

Вестник Томского государственного
архитектурно-строительного университета.
2024. Т. 26. № 3. С. 242–252.

ISSN 1607-1859 (для печатной версии)
ISSN 2310-0044 (для электронной версии)

Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo
arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta –
Journal of Construction and Architecture.
2024; 26 (3): 242–252.
Print ISSN 1607-1859
Online ISSN 2310-0044

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

УДК 624.21.095:624.072.2

DOI: 10.31675/1607-1859-2024-26-3-242-252

EDN: FMLWKV

К ВОПРОСУ ВИБРОДИАГНОСТИКИ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ БАЛОК МЕТОДОМ ГЕРЦА

Владимир Михайлович Картопольцев

ООО «ДИАМОС», г. Томск, Россия

Аннотация. *Актуальность.* Рассмотрены вопросы вибродиагностики свободных колебаний балок пролетных строений металлических мостов на основе общей теории соударения тел по методу Герца. Динамическое взаимодействие груза и балки при ударе учитывает инерционность и ускорение в процессе колебания тел и представляет актуальную контактную теорию упругости и упругопластического деформирования.

Цель работы. На основе численного решения контактной задачи способом Л.И. Маламента и общей теории малых упругопластических деформаций определить зависимость ударного воздействия груза о балку и характеристики контактного процесса соударения тел, их инерционность и ускорение во времени.

Результаты. Совершенствуется механизм вычисления свободных колебаний балок пролетных строений мостов в условиях практической вибродиагностики, отвечающей современным требованиям теории колебания при динамическом воздействии нагрузки.

Ключевые слова: балка, удар, деформация, соударение, инерционность, ускорение, скорость

Для цитирования: Картопольцев В.М. К вопросу вибродиагностики свободных колебаний балок методом Герца // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. 2024. Т. 26. № 3. С. 242–252. DOI: 10.31675/1607-1859-2024-26-3-242-252. EDN: FMLWKV

ORIGINAL ARTICLE

FREE VIBRATION MEASUREMENT OF BEAMS USING HERTZ'S METHOD

Vladimir M. Kartopoltsev

ООО "DIAMOS", Tomsk, Russia

Abstract. The paper deals with the problem of measuring free vibrations of metal bridge beams using the general theory of the body collision by Hertz's method. The load-beam dynamic interaction considers inertia and acceleration in the oscillation process of bodies and presents an up-to-date contact theory of elasticity and elastoplastic deformation.

Purpose: The aim of this work the numerical solution of the contact problem suggested by L.I. Malament and the general theory of small elastoplastic deformation, load/impact dependences of the beam, collision of bodies and their inertia and acceleration in time.

Research findings: The measurement of free vibrations of bridge span beams is improved in practical conditions, which meet the modern requirements of the theory of vibrations under the dynamic load.

Keywords: beam, impact, deformation, collision, inertia, acceleration, velocity

For citation: Kartopol'tsev V.M. Free vibration measurement of beams using Hertz's method. Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta – Journal of Construction and Architecture. 2024; 26 (3): 242–252. DOI: 10.31675/1607-1859-2024-26-3-242-252. EDN: FMLWKV

Недостаток механизма вычисления свободных колебаний балок пролетных строений мостов отражен в технических условиях и специальных литературных источниках [1, 2]. Вибродиагностика свободных колебаний балок пролетных строений по методу Герца основана на соударении свободных тел и соблюдении условий: выполняется гипотеза плоских сечений Бернулли; используется теория изгибающего удара Сен-Венана и учитываются только местные деформации.

Процесс соударения зависит от соотношения веса сбрасываемого груза $Q_{гр}$ к весу балки пролетного строения и выражается отношением $\frac{m_{гр}}{m_б}$, рав-

ным: при легком грузе $\frac{m_{гр}}{m_б} \ll 0,5$ – однократное соударение; при тяжелом

грузе $\frac{m_{гр}}{m_б} \leq 0,5$ – соударение с «подскоком»; при очень тяжелом грузе

$\frac{m_{гр}}{m_б} = 0,2$ происходит движение балки и груза в период времени $10^{-4} - 10^{-2}$ с

с незначительным отрывом груза от балки.

Этапы удара и рассматриваемые гипотезы определяют вид удара – упругий или неупругий. Таким образом, свободные колебания балки в процессе ударного воздействия груза по методу Герца соответствуют равенствам:

– упругая стадия

$$\sigma_q \leq \sigma_{пу}; \quad (1)$$

– упругопластическая стадия

$$\sigma_q > \sigma_{пу}. \quad (2)$$

Скорость удара, при которой $\sigma_q \leq \sigma_{пу}$, – в балке отсутствует возможность появления пластических деформаций.

При $\sigma_q > \sigma_{пу}$ решения Буссинеску для упругого случая при ударе по методу Герца переходят в разряд упругопластических контактных задач Буссинеску – Боненблюста [3]. При вибродиагностике свободных колебаний по методу Герца с деформациями за пределом упругости основными будут являться параметры скорости удара и их изменения по мере изменения нагрузки удара и физического состояния (проявление инерционных импульсов и уско-

рения), а также напряженно-деформированного состояния, характеризуемого кривизной (κ), напряжениями текучести σ_T и $\varepsilon_{пл}$ [4, 5].

Обобщенное выражение для скорости удара $V_{пл}$, при котором возникает упругопластическое состояние балки, будет иметь вид

$$V_{пл} = \kappa_{пл} \sqrt{\frac{EI}{A}}, \quad (3)$$

где $\kappa_{пл}$ – предельная упругопластическая кривизна балки:

$$\kappa_{пл} = \frac{1}{2a^2} [y^I + 2\eta \cdot y^{II}]; \quad (4)$$

$$\eta = \frac{1}{4a^2} \frac{x^2}{t^y}; \quad a^2 = \sqrt{\frac{EI}{\rho \cdot A}}; \quad y^I = y_0 + y_I + y_{II} + y_{III}; \quad y_0 = y_0^I + \Delta y_0.$$

Кривизна исходного состояния балки y_0 включает прогиб от собственного веса $y_0^I = \frac{5}{384} \frac{gl^4}{EI}$ и дополнительный прогиб Δy_0 за счет действия ускорения от свободного падения от веса балки, равного $y_0^I = 0,027 y_0$; y_I – прогиб балки от веса $Q_{гр}$ в статической форме приложения, при соударении равен $\frac{Q_{гр} \cdot l^3}{48EI}$; y_{II} – прогиб балки за счет силы инерции падения груза $Q_{гр}$, равен $y_{ст} + V_I \cdot t^y$ или

$$y_{II} = V_I \sqrt{\frac{m_{гр}^I \cdot l^3}{48EI} \frac{1}{\left(1 + 0,5 \frac{m_6}{m_{гр}}\right)^2}},$$

где $m_{гр}^I = 0,5 \frac{Q_{гр}}{g}$ – приведенная масса груза; $m_{гр}$, m_6 – масса соответственно груза и балки; $m_{гр} = \frac{Q_{гр}}{g}$; $m_6 = \frac{P_6}{g}$; $g = 9,81$ м/с²; t^y – продолжительность соударения, определяется в зависимости от вида удара [6, 7]; V_I – скорость соударения тел в течение времени t^y ; y_{III} – прогиб от воздействия инерционного импульса (S) и ускорения a_y , определяется как $y_{III} = y_S^{III} + y^{III} a_y$; y_S^{III} – прогиб от инерционного импульса S [8]:

$$y_S^{III} = \frac{S}{n_y} \sqrt{\frac{g \cdot n_i}{C_x \cdot P_6}}; \quad n_1 = 0,5; \quad n_2 = \frac{5}{8};$$

$$S = \frac{2a^2}{EI} \sqrt{P_{уд} \cdot t^y}; \quad P_{уд} = 2Q_{гр};$$

$C_x = \frac{l}{3} - \frac{l}{2}$ – абсцисса ординаты приложения нагрузки $Q_{гр}$; y_{ay}^{III} – прогиб от ускорения a_y в балке, равен:

$$y_{ay}^{III} = \frac{g^2 \cdot 2h}{a_y^2}; \quad a_y = g \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2hEA}{l \cdot Q_{гр}}} \right).$$

Приняв скорость деформации балки при ударном динамическом нагружении $V_{\epsilon_{пл}}$ и упругопластическую кривизну $\varkappa_{пл}$ зависимостью (3), которая соответствует обобщенной силе удара P_{max} , вызванной не только упругим, но и пластическим деформированием, в соответствии с источниками [8, 9] P_{max} будет равно:

$$P_{max} = \frac{17}{35} m_6^{пр} \cdot \bar{\eta} + \frac{48EI}{l^3} \bar{\eta}, \quad (5)$$

где $m_6^{пр} = \frac{17}{35} m_1$; $m_1 = \frac{P_6}{g}$; $P_6 = A \cdot \rho \cdot l$ – вес балки; $\bar{\eta}$ – изгибной параметр, равен $\frac{1}{4a^2} \frac{x^2}{t^y}$; EI – жесткость балки при изгибе.

Максимальный упругопластический прогиб балки будет равен:

$$y_{дин}^{max} = y_{ст} + V_{\epsilon_{пл}} \cdot t^y, \quad (6)$$

где $y_{ст} = \frac{P_{max} \cdot l^3}{48EI}$; l – длина пролета балки.

Равенство для динамического изгибающего момента, соответствующего $\varkappa_{пл}$ и $y_{дин}^{max}$, имеет вид

$$M_{дин} = EI \cdot \varkappa_{пл}. \quad (7)$$

Опираясь на исследования ряда авторов [10, 11, 12], выражение (4) приводим к виду $\varkappa_{пл} = \frac{8y_{ст} \left(\frac{l}{2} \right)}{l^2}$ в стадии упругопластического деформирования. Зависимость кривизны балки ($\varkappa$), местного смятия в месте соударения, характеризующаяся коэффициентом α и контактной силой удара $P_{уд}$, определяется из равенства для P_{max} [13, 14]:

$$\alpha = \varkappa \cdot P_{уд}^{\frac{2}{3}} + \varkappa \cdot P_{max}, \quad (8)$$

где $P_{уд} = 2Q_{гр}$; $P_{max} = \sqrt{\frac{m \cdot V_1^2}{\varkappa}}$ при $V_1 = V_{\epsilon_{пл}}$; $m = \frac{m_{гр}^{пр} \cdot m_6^{пр}}{m_{гр}^{пр} + m_6^{пр}}$; $\varkappa$ – коэффициент

восстановления, является энергетической характеристикой удара и зависит от геометрии ударяемых поверхностей в зоне контакта, веса, скорости и материалов соударяемых тел. Для упругих тел $\varkappa = 1,0$; для упругопластических $\varkappa = 0,7$.

На промежутке соударения t^y контактная сила удара будет P , $P = P_{\max} \cos \frac{t^y}{\sqrt{m \cdot \alpha}}$; $t^y = 3 \cdot 10^{-4} - 4,5 \cdot 10^{-4}$ с – рекомендует С.П. Тимошенко; $t^y = 5 \cdot 10^{-4}$ с – по опытам Масоне – Рогестера; t^y – эксперименты автора [6].

В формуле (8) выражение $\kappa \cdot P^{\frac{2}{3}}$ отвечает стадии упругого деформирования, а $\kappa \cdot P_{\max}$ – соответственно упругопластического. Исследования Н.Н. Давиденкова, а также вибродиагностика мостов балочной системы показали, что при плотном соударении справедлива зависимость при экспресс-расчетах кривизны балки по формулам [15, 16]. Изменения кривизны балки за пределом упругости от проявления инерционного импульса (S) рассмотрены в работах [8, 16].

Зависимость между величиной инерционного импульса (S) и кривизной (κ) за пределом упругости получена в виде

$$\kappa = \frac{S}{1,3m_{\text{гр}}} a^2, \quad (9)$$

где $m_{\text{гр}}$ – масса груза при ударном воздействии.

Известно, что во время соударения груза с балкой груз как бы останавливается, но в этот короткий t^y мс период времени соударения груз передает балке определенный инерционный импульс (S) и ускорение (a_y):

$$a_y = \frac{P}{m} \text{ см/с}^2, \quad (10)$$

где P – значение контактной силы в процессе удара в течение времени t^y [17, 18].

На исходе продолжительности времени соударения и начала процесса ускорения движения балки значение силы P численно равно кинетической энергии удара, равной $P_{\max}$:

$$P_{\max} = P \left(1 - \frac{\eta^2}{4} \right), \quad (11)$$

$$P = \frac{Q_{\text{гр}} \cdot V_I^2}{2g} \frac{1 + \frac{5}{8} \frac{A \cdot l \cdot \rho}{Q_{\text{гр}}}}{\left(1 + \frac{5}{8} \frac{A \cdot l \cdot \rho}{Q_{\text{гр}}} \right)^2};$$

V_I – скорость соударения на протяжении времени t^y в зависимости от вида удара; $\frac{5}{8} A \cdot l \cdot \rho \approx 0,635 A \cdot l \cdot \rho$ – в момент, когда упругопластический изгиб балки по параболе совпадает с главной гармоникой синусоиды.

Вычисляем максимальное ускорение ($a_y^{\max}$) от $P_{\max}$ по формуле

$$a_y^{\max} = \frac{1}{m} \left[P_{\max} \frac{1+n}{\theta \cdot n} \right]^{\frac{1}{1+n}}, \quad (12)$$

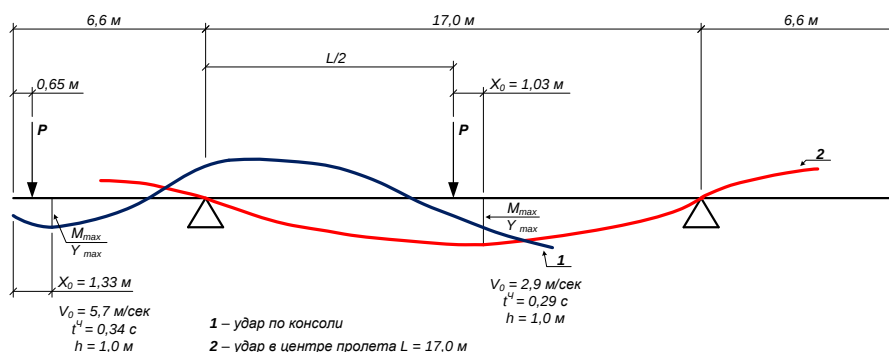
где θ – угол наклона груза к балке при соударении. При плоском соударении θ равен 1; n зависит от конфигурации сжимаемых тел, принимается равным 1.

Рассматривая ускорение (a_y) функцией времени t^y , формулу (12) запишем в следующем виде:

$$a_y^{t^y} = a_y^{\max} (\sin \rho \cdot t^y), \quad (13)$$

где $\rho = \frac{\pi}{2t^y}$; $t^y = \frac{\pi}{2} \sqrt{ma_y^{\max}}$.

При сосредоточенном ударе грузом по балке деформация ее по длине принимает вид волнистой кривой, распространяясь от точки удара влево и вправо, а не от точки начала координат балки (рисунок).



Экспериментальные формы свободных колебаний балки:

1 – удар по консоли; 2 – удар в середине пролета $l_p = 17,0$ м

Experimental modes of free vibrations:

1 – impact on the console; 2 – impact in the middle of the span $l_p = 17.0$ m

Первое значение χ_0 в зависимости от S при скорости удара в пределах 3,34 мс до 1 с приблизительно равно:

$$\chi_0 = 2,134 \sqrt{\frac{EI}{A \cdot \rho}} \sqrt{t^y}, \quad (14)$$

где χ_0 – абсцисса ординаты сечения, где появляются максимальные значения изгибающего момента, напряжений и деформаций. Исследования на мостах балочной и балочно-консольной системы показали, что в большинстве случаев при $P_{\max} \approx 2Q_{гр}$ возникают пластические деформации в растянутых крайних фибрах ограниченной величины $\varepsilon_{пл} \approx 0,0001$ и выполняется условие (3) в виде

$$V_{\varepsilon_{\text{пл}}} = \varkappa_{\text{пл}} \sqrt{\frac{EI}{A}} \cong 2,087 V_1. \quad (15)$$

Из условия известной функциональной зависимости $V_{\varepsilon_{\text{пл}}} = f(S, \chi_0)$ запишем равенство вида

$$V_{\varepsilon_{\text{пл}}} = 2,134 \sqrt{\frac{EI}{A}} \sqrt{t^y}.$$

Значения изгибающего момента $M(\chi_0)$ и поперечной силы $Q^{\text{пл}}$ определяются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} M(\chi_0) &= -4a^2 \frac{(t^y)^{3/2}}{l} \frac{EI}{\rho A}; \\ Q^{\text{пл}} &= \frac{1}{a\sqrt{t^y}} \sqrt{\eta} \frac{dM(\chi_0)}{d\eta}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

При $V_{\varepsilon_{\text{пл}}} = 5,0$ м/с $\chi_0 = 45$ см;

$V_{\varepsilon_{\text{пл}}} = 7,6$ м/с $\chi_0 = 47,0$ см;

$V_{\varepsilon_{\text{пл}}} = 10,0$ м/с $\chi_0 = 48,3$ см;

$V_{\varepsilon_{\text{пл}}} = 15$ м/с $\chi_0 = 50,0$ см.

Максимальное динамическое напряжение в балке в сечении χ_0 из условия равенства $M(\chi_0) = \frac{Sl}{4}$ равно:

$$\sigma_{\text{дин}} = \frac{Z_{\text{max}}}{l} \sqrt{\frac{12EQ}{Al}}, \quad (17)$$

где Z_{max} – расстояние от нейтральной оси сечения балки до крайней растянутой фибры; S – инерционный импульс, при котором $M(\chi_0) = M_{\text{max}}$, $S = \frac{4\sigma_{\text{дин}}W}{l}$ [19].

Значения частоты и периода собственных колебаний в стадии проявления S и a_y определены на основании условия

$$P_0^{S, a_y} = 2,2 \sqrt{\frac{EI}{m_1 l^3}} \text{ или } 0,15 \text{ 1/с; } T_0^{S, a_y} = \frac{2\pi}{P_p},$$

где P_p – коэффициент частоты собственных колебаний.

Общий вид выражения для определения P_p будет

$$P_p^i = i^2 \pi^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho \cdot l^4}}. \quad (18)$$

При ударе сосредоточенным грузом о балку формула (18) трансформируется в выражение для различных схем балок [20]:

$$P_p^i = \sqrt{\frac{1}{\delta_{II} \cdot m_{тр}}}, \quad (19)$$

где $\delta_{II} = \frac{l^3}{192EI}$ – для балок, свободно опертых на опорах; $\delta_{II} = \frac{l^3}{3EI}$ – для консольных балок.

Для балок с защемленными консолями и комбинированных систем при $i = 1, 2, 3$ формула для P_p^i имеет вид

$$P_p^1 = 3,92 \sqrt{\frac{EI}{m_1 \cdot l^3}} \quad i = 1; \quad P_p^2 = 19,6 \sqrt{\frac{EI}{m_1 \cdot l^3}} \quad i = 2; \quad P_p^3 = 41,6 \sqrt{\frac{EI}{m_1 \cdot l^3}} \quad i = 3.$$

Изменение кривизны балки от удара в стадии инерционного импульса и ускорения за счет дополнительного влияния сдвиговых деформаций от поперечной силы имеет практическое доказательство в исследованиях ряда авторов [21].

Представляя сдвиг при динамическом упругопластическом деформировании функцией T_Q , запишем равенство

$$T_Q = \frac{2a^2}{EI} \sqrt{t^y \cdot Q^{пл}}, \quad (20)$$

где $Q^{пл}$ – поперечная сила упругопластического состояния балки, определя-

ется из выражения $Q^{пл} = \eta^1 \cdot A \cdot G \cdot \Theta$, $G = \frac{E}{3}$ – модуль сдвига, η^1 – параметр

обновления распределения касательных напряжений в сечении балки, принимается в зависимости от формы поперечного сечения: прямоугольной – 0,667–0,75, двутавровой – 0,72–0,84; Θ – угол поворота нейтральной оси сечения балки при сдвиге, является параметром деформации сдвига на нейтральной оси от поперечной силы $Q^{пл}$ и соответствует решению Ренкина – Грасхофа, равен:

$$\Theta = \gamma_{сдв} = \frac{3}{2} \frac{Q^{пл}}{2A \cdot G}, \quad (21)$$

где A – площадь поперечного сечения балки.

Дополнительный прогиб (Δy^Q) за счет сдвига и действия поперечной силы $Q^{пл}$ будет определяться в соответствии с изменением кривизны балки из формулы

$$\Delta y^Q = \frac{M(x_0)}{A \cdot G \cdot \Theta}, \quad (22)$$

где $M(x_0) = -\frac{EI}{2a^2} \frac{S}{\sqrt{\eta^1}}; \quad \eta^1 = \frac{(\chi_0)^2}{4a^2 t^y}.$

Тогда полный прогиб равен:

$$y_{\text{дин}} = y_{\text{дин}}^{\text{max}} + \Delta y^Q. \quad (23)$$

При вибродиагностике мостов балочно-консольных систем получены следующие результаты: при $\varepsilon_x = 0,08$; $\varepsilon_y = 0,07$; $\varepsilon_{\text{хпл}} = \ln(1 + \varepsilon_x) \cong 0,001$ величина $\Delta y^Q \cong 0,03\text{--}0,05$ % от $y_{\text{дин}}^{\text{max}}$.

Таким образом, пренебрегая колебаниями, вызванными центральным ударом вдоль линии, соединяющей центры масс груза и балки, целесообразно рассматривать свободные колебания с учетом поправок на давление от сдвига в отсутствии понижения динамического предела текучести (σ_T) на протяжении времени соударения t^y . Появление местных пластических деформаций в месте контакта соударения груза о железобетонную или асфальтобетонную поверхность проезжей части моста или покрытия носит точечный характер, и они не могут быть распространены на деформации всей поверхности или сечения. Сила контактного удара будет зависеть от формы соприкосновения груза с балкой, времени соударения и коэффициента восстановления.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Кириллов В.С. Эксплуатация и реконструкция мостов и труб на автомобильных дорогах. Москва : Транспорт, 1971. 196 с.
2. Картопольцев В.М., Картопольцев А.В., Черепанов Д.Н. Совершенствование учебных программ углубленной подготовки специалистов транспортного строительства расширением уровней компетенций // Природные интеллектуальные ресурсы Сибири. (СИБРЕСУРС (29-2023) : доклады 29-й Международной научно-практической конференции. Томск : Изд-во ТУСУР, 2023. С. 34–73.
3. Дюве П., Кларк, Боненблюст К. Поведение длинных балок при ударной нагрузке. Механика. Москва : Изд-во иностранной литературы, 1950. С. 53–63.
4. Рахматулин Х.А., Демьянов Ю.А. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. Москва : Гос. изд-во физико-математической литературы, 1961. 399 с.
5. Койтер В.Т. Общие теоремы теории упругопластических сред. Москва : Изд-во иностранной литературы, 1968. 78 с.
6. Гольдсмит Вернер. Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел. Москва : Изд-во литературы по строительству, 1965. 430 с.
7. Рахматулин Х.А., Каримбаев Т.Дж., Байтелиев Т. Применение метода пространственных характеристик к решению задач по распространению упругопластических волн // Известия Академии наук Казахской ССР. Серия физико-математическая. 1973. № 1. С. 59–66.
8. Gillis P.P., Kolly M. On the Determination of stress Strain. Strain-Rate Relations From Dynamic // Btam Tests ASME, 1969. P. 266–268.
9. Aspden R.J., Camble J.D. Proceedings Royal Society. London, Serions A, 1966. V. 278. 266 p.
10. Галин А.П. Поперечные колебания балок и плит за пределом упругости под действием взрывных и ударных нагрузок // ПММ. 1953. Т. XVII. № 4. С. 84–96.
11. Сэндерс Е.Л. Соотношение между напряжениями и деформациями в пластической области, основанной на линейных функциях напряжения // Механика. 1956. № 3 (37). С. 99–109.
12. Фрейденталь А., Гейрингер Х. Математические теории неупругой сплошной среды : пер. с англ. Москва : Гос. изд-во физико-математической литературы, 1962. 432 с.
13. Кильчевский Н.А. Теория соударения твердых тел. Киев : Наукова Думка, 1969. 246 с.
14. Model R. Kombinationstrelo nanlines Stonnastisch Errington Schwingngngs – Sustems // ZAMM. 1978. № 58. 377 p.

15. Бойко В.И. О соударении упругопластических тел // Украинский математический журнал. 1961. № 3. С. 16–20.
16. Батуев Г.С., Федосов А.А., Ефремов А.К. Соударение массивных тел при упругопластических деформациях в зоне контакта // Расчеты на прочность : сб. статей. Вып. 10. Москва : Машиностроение, 1964. С. 363–381.
17. Беляев Н.М. Сопротивление материалов. Москва ; Ленинград : Гостехиздат, 1945. 751 с.
18. Бидерман В.Л. Теория удара. Москва : Машигиз, 1952. 73 с.
19. Рахматулин Х.А. О распространении упругопластических волн при сложном нагружении // Прикладная математика и механика. Том XXII. Москва : Академия наук СССР, 1958. Вып. 6. С. 759–771.
20. Булгаков Б.В. Колебания. Москва : Гостехиздат, 1954. 891 с.
21. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. Москва : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1975. 575 с.

REFERENCES

1. Kirillov V.S. Operation and reconstruction of bridges and pipes on highways. Moscow: Transport, 1971. 196 p. (In Russian)
2. Kartopoltsev V.M., Kartopoltsev A.V., Cherepanov D.N. Improvement of curricula for in-depth training of transport construction specialists by expanding the levels of competence. In: *Proc. 29th Int. Sci. Conf. "Natural Intellectual Resources of Siberia"*. Tomsk, 2023. Pp. 34–73. (In Russian)
3. Duvet P. Clark, Bonenblust K. Behavior of long beams under shock load. Mechanics. Moscow, 1950. Pp. 53–63. (Russian translation)
4. Rakhmatulin H.A., Demyanov Yu.A. Strength under intense short-term loads. Moscow, 1961. 399 p. (In Russian)
5. Koiter V.T. General theorems of the theory of elastoplastic media. Moscow, 1968. 78 p. (Russian translation)
6. Goldsmith Werner. Impact. Theory and physical properties of colliding bodies. Moscow, 1965. 430 p. (Russian translation)
7. Rakhmatulin H.A., Karimbaev T.J., Baiteliev T. Spatial characteristics method in solving problems of elastoplastic wave propagation. *Izvestiya Akademii nauk Kazakhskoi SSR. Ser. fiziko-matematicheskaya*. 1973; (1): 59–66. (In Russian)
8. Gillis P.P., Kolly M. On the determination of stress strain. Strain-rate relations from dynamic. Btam Tests ASME, 1969. Pp. 266–268.
9. Aspden R.J., Camble J.D. *Proceedings Royal Society. London, Ser. A*, 1966; 278: 266.
10. Galin A.P. Transverse vibrations of beams and plates beyond elastic limit under explosive and shock loads. *Prikladnaya matematika i mekhanika*. 1953; 17 (4): 84–96. (In Russian)
11. Sanders E.L. The relationship between stresses and deformations in the plastic region based on linear stress functions. *Mechanics*. 1956; 3 (37): 99–109.
12. Freudenthal A., Geiringer H. Mathematical theory of an inelastic continuous medium. Translated from English. Moscow, 1962. 432 p. (In Russian)
13. Kilchevsky N.A. Theory of collision of solids. Kiev: Naukova Dumka, 1969. 240 p. (In Russian)
14. Model R. Kombinationstrelo nanlines Stonnastisch Errington Schwingnngs – Sustems. *ZAMM*. 1978; 58, 377.
15. Boyko V.I. On the collision of elastic-plastic bodies. *Ukr. Matem. Journal*. 1961; (3): 16–20. (In Russian)
16. Batuev G.S., Fedosov A.A., Efremov A.K. Collision of massive bodies with elastic-plastic deformations in the contact zone. In: *Strength Analysis*. Moscow, 1964. Pp. 363–381. (In Russian)
17. Belyaev N.M. Resistance of materials. Moscow; Leningrad: Gostekhizdat, 1945. 751 p. (In Russian)
18. Biderman V.A. Theory of impact. Moscow: Mashgiz, 1952. 73 p. (In Russian)
19. Rakhmatulin H.A. Elastoplastic wave propagation under complex loading. *Prikladnaya matematika i mekhanika*. 1958; 22: 759–771. (In Russian)
20. Bulgakov B.V. Fluctuations. Moscow: Gostekhizdat, 1954. 891 p. (In Russian)
21. Timoshenko S.P., Goodyear J. Theory of elasticity. Moscow: Nauka, 1975. 575 p. (In Russian)

Сведения об авторе

Картопольцев Владимир Михайлович, докт. техн. наук, профессор, ООО «ДИАМОС», 634003, г. Томск, пер. Соляной, 24/1, diamos@mail.ru

Author Details

Vladimir M. Kartopoltsev, DSc, Professor, ООО “DIAMOS”, 24/1, Solyanoy Str., 634003, Tomsk, Russia, diamos@mail.ru

Статья поступила в редакцию 08.04.2024
Одобрена после рецензирования 17.04.2024
Принята к публикации 22.04.2024

Submitted for publication 08.04.2024
Approved after review 17.04.2024
Accepted for publication 22.04.2024