

УДК 624.074.4

*ТРЕПУТНЕВА ТАТЬЯНА АЛЕКСЕЕВНА, ст. преподаватель,
tta@sibmail.com
Томский государственный архитектурно-строительный университет,
634003, г. Томск, пл. Соляная, 2*

ВЛИЯНИЕ НАЧАЛЬНОГО ПРОГИБА НА ПЕРЕМЕЩЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ ГИБКОЙ ПОДКРЕПЛЁННОЙ ПЛАСТИНЫ

В статье представлены результаты исследования и дан анализ влияния начального прогиба на перемещения и деформации подкреплённых гибких пластин, нагруженных несимметричной поперечной нагрузкой. Рассмотрены пластины толщиной $0,7h$; h ($h = 1$ см). Проанализированы приведённые эпюры прогибов и графики интенсивности деформаций в наиболее характерных точках в зависимости от величины и направления начального прогиба при разной величине поперечной нагрузки, вызывающей как упругие, так и упруго-пластические деформации.

Ключевые слова: подкреплённые пластины; напряжённо-деформированное состояние; начальный прогиб; физическая и геометрическая нелинейности.

*TATIANA A. TREPUNNEVA, Senior Lecturer,
tta@sibmail.com
Tomsk State University of Architecture and Building,
2, Solyanaya Sq., 634003, Tomsk, Russia*

THE INITIAL DEFLECTION EFFECT ON DISPLACEMENT AND DEFORMATION OF FLEXIBLE REINFORCING PLATE

The paper presents the research results and the analysis of the initial deflection effect on the displacement and deformation of the flexible reinforcing plates under the asymmetrical transverse loading. The plates of $0,7h$; h ($h = 1$ cm) thickness are considered herein. The obtained diagrams of deflections and deformations intensity are analyzed in the most characteristic points depending on the amount and direction of the initial deflection at the different transverse loading that induces both elastic and elasto-plastic deformations.

Keywords: reinforcing plates; stress-strain state; initial deflection; physical and geometrical nonlinearity.

В ненагруженном состоянии гибкие пластины часто имеют некоторые отклонения от первоначальной геометрической формы – начальные прогибы. Причиной их возникновения может быть особенность изготовления, транспортировки, монтажа и эксплуатации элементов конструкций.

На необходимость учёта начальных несовершенств в 1904 г. указал И.Г. Бубнов [1] при исследовании напряжённого состояния пластин при изгибе. Позже W.T. Koiter [2] отметил, что поведение элементов конструкций существенно зависит от наличия несовершенств. X.M. Муштари [3] рассмотрел упругое равновесие тонкой оболочки с начальным прогибом в срединной плоскости. А.С. Вольмиром [4] указано влияние начального прогиба на деформацию гибких пластин при однородных граничных условиях.

В работах [5–7] рассмотрено влияние начального прогиба на напряжённо-деформированное состояние (НДС) на контуре в заделке [5] и на ребре [6], а также влияние начального прогиба на НДС от смещения центральной опоры [7].

В настоящей работе представлено исследование влияния начального прогиба на НДС гибких ребристых двухпанельных пластин постоянной толщины, нагруженных несимметричной поперечной нагрузкой при упругих и упругопластических деформациях. Пластины выполнены из изотропного материала Ст3 (модуль упругости $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, предел текучести $\sigma_s = 240$ МПа).

На рис. 1 представлены схема двухпанельной пластины (рис. 1, а) и диаграмма деформирования материала (рис. 1, б). Рассматривались пластины толщиной: $0,7h$; h ($h = 1$ см). При этом относительная толщина пластин равнялась соответственно: $h/a = 1/50$, $0,7h/a = 1/71$. Панели пластин – квадратные в плане $a \times b = 50 \times 50$ (см); y' – ось симметрии пластины. В центре каждой пластины поставлено ребро размером $b_p \times h_p = 3 \times 3; 4 \times 4$ (см) соответственно, b_p , h_p – ширина и высота ребра. Ребро поставлено с эксцентриситетом относительно срединной плоскости пластины.

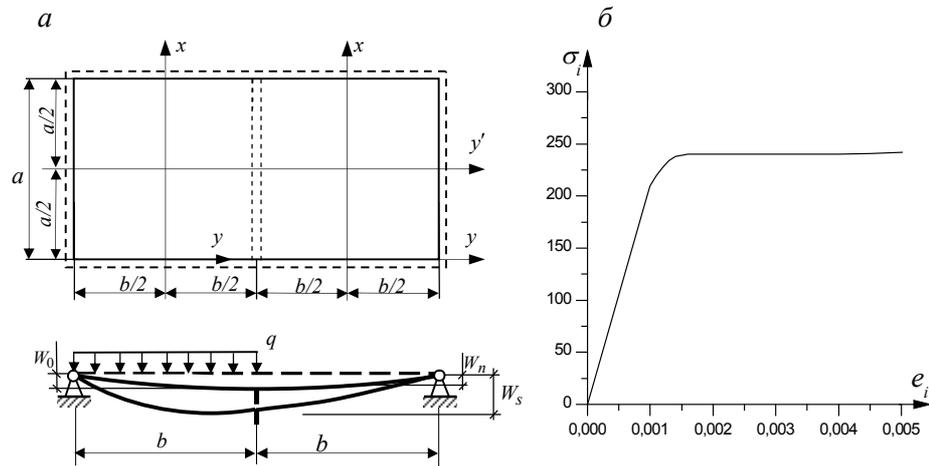


Рис. 1. Двухпанельная стальная пластина:
а – расчётная схема пластины; б – диаграмма деформирования материала Ст3

Функция начального прогиба представлена в аналитическом виде:

$$W_n(x, y) = W_0 F_1(x) F_2(y).$$

Здесь $F_1(x) = \sin \pi x$ при $(0 \leq x \leq 1)$; $F_2(y) = \sin 0,25\pi(1 + \eta y)$ при $(-1 \leq y \leq 1)$; $\eta = 1$ при $k = 1$; $\eta = -1$ при $k = 2$ (k – номер панели). Максимальный начальный прогиб W_0 – в центре пластины. Рассматривались случаи, когда $W_0 = -0,5h$; 0 ; $+0,5h$.

Дополнительные перемещения от действующей внешней нагрузки определялись по методу Ритца с использованием расчётной схемы метода пе-

ремещений [8]. Координатные функции дополнительных перемещений для каждой k -й панели задаются в виде суммы двух рядов:

$$W_k = \sum_n^N W_{ok}^{(n)} A_k^{(n)} + \sum_n^N W_{nk}^{(n)} Z_i^{(n)}.$$

Здесь N – число гармоник; $A_k^{(n)}$, Z_i – варьируемые параметры; W_{ok} – координатные функции первого ряда удовлетворяют однородным граничным условиям; W_{nk} – координатные функции второго ряда удовлетворяют неоднородным граничным условиям,

Полное перемещение точек пластины W_s получается суммированием начального прогиба W_n и дополнительного перемещения пластины W от нагрузки.

Для анализа влияния начального прогиба на НДС пластин определялись прогибы срединной плоскости пластины и интенсивность деформаций верхних и нижних волокон пластины. Построены эпюры прогибов и графики интенсивности деформаций в наиболее характерных точках пластины (в центре левой панели и центре пластины). Расчёт проводился при нагрузках, вызывающих упругие и упругопластические деформации. Приложенная максимальная распределённая нагрузка превышала нагрузку начала текучести в три раза ($q = 3q_s$). Для пластины толщиной h $q_s = 0,4$ МПа, для пластины толщиной $0,7h$ $q_s = 0,2$ МПа. Графики построены в безразмерных величинах: $\bar{q} = q/q_s$ – приведённая нагрузка, $\bar{e}_i = e_i/e_s$ – приведённая интенсивность деформаций ($e_s = \sigma_s/E$ – деформация, соответствующая пределу текучести материала). Расчёт проводился при совместном учёте физической и геометрической нелинейности, что позволяет наиболее достоверно оценить несущую способность конструкции.

На рис. 2 представлены эпюры суммарных перемещений пластин толщиной $0,7h$ и h с начальным прогибом $W_0 = +0,5h$; 0 ; $-0,5h$ при нагрузке $q = q_s$. На рис. 3 представлены эпюры дополнительных перемещений центра левой панели пластин толщиной $0,7h$ и h с начальным прогибом $W_0 = +0,5h$; 0 ; $-0,5h$ при нагрузке $q = q_s$. На рис. 4 представлены графики зависимости приведённой интенсивности деформаций e_i/e_s от приведённой нагрузки q/q_s в верхних и нижних волокнах центра левой панели.

В пластинах с положительным начальным прогибом разница между перемещениями пластин толщиной $0,7h$ и h незначительна. При нагрузке $q = q_s$ она равна $0,02h$. При отрицательном прогибе разница между перемещениями больше, чем при положительном прогибе. И при той же нагрузке ($q = q_s$) составила $0,14h$ (рис. 2).

Отрицательный начальный прогиб приводит к увеличению дополнительных перемещений пластин (рис. 3). При нагрузке $q = q_s$ в пластинах толщиной $0,7h$ и h наименьшие перемещения центра нагруженной панели наблюдаются при положительном начальном прогибе и наибольшие перемещения – при отрицательном начальном прогибе. В пластине толщиной $h = 1$ см при

нагрузке $q = q_s$ величина дополнительных перемещений пластины в центре левой панели при $W_0 = +0,5h$ равна $0,276h$, а при $W_0 = -0,5h$ величина дополнительных перемещений в той же точке равна $0,39h$. С увеличением нагрузки разница между перемещениями при положительном и отрицательном начальном прогибе увеличивается. При нагрузке $q = 2q_s$ дополнительные перемещения центра левой панели пластины толщиной h при положительном начальном прогибе $W = 0,47h$, а при отрицательном начальном прогибе дополнительные перемещения $W = 0,75h$.

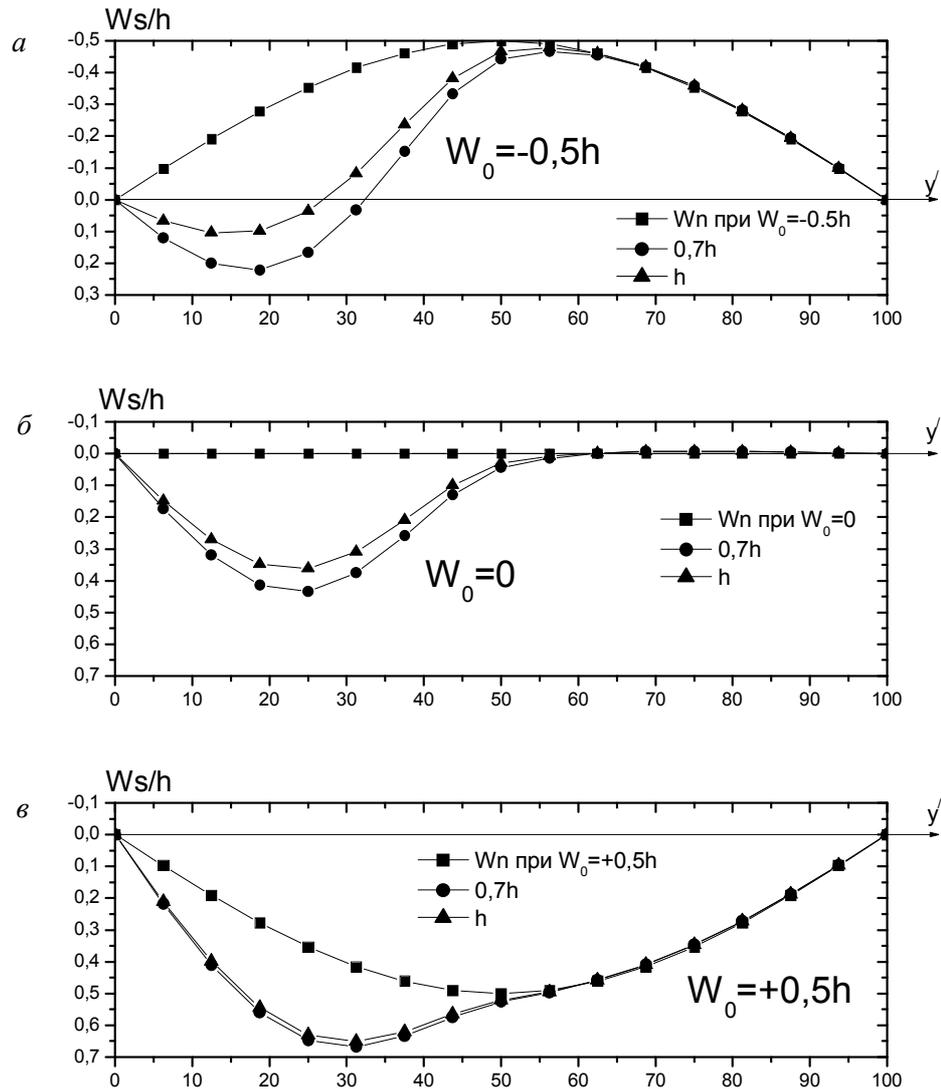


Рис. 2. Эпюры суммарных перемещений W_s пластины с разным начальным прогибом W_0 , нагруженной несимметричной нагрузкой $q = q_s$:
 а - $W_0 = -0,5h$; б - $W_0 = 0$; в - $W_0 = +0,5h$

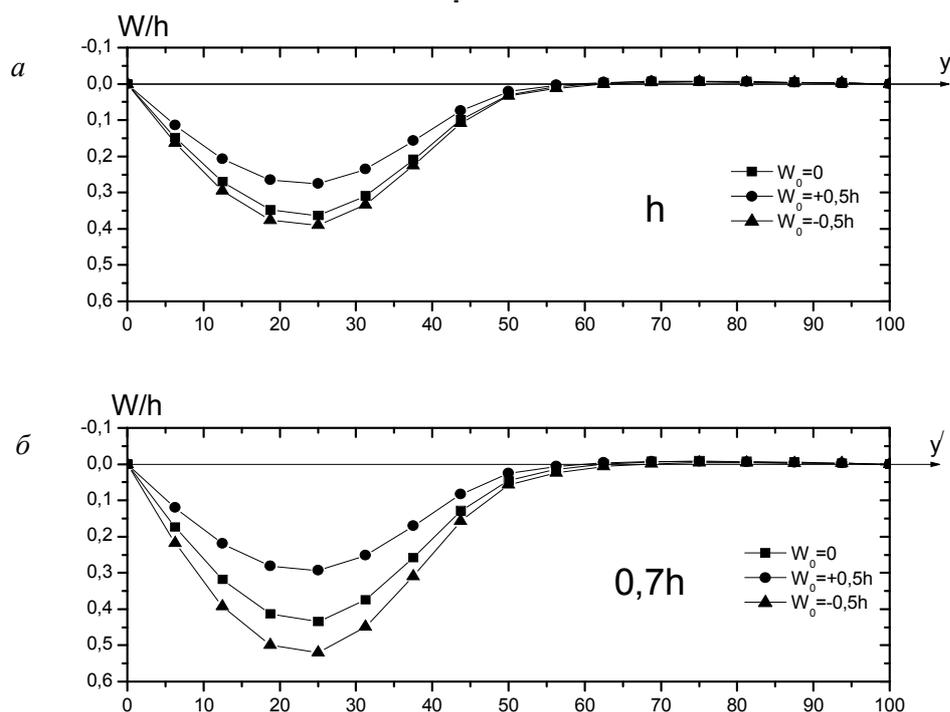


Рис. 3. Эпюры дополнительных перемещений пластин с разным начальным прогибом W_0 , нагруженных несимметричной нагрузкой $q = q_s$:
 а – h ; б – $0,7h$

Кривые суммарных прогибов в пластинах с отрицательным начальным прогибом идут круче, чем в пластинах с положительным начальным прогибом и без начального прогиба (см. рис. 2). Начальный прогиб образует некоторое фиктивное упругое основание [9]. По мере нагружения пластина «выпрямляется», радиус кривизны увеличивается, жёсткость пластины уменьшается.

Независимо от толщины пластины максимальные суммарные перемещения возникают при положительном начальном прогибе (см. рис. 2, б). Суммарные перемещения в центре левой панели в пластине толщиной $h = 1$ см с положительным начальным прогибом равны $0,63h$, в пластине с отрицательным начальным прогибом суммарные перемещения равны $0,036h$. В пластине без начального прогиба ($W_0 = 0$) перемещения в центре левой панели равны $0,363h$.

В пластинах с отрицательным начальным прогибом возникают суммарные перемещения разного знака (см. рис. 2, а). Наибольшая смена знака наблюдается у пластины толщиной $0,7h$. Это связано с большим влиянием продольных усилий у пластин с меньшей толщиной.

Согласно анализу эпюр дополнительных перемещений (рис. 3), отмечается определённая закономерность. В пластинах с положительным начальным прогибом, нагруженных несимметричной нагрузкой $q = q_s$, дополнительные перемещения становятся меньше по сравнению с перемещениями пластин без

начального прогиба. При отрицательном начальном прогибе отмечается увеличение дополнительных перемещений. Это указывает на большее развитие мембранных составляющих деформаций.

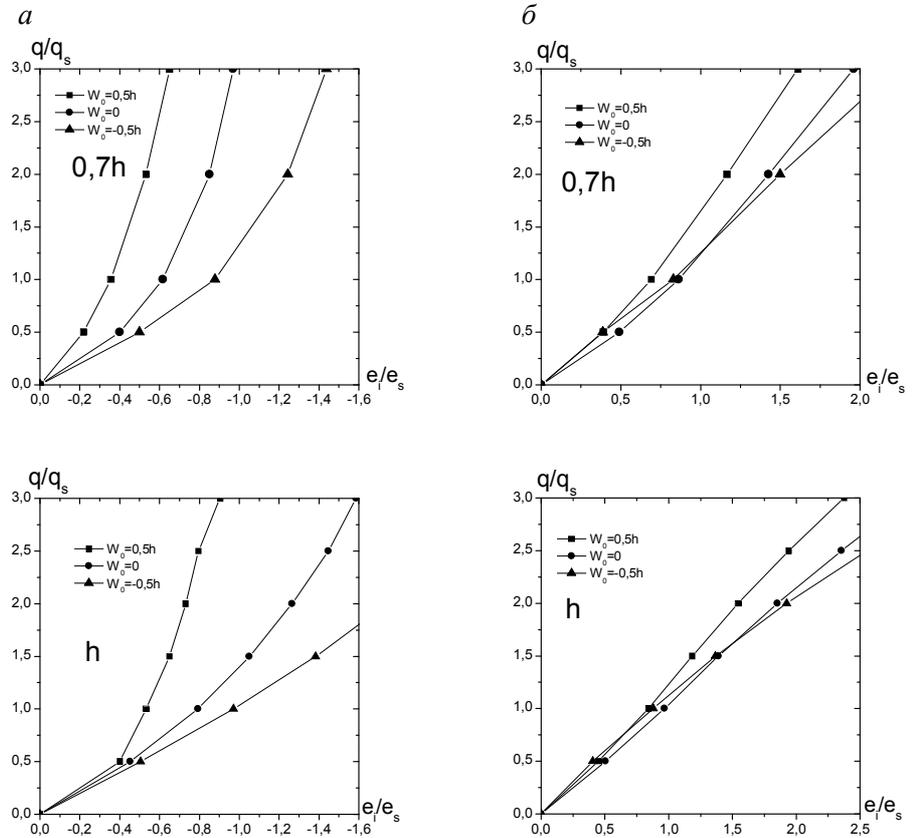


Рис. 4. Графики зависимости « $\bar{e}_i - \bar{q}$ » пластины, полученные при учёте физической и геометрической нелинейностей:
 а – в верхних волокнах центра панели; б – в нижних волокнах центра панели

Уменьшение суммарных перемещений наблюдается в пластинах с отрицательным начальным прогибом. В пластинах с положительным начальным прогибом суммарные перемещения увеличиваются по сравнению с перемещениями пластины без начального прогиба.

Результаты расчёта показали, что с увеличением нагрузки разница между дополнительными перемещениями пластин с начальным прогибом становится больше по сравнению с дополнительными перемещениями пластин без начального прогиба. И обратный результат наблюдается при анализе суммарных перемещений.

Анализ графиков зависимости интенсивности деформаций верхних и нижних волокон в центре левой панели от нагрузки (рис. 4) показал, что при нагрузке $q = q_s$ наиболее напряжёнными являются нижние волокна центра

панели. Наличие отрицательного начального прогиба незначительно сказывается на интенсивности деформаций нижних волокон пластин толщиной $0,7h$ (4,02 %). Это связано с большим влиянием продольных усилий по сравнению с влиянием изгибающих моментов.

С увеличением нагрузки за пределом упругости материала для верхних волокон центра левой панели влияние отрицательного начального прогиба становится существенным, особенно для пластины толщиной $0,7h$.

Анализ результатов расчётов показал, что с уменьшением толщины пластины увеличиваются дополнительные перемещения и интенсивность деформаций. Отрицательный начальный прогиб приводит к увеличению дополнительных перемещений.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бубнов, И.Г. Напряжения в обшивке судов от давления воды / И.Г. Бубнов. – СПб. : Типо-Литография, 1904. – 183 с.
2. *Arnold, M.A. Koiter's elastic stability of solids and structures* / M.A. Arnold, van der Heijden / New York : Cambridge University Press, 2009. – 230 p.
3. Муштари, Х.М. Об упругом равновесии тонкой оболочки с начальными неправильностями в форме срединной поверхности / Х.М. Муштари // Прикл. матем. и механ. – 1951, Т. 15. – № 6. – С. 743–750.
4. Вольмир, А.С. Гибкие пластинки и оболочки / А.С. Вольмир. – М. : ГИТЛ, 1956. – 419 с.
5. Влияние начального изгиба контура на напряжённо-деформированное состояние физически и геометрически нелинейных подкреплённых пластин / О.Н. Попов, О.О. Морозова, И.А. Русаков, Т.А. Трепутнева, М.О. Моисеенко // Проблемы механики: теория, эксперимент и новые технологии : доклады IX Всероссийской конференция молодых ученых (23–25 апреля 2012 г.). – Новосибирск, 2012. – С. 219–222.
6. Попов, О.Н. Напряжённо-деформированное состояние гибкой пластины с начальным прогибом контурного ребра за пределом упругости / О.Н. Попов, М.О. Моисеенко, Т.А. Трепутнева // Строительная механика и расчёт сооружений. – 2012. – № 5. – С. 50–55.
7. Определение напряжённо-деформированного состояния в предварительно напряжённых двухпролетных гибких пластинах от смещения опор при действии поперечной нагрузки / М.О. Моисеенко, О.О. Морозова, О.Н. Попов, Т.А. Трепутнева // Изв. вузов. Физика. – 2013. – Т. 56. – № 7/3. – С. 182–184.
8. Александров, А.В. Строительная механика. Тонкостенные пространственные системы / А.В. Александров, Б.Я. Лашеников, Н.Н. Шапошников. – М. : Стройиздат, 1983. – 488 с.
9. Власов, В.З. Избранные труды. Т. 1. Общая теория оболочек / В.З. Власов. – М. : Изд-во АН СССР, 1962. – 528 с.

REFERENCES

1. *Bubnov I.G. Napryazheniya v obshivke sudov ot davleniya vody* [Water pressure in ship plating]. St-Petersburg : Typo-lithography, 1904. p. 183. (rus)
2. *Koiter's W.T. Elastic stability of solids and structures* (Arnold M. A. van der Heijden). New York : Cambridge University Press, 2009. p. 230.
3. *Mushtari Kh.M. Ob uprugom ravnovesii tonkoi obolochki s nachal'nymi nepravil'nostyami v forme sredinnoi poverkhnosti* [Elastic balance of thin cover with initial abnormalities in the form of a median surface]. *J. Appl. Math. Mech.* 1951. V. 15. No. 6. Pp. 743–750.
4. *Vol'mir A.S. Gibkie plastinki i obolochki* [Flexible plates and shells]. Moscow : GITL Publ., 1956. p. 419. (rus)
5. *Popov O.N., Morozova O.O., Rusakov I.A., Treputneva T.A., Moiseenko M.O. Vliyanie nachal'nogo izgiba kontura na napryazhenno-deformirovannoe sostoyanie fizicheski i geometricheski nelineinykh podkreplennykh plastin* [Influence of initial contour bend on stress-strain state of physically and geometrically nonlinear reinforced plates]. *Proc. 9th All-Russian*

- Conference of Young Scientists 'Mechanics Problems: Theory, Experiment and New Technologies'*. Novosibirsk, 2012. Pp. 219–222. (rus)
6. Popov O.N., Moiseenko M.O., Treputneva T.A. Napryazhenno-deformirovannoe sostoyanie gibkoi plastiny s nachal'nym progibom konturnogo rebra za predelom uprugosti [Stress-strain state of flexible plate with initial rib deflection beyond the elasticity limit]. *Stroitel'nyy mekhanika i raschet sooruzhenii*. 2012. No. 5. Pp. 50–55. (rus)
 7. Moiseenko M.O., Morozova O.O., Popov O.N., Treputneva T.A. Opredelenie napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya v predvaritel'no napryazhennykh dvukhproletnykh gibkikh platinakh ot smeshcheniya opor pri deistvii poperechnoi nagruzki [Stress-strain state in prestrained two-span flexible plates due to support displacement under transverse load]. *Russian Physics Journal*. 2013. V. 56. No. 7/3. Pp. 182–184. (rus)
 8. Aleksandrov A.V., Lashchenikov B.Ya., Shaposhnikov N.N. Stroitel'naya mekhanika. Tonkostennyye prostranstvennyye sistemy [Construction mechanics. Thin-walled spatial systems]. Moscow : Stroyizdat Publ., 1983. p. 488. (rus)
 9. Vlasov V.Z. Obshchaya teoriya obolochek, tom 1. [General theory of shells]. Moscow : Bulletin of the Russian Academy of Sciences, 1962. V. 1. p. 528. (rus)