузки к усилиям [5]; m – коэффициент условия работы; R_n – расчетное сопротивление стали; A – геометрическая характеристика сечения балки пролетного строения; $(1 + \mu_g)$ – динамический коэффициент; μ_g – динамическая добавка, характеризующая инерционность

масс системы; $P_{\text{п}}$ – постоянная нагрузка от веса балок пролетного строения; $P_{\text{вр}}$ – временная подвижная нагрузка.

В условиях воздействия полного спектра нагрузок на пролетные строения мостов связь между нагружающими усилиями и реальным сопротивлением (несущей способностью) пролетного строения моста в части динамического нагружения, характеризуемым коэффициентом $(1 + \mu_g)$, будет отличаться от значений, отраженных в нормативных источниках¹, и примет вид

$$(1 + \mu_g) = \frac{\frac{P_{\text{п}}}{g} A \cdot R_n}{\alpha(P_{\text{п}} + P_{\text{вр}})}, \quad (2)$$

где $g = 9,81 \text{ м/с}^2$.

$$\text{Отсюда} \quad \mu_g = \frac{\frac{P_{\text{п}}}{g} A \cdot R_n - \alpha(P_{\text{п}} + P_{\text{вр}})}{\alpha(P_{\text{п}} + P_{\text{вр}})}. \quad (3)$$

Основываясь на приоритетности решения уравнения (1) комбинированным методом, удастся вычислить предельные усилия и напряжения в стале-железобетонных мостовых балках от комбинированного нагружения постоянной и временной нагрузкой. Совместное нагружение несущих балок мостов постоянной и временной нагрузкой показывает в той или иной степени проявление эффекта физической приспособляемости, которая связана со свойствами материала несущих балок, испытывающих упругие и упругопластические деформации. В.В. Москвиным, Н.Л. Черновым, Л.П. Шелестенко [1, 6], использующих методику Блейха – Мелана, доказано, что в стадии упругого и упругопластического деформирования независимо от способа нагружения, при часто повторяющихся нагружениях, рост вертикальных перемещений f и деформаций ε отсутствует.

Представляя нагрузку системы «автомобиль + пролетное строение» динамической интенсивностью g_g , равномерно-распределенной по длине балки, определяем максимальный изгибающий момент и прогиб для сталежелезобетонного пролетного строения:

$$\left. \begin{aligned} M_{\text{max}} &= \frac{4 \cdot g_g}{\pi \cdot m} \sqrt{\frac{E_s \cdot I_{\text{стб}}}{m}} + M_{\text{пост}} \\ y_{\text{max}} &= \frac{4 \cdot g_g}{\pi \cdot m \cdot \bar{\omega}} + y_{\text{пост}} \end{aligned} \right\}, \quad (4)$$

где E_s – модуль упругости стали; $I_{\text{стб}}$ – момент инерции сталежелезобетонного сечения балки; $y_{\text{пост}}$ – прогиб от постоянной нагрузки; m – погонная масса системы; $\bar{\omega}$ – круговая (вынужденная) частота колебания балок.

¹ СП 35.13330.2011 Мосты и трубы. Актуализированная редакция СНиП 2.05.03–84*.

Выражения (4) возможны и адекватны в том случае, если действие динамической нагрузки системы g_g происходит в рамках приведения колеблющихся систем к одной степени свободы, а форма колебания совпадает со статической формой вертикальных перемещений от действия $g_{\text{пост}}$.

Таким образом, при совпадении формы колебания в виде синусоиды с параболой статического прогиба для разрезной балки пролетного строения справедлива зависимость [7]

$$M_{\text{max}} \cong \frac{2(P_{\text{п}} + P_{\text{вр}})L}{9\pi^2} \left(9 \sin \frac{\pi x}{L} - \sin \frac{3\pi x}{L} \right). \quad (5)$$

При максимальном изгибающем моменте (5) частота вынужденных колебаний $\bar{\omega}$ равна

$$\bar{\omega} = \sqrt{\frac{4g_g}{(y_{\text{max}} - y_{\text{пост}})\pi \cdot m}}. \quad (6)$$

При испытаниях автодорожного моста через р. Томь в г. Кемерово $\bar{\omega}$ составила 3,8–4,13 Гц соответственно, тогда как расчет по формуле (6) дает следующие значения: 4,2; 4,8 Гц соответственно. Таким образом, сравнение теоретических и экспериментальных значений $\bar{\omega}$ показало значительное влияние инерционной составляющей от постоянной нагрузки и статической схемы моста.

По результатам динамических испытаний моста через р. Искитимка в г. Кемерово $\bar{\omega}$ получено размером 8,1 Гц, тогда как на уровне $\bar{\omega} \approx 9,2$ –10,1 Гц зафиксировано биение (рис. 1).

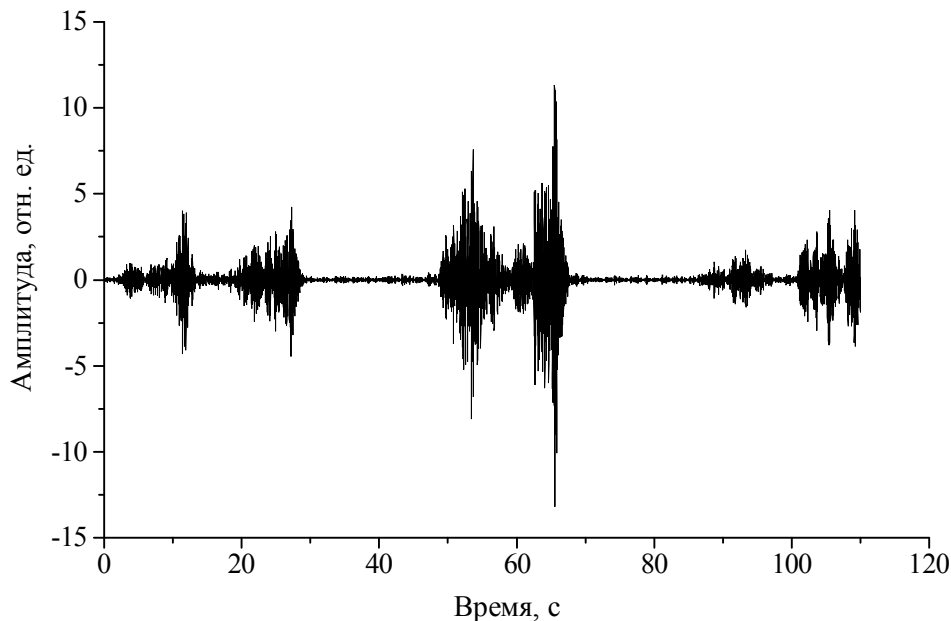


Рис. 1. Исходная виброграмма для спектральной обработки после фильтрации

Это означает, что в процессе динамического испытания фаза возмущающей силы от подвижной нагрузки совпала с фазой вынужденных колебаний системы. При этом параметр, отражающий биение $C_{\zeta} \rightarrow f(\nu)$, является функцией, характеризующей диссипацию колебательного процесса – ν .

Таким образом, биение отмечается в случае, если $\nu = \frac{\bar{\omega}}{\omega} < 1$, что подтверждено диаграммой Арганда и является следствием изменения фазы вынужденных колебаний по отношению к частоте возмущающей силы $P(t)$ от 0 до 90° [2].

При испытании сталежелезобетонного моста через р. Яю в с. Б. Дорохово экспериментальное значение $\bar{\omega}$, полученное в результате спектрального анализа, составило 3,654 Гц для тестовой нагрузки и 4,0 Гц для случайного потока автомобилей. Значение $\bar{\omega}$, полученное по формуле (6), составило 3,2; 4,8 Гц соответственно. На основании виброграммы, полученной в автоматическом режиме работы на вибродиагностическом комплексе «Диамос» (рис. 2), а также при анализе частот свободных и вынужденных колебаний пролетного строения моста от воздействия системы «автомобиль + пролетное строение» с учетом проявления дефектов проезжей части зафиксирована возможность резонансного состояния (рис. 3)

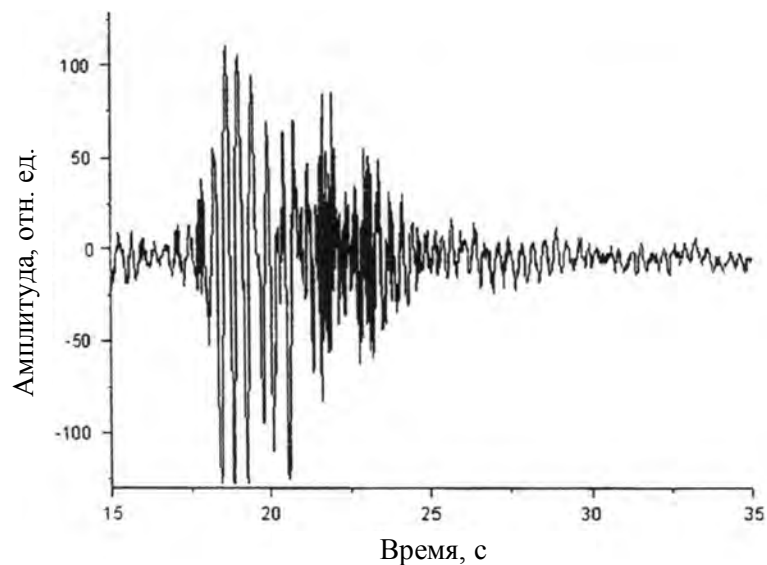


Рис. 2. Виброграмма, записанная во время испытания моста через р. Яю при проходе одного автомобиля

На рис. 3 представлена виброграмма, записанная во время динамических испытаний крайнего пролета длиной $L_p = 42,5$ м при движении двух автомобилей массой 21 т каждый со скоростью 40 км/ч. Временные сигналы с датчиков поступали в ЭВМ с частотой дискретизации $\omega_{\text{дискр}} = 100$ Гц. Общая длина временной записи составила 30 с.

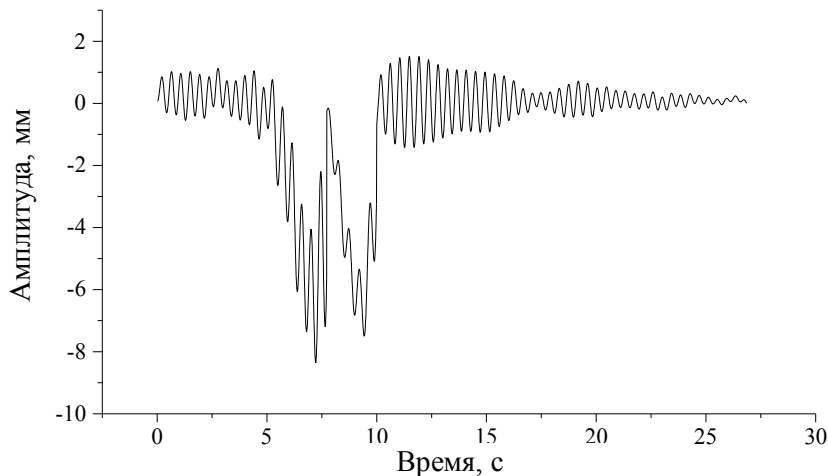


Рис. 3. Общий вид виброграммы после проезда двух автомобилей при испытании сталежелезобетонного моста через р. Яю

Анализ виброграммы установил следующие участки: выборка от 0 до 4 с – небольшие колебания на собственной частоте пролета, энергия колебаний передается от первого автомобиля, который движется по соседнему железобетонному пролету моста через проезжую часть; от 4 до 8 с – колебание конструкции под действием движущегося первого автомобиля по самому пролету; от 7 до 11 с – колебание конструкции от воздействия второго автомобиля, который одновременно движется по этому пролету на встречной полосе; от 8 до 24 с – колебание пролета на собственной частоте за счет постоянной передачи энергии от колебаний при движении первого автомобиля по соседним пролетам моста; от 24 до 27 с – затухающие собственные колебания мостовой конструкции.

Для дальнейшего спектрального анализа выполнено центрирование сигнала для устранения аппаратного тренда в области инфранизких частот и проведена цифровая фильтрация виброграммы с помощью режекторного фильтра. С помощью цифровой фильтрации выделена область спектра, где сосредоточены собственные и вынужденные частоты колебаний пролетного строения.

Спектральный анализ виброграммы (рис. 4) показал, что при прохождении автомобилей общий спектр частот сосредоточен в полосе от 1,9 до 2,8 Гц ($T = 0,357\text{--}0,526$ с) с максимальным пиком на частоте $\omega = 2,3$ Гц ($T = 0,435$ с).

Спектральный анализ отдельных участков временной реализации (выборки 4–8 и 7–11 с) во время движения автомобилей определил одинаковый характер вынужденных колебаний, которые имеют максимальное значение на частоте $\omega_b = 7$ Гц ($T_b = 0,143$ с). Анализ спектра частот собственных вертикальных колебаний моста (выборки 11–27 с) показал, что основное собственное колебание пролетных строений моста имеет частоту $\omega_c = 2,3$ Гц ($T_c = 0,435$ с). Таким образом, колебание моста осуществляется на собственной частоте независимо от расположения временной нагрузки. Возникающие вынужденные ча-

соты не влияют на колебательный процесс за счет незначительных амплитудных значений по отношению к амплитуде собственных колебаний.

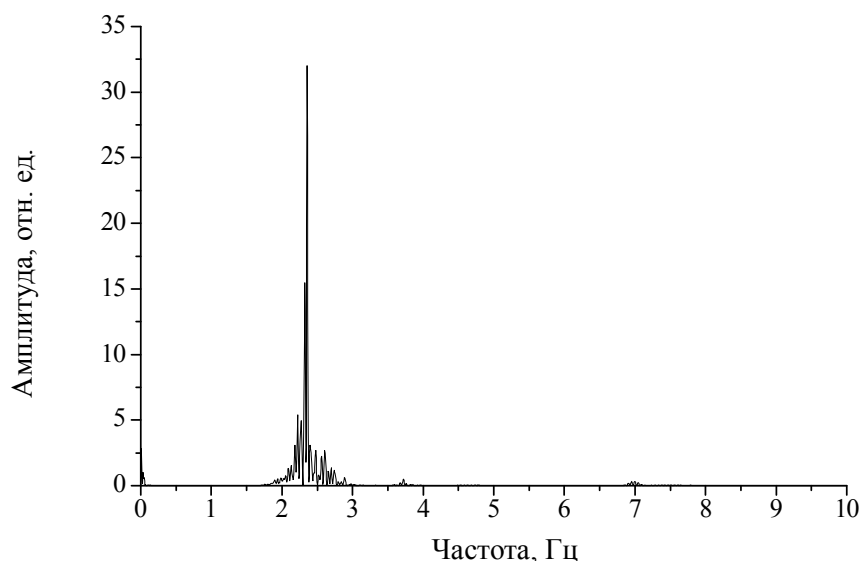


Рис. 4. Общий спектр частот всей реализации при испытании сталежелезобетонного моста через р. Яю

Прогиб пролетного строения от массы подвижной нагрузки представляет собой полусинусоидальное колебание на частоте 0,2 Гц при величине амплитуды $A_{\text{ст}}^{\text{экс}} = 8,2$ мм. Максимальное значение амплитуды собственных колебаний $A_{\text{ст}}^{\text{теор}} = 10$ мм.

На основании выполненных исследований установлено, что пролетное строение сталежелезобетонного моста через р. Яю обладает недостаточной жесткостью и имеет тенденцию к возбуждению колебаний при движении подвижной нагрузки по соседним пролетам. Частота собственных колебаний $\omega_c = 2,3$ Гц ($T_c = 0,435$ с) находится в опасном пределе $\omega_b = 1,4\text{--}3,3$ Гц ($T_b = 0,3\text{--}0,7$ с), данные о котором приведены в работе [2], где наиболее вероятны резонансные явления.

Из сопоставления экспериментальных динамических характеристик следует: в данном случае по частоте колебаний моста через р. Яю $\nu \geq 1$ фаза возмущающей силы и вынужденных колебаний отличается на 180° [1]. Подтверждением является практическое совпадение теоретических и экспериментальных значений амплитуды колебаний и статического прогиба, полученных в результате расчета и испытания²

² Мобильный автоматизированный комплекс вибродиагностики автодорожных мостов в условиях стационарного транспортного потока. Бочкарев Н.Н., Картопольцев А.В. [и др.]. Proceedings of the 12-th International FASE Symposium // Transport Noise and Vibration. St.-Petersburg, Russia. 1996. P. 201–203.

$$\left. \begin{aligned} A^{\text{теор}} &= \frac{y_{\text{ст}}}{(1-v^2)} \\ y_{\text{ст}}^{\text{теор}} &= \frac{P_n + P_{\text{вр}}}{E_s I_{\text{stb}}} \end{aligned} \right\}, \quad (7)$$

где $A^{\text{теор,эксп}}$ – теоретическое, экспериментальное значения амплитуды колебания; $y_{\text{ст}}^{\text{теор,эксп}}$ – теоретическое, экспериментальное значения прогиба.

В данном случае $A_{\text{с}}^{\text{теор}} = 9,8$ мм; $A_{\text{ст}}^{\text{теор}} = 10$ мм; $A_{\text{с}}^{\text{эксп}} = 10,4$ мм; $A_{\text{ст}}^{\text{эксп}} = 0,82$ мм; $A_{\text{в}}^{\text{теор}} = 10$ мм; $A_{\text{в}}^{\text{эксп}} = 10,4$ мм.

Таким образом, для статически определимых сталежелезобетонных балок автодорожных мостов изгибающий момент M_{max} и прогиб y_{max} от действия динамической нагрузки интенсивностью g следует оценивать следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} M_{\text{max}} &= M_n^g \cdot \mu_g + M_{\text{пост}} \\ y_{\text{max}} &= y_{\text{пост}}^g \cdot \mu_g + y_{\text{пост}} \end{aligned} \right\}, \quad (8)$$

где $M_n^g, y_{\text{пост}}^g$ – изгибающий момент и прогиб балки от действия системы интенсивностью g ; $M_{\text{пост}}, y_{\text{пост}}$ – изгибающий момент и прогиб балки от действия собственного веса балки – $g_{\text{пост}}$.

Представим выражение (8) в энергетической форме потенциальной энергии внутренних сил в виде

$$И_0 = \int_0^l \frac{M_{\text{п}}^2 + M_{\text{вр}}}{2E_s I_{\text{stb}}} dx + \int_0^l \frac{Q_{\text{п}}^2 + Q_{\text{вр}}}{2C \cdot \gamma \cdot A} dx. \quad (9)$$

Дополнительная энергия за счет проявления инерционности системы от динамического воздействия равна

$$\Delta И_g = \int_0^e \frac{\sigma_i^2}{2E_0} + \int_0^{\sigma_i} (\varepsilon_{\text{упр}} + \varepsilon_{\text{пл}}) d\sigma_i, \quad (10)$$

где E_0 – объемный модуль упругости.

При $И = И_0 + \Delta И_g$ справедливо выражение

$$M_n + M_{\text{вр}} + M_g = M_{\text{max}} = \frac{C \cdot \sigma_i \cdot I_{\text{stb}}}{h_{\text{min}}}, \quad (11)$$

где h_{min} – расстояние от нейтральной оси сталежелезобетонного сечения балки до фибры, где наступает предельная деформация [8]; $C \rightarrow f(\varepsilon_p)$; $\varepsilon_p = \varepsilon_y + \varepsilon_{\text{пл}}$, $\varepsilon_{\text{пл}}$ – пластическая составляющая полной деформации; I_{stb} –

момент инерции сталежелезобетонного сечения относительно собственной нейтральной оси; $C = 1,0$ – при $\varepsilon_p = \varepsilon_y$; $C = 1,5$ – при $\varepsilon_p = \varepsilon_{пл}$.

В соответствии с существующей литературой³ $\varepsilon_y = 0,0016$ – упругие деформации; при $\varepsilon_p = 0,0025$ – упругопластическое деформирование.

Согласно результатам исследований, отраженных в работах [6, 8], при $\varepsilon_i = 0,0016$ жесткость балки принимается равной $E_s \cdot I_{stb}^{уп}$; при $\varepsilon_i = 0,0025$ – $E_s \cdot I_{stb}^{уп.пл}$. Для расчетов в упругопластической стадии

$$E_s \cdot I_{stb}^{уп.пл} = E_s \cdot I_{stb}^{уп} \cdot C \sqrt{3 - 2C},$$

где $C = \frac{3 - k^2}{2}$; $k = \frac{1}{1 + \frac{E_s \cdot \varepsilon_{пл}}{R_n}}$; R_n – расчетное сопротивление стали.

Таким образом, в случае одновременного воздействия постоянной нагрузки с учетом инерционности и динамического нагружения определяющим напряжением будет являться σ_i . Используя аппроксимацию зависимости « $\sigma - \varepsilon$ » из работы [8], значения σ_i будем определять выражением

$$\sigma_i = a \cdot \varepsilon_p^m, \quad (12)$$

где

$m = 0,25 - 0,3$ – для углеродистых сталей;

$m = 0,03 - 0,05$ – для неуглеродистых сталей повышенной и высокой прочности;

$a = 0,075 - 0,09$ – для стали М16С, 15ХСНД;

$a = 0,053 - 0,07$ – для стали 10ХСНД.

Максимальному изгибающему моменту в формуле (4) $M_{\max}$ соответствует $\sigma_{\max}$, равное

$$\sigma_{\max} = \sigma_{ст} \cdot \mu_g + \sigma_g, \quad (13)$$

где $\sigma_{ст}$ – напряжение от статического действия системы; σ_g – динамическое напряжение от подвижной нагрузки.

Подставляя полученное значение σ_i из формулы (12) в формулу (13), получим выражения для $M_{\max}$ и $\sigma_{\max}$ в виде

$$\left. \begin{aligned} M_{\max} &= \frac{C \cdot a \cdot \varepsilon_p^m \cdot I_{stb}}{h_{\min}} \\ \sigma_{\max} &= \sigma_{ст} \cdot \mu_g + \sigma_g \end{aligned} \right\}. \quad (14)$$

³ Николаев Г.А., Куркин С.А., Винокуров В.А. Расчет, проектирование и изготовление сварных конструкций. М.: Высшая школа, 1971. 760 с.

В формулах (14) напряжения от статического действия системы соответствует прогибу $y_{ст}$, равному

$$y_{ст} = \frac{\sum PL^3}{48E_s \cdot h^3} \frac{(1 + (2 + \mu)^2)}{\ell^2}, \quad (15)$$

где $\mu = 0,47$ – в упругопластической стадии; $\mu = 0,35$ – в упругой стадии; h – высота стальной части сталежелезобетонной балки.

В случае суммарного статического воздействия нагрузки формула (15) принимает вид

$$y_{ст} = \frac{(P_n^{I+II} + P_{вр})L^3}{48E_s I_{stb}} \left[\frac{1 + 2,85h^2}{L^2} \right], \quad (16)$$

где P_n^{I+II} – постоянная нагрузка I и II стадии.

В работе на основе зависимостей, оценивающих несущую способность мостовых конструкций, получены математические соотношения, оценивающие как статическое, так и динамическое напряженное состояние конструкции. Таким образом, в процессе расчета мостовых сталежелезобетонных конструкций параметром, определяющим динамическое воздействие подвижной нагрузки, является динамическая добавка μ_g в динамическом коэффициенте $(1 + \mu_g)$, а также динамическое напряжение σ_g .

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Картопольцев, В.М. Влияние дефектов проезжей части на изменение динамических характеристик пролетных строений мостов / В.М. Картопольцев, А.В. Картопольцев, Б.Д. Колмаков // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. – 2015. – № 6. – С. 156–164.
2. Клаф, Р. Динамика сооружений / Р. Клаф, Дж. Пензиен. – М. : Стройиздат, 1979. – С. 320.
3. Картопольцев, В.М. Evaluation of dynamic characteristics of a bridge span highway bridges in terms of exposure random traffic flow / В.М. Картопольцев, Н.Н. Бочкарев, А.В. Картопольцев // Cambridge Journal of Education and Science. – 2015. – № 2. – С. 521–533.
4. Будковой, А.Н. Нестационарные колебания балочных систем при переходных режимах воздействия подвижной нагрузки : дис. ... канд. техн. наук. – Воронеж, 2014. – 189 с.
5. Балдин, В.А. Расчет стальных конструкций в строительстве : сб. статей / В.А. Балдин ; под ред. Н.С. Стрелецкого. – М. : Гос. изд-во литературы по строительству и архитектуре, 1953. – С. 164–172.
6. Потапкин, А.А. Проектирование стальных мостов с учетом пластических деформаций / А.А. Потапкин. – М. : Транспорт, 1984. – С. 200.
7. Тимошенко, С.П. Механика материалов : пер. с англ. / С.П. Тимошенко, Д.Ж. Гере. – М. : Мир, 1976. – С. 656.
8. Картопольцев, В.М. Аппроксимация экспериментальных диаграмм «напряжение – деформация» для различных сталей и сплавов за пределом упругости (применительно к бистальным балкам) / В.М. Картопольцев // Вопросы механики и прикладной математики. – Томск : Изд-во ТГУ, 1985. – С. 58–66.

REFERENCES

1. *Kartopoltsev V.M., Kartopoltsev A.V., Kolmakov B.D.* Vliyanie defektov proezzhei chasti na izmenenie dinamicheskikh kharakteristik proletnykh stroenii mostov [Effect of trafficway defects on dynamic properties of bridge spans]. *Vestnik TSUAB*. 2015. No. 6. Pp. 156–164. (rus)
2. *Clough R.W., Penzien J.* Dinamika sooruzhenii [Dynamics of structures.] Stroyizdat Publ., 1979. 320 p. (transl. from Engl).
3. *Kartopoltsev V.M., Bochkarev N.N., Kartopoltsev A.V.* Evaluation of dynamic characteristics of a bridge span highway bridges in terms of exposure to random traffic flow. *Cambridge Journal of Education and Science*. 2015. No. 2. Pp. 521–533.
4. *Budkovoï A.N.* Nestatsionarnye kolebaniya balochnykh sistem pri perekhodnykh rezhimakh vozdetsviya podvizhnoi nagruzki : dis. ... kand. tekhn. nauk [Non-stationary oscillations of beam systems at transient modes of moving load. PhD Thesis]. Voronezh. 2014. P. 189. (rus)
5. *Baldin V.A.* Raschet stal'nykh konstruktsei v stroitel'stve [Steel structure analysis]. Moscow. 1953. Pp. 164–172. (rus)
6. *Potapkin A.A.* Proektirovanie stal'nykh mostov s uchetom plasticheskikh deformatsii [Steel bridge design with plastic deformations]. Moscow : Transport Publ., 1984. P. 200. (rus)
7. *Timoshenko S.P., Gere D.Zh.* Mekhanika materialov [Mechanics of materials]. Moscow : Mir Publ., 1976. P. 656. (rus)
8. *Kartopoltsev V.M.* Approksimatsiya eksperimental'nykh diagramm napryazhenie – deformatsiya dlya razlichnykh stalei i splavov za predelom uprugosti (primenitel'no k bistal'nym balkam) [Approximation of experimental stress-strain diagrams for steel and alloys analysis]. Voprosy mekhaniki i prikladnoi matematiki. Tomsk : TSU Publ., 1985. Pp. 58–66. (rus)