

СТРОИТЕЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ, ЗДАНИЯ И СООРУЖЕНИЯ

BUILDING AND CONSTRUCTION

Вестник Томского государственного
архитектурно-строительного университета.
2024. Т. 26. № 3. С. 118–133.

ISSN 1607-1859 (для печатной версии)
ISSN 2310-0044 (для электронной версии)

Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo
arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta –
Journal of Construction and Architecture.
2024; 26 (3): 118–133.
Print ISSN 1607-1859
Online ISSN 2310-0044

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

УДК 624.014 + 624.047.2

DOI: 10.31675/1607-1859-2024-26-3-118-133

EDN: JWJSUT

АНАЛИЗ РАБОТЫ ПОД НАГРУЗКОЙ ДВУХПОЯСНЫХ ВАНТОВЫХ ФЕРМ

Андрей Владимирович Чесноков, Виталий Витальевич Михайлов
Липецкий государственный технический университет, г. Липецк, Россия

Аннотация. *Актуальность.* Вантовые фермы обладают рядом преимуществ по сравнению с конструкциями из бетона и стали, широко применяемыми в покрытиях зданий и сооружений. Они позволяют перекрыть пролеты до 60 м и более, обладают малым собственным весом и не требуют использования монтажной техники большой грузоподъемности. Вместе с тем разработка проектных решений вантовых конструкций затруднена из-за отсутствия в имеющихся программных комплексах конечно-элементного анализа специализированных инструментов для выполнения вариантной проработки. Аналитические методы расчета вантовых конструкций требуют интегрирования эпюр поперечных сил в фиктивной балке и решения систем нелинейных уравнений, что осложняет выполнение статического анализа. Таким образом, разработка упрощенных полуаналитических методов расчета, реализуемых в общедоступных математических программных комплексах, является важной и актуальной задачей, позволяющей повысить качество проектных решений за счет использования встроенных инструментов численного моделирования и оптимизации.

Цель настоящей работы – разработка усовершенствованной методики статического анализа двухпоясных вантовых ферм.

Методы исследования и результаты. В основе разработанной методики лежит разложение функции формы вантового пояса и внешней нагрузки в тригонометрические ряды. С учетом условия совместности деформаций поясов, вытекающего из предположения о неизменности длин связей между ними, а также предположения о малости вертикального перемещения фермы в центре пролета, получена система двух уравнений. Одно из них является квадратным и имеет известное решение при заданном коэффициенте изменения формы вантовой фермы, который определяется из второго уравнения методом хорд.

Выводы. Предложенная расчетная методика позволяет определить вертикальные перемещения вантовой фермы, контактную нагрузку между поясами и усилия в поясах

при действии внешней нагрузки, равномерно загружающей левую и правую половины пролета. Применение метода одномерного поиска для решения системы нелинейных уравнений требует меньших вычислительных ресурсов по сравнению с общим случаем решения нелинейных систем.

Ключевые слова: вантовая конструкция, вантовая ферма, пологая ванта, гибкая нить, обратно симметричная нагрузка, деформация, тригонометрический ряд

Для цитирования: Чесноков А.В., Михайлов В.В. Анализ работы под нагрузкой двухпоясных вантовых ферм // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. 2024. Т. 26. № 3. С. 118–133. DOI: 10.31675/1607-1859-2024-26-3-118-133. EDN: JWJSUT

ORIGINAL ARTICLE

STRUCTURAL ANALYSIS OF LOADED CABLE TRUSSES

Andrei V. Chesnokov, Vitalii V. Mikhailov

Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russia

Abstract. Cable trusses are far superior to ordinary roof structures of buildings made of steel or reinforced concrete. They are applicable for spans up to 60 meters or more and do not need heavy-duty installation equipment due to their low weight. On the other hand, design solutions for cable structures are hampered because software packages for the finite element analysis, are not intended for study of alternative solutions. Evaluation methods for the cable truss structure include integration of the shear force distribution in auxiliary beam and solution of a set of non-linear equations. It complicates the implementation of static analysis. The development of simplified evaluation methods suitable for general-purpose mathematical software packages, is an important task to be solved. It will enhance the quality of design solutions via specialized tools for numerical simulation and optimization.

Purpose: The purpose of the work is to develop evaluation methods of cable trusses.

Methodology: The proposed technique is based on the sine-series expansion of the external load and shape function of the cable truss. The assumption of small relative displacement at the center of the truss span and constant length of links between the chords yield a set of two equations. The first one is quadratic. Its solution is given in terms of the cable truss shape alteration determined from the second equation by means of the secant method.

Research findings: The proposed technique allows to determine vertical displacements of the cable truss, the link load between the chords and axial forces under the external load uniformly distributed over left and right parts of the span. Nonlinear equations solved by the plane solution technique, requires much less computations in contrast to the general analysis of non-linear systems.

Keywords: cable truss, shallow cable, flexible cable, antisymmetric load, deformation, trigonometric sequence

For citation: Chesnokov A.V., Mikhailov V.V. Structural analysis of loaded cable trusses. Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta – Journal of Construction and Architecture. 2024; 26 (3): 118–133. DOI: 10.31675/1607-1859-2024-26-3-118-133. EDN: JWJSUT

Введение

Вантовые строительные конструкции предназначены для большепролетных зданий, обеспечивают свободную планировку внутреннего простран-

ства. В работе [1] выделены области их эффективного применения. Вантовые конструкции включают большую группу так называемых tensegrity-систем, в которых отдельные распорки объединяют непрерывные растянутые элементы [2]. За счет создания предварительного напряжения tensegrity-системы проявляют намного меньшую деформативность, по сравнению с одиночными вантами. Двухпоясные вантовые фермы являются типом tensegrity-систем. Имея плоскую структуру и упрощенное конструктивное решение, вантовые фермы активно используются на практике.

Совершенствование методики расчета вантовых конструкций способствует развитию методов численного моделирования создания предварительных напряжений сложных комбинированных систем, а также вносит вклад в процесс оценки их работоспособного состояния [3, 4].

Для численного анализа вантовых конструкций, проявляющих нелинейное поведение под нагрузкой, предложено использование метода конечных элементов [5, 6]. Итерационные методики, позволяющие получить требуемую точность решения за конечное число шагов, находят широкое применение на практике для расчета нелинейных систем [7, 8].

К числу итерационных подходов принадлежит метод Ньютона – Рафсона, включающий построение касательной матрицы жесткости деформированной конструкции. В работе [9] метод Ньютона – Рафсона применен для определения равновесного состояния вантовой фермы, состоящей из элементарных модулей. Для учета криволинейных вантовых элементов, физически нелинейной работы материала и вариации температуры предложена уточненная матрица жесткости [10].

В работе [11] для получения численного решения нелинейной системы применен итерационный алгоритм Левенберга – Марквардта, который совместно с модифицированным методом Ньютона использован для определения начальных напряжений элементов tensegrity-купола в работе [12].

Применение численных методов требует предварительного задания основных параметров конструкции, к числу которых относятся геометрические размеры, а также площади поперечных сечений и величина предварительного напряжения вантовых элементов. Таким образом, совершенствование аналитических методов расчета вантовых систем является важной и актуальной задачей.

Получение аналитического решения для пространственной вантовой конструкции вместе с тем сопряжено с существенными сложностями и представляет трудоемкую задачу. В работах [13, 14] предлагается переход к эквивалентным плоским моделям тросового купола с получением упрощенного решения. Разбиение вантовой конструкции на подсистемы верхнего и нижнего поясов, объединенные связями, предложено в работе [15].

В работе [16] даны выражения для определения исходных длин вантовых элементов и остаточной контактной нагрузки между поясами равномерно загруженных вантовых ферм. Нахождение распора поясов вантовой фермы производится из решения системы нелинейных уравнений [17, 18]. Для определения коэффициентов нелинейной системы предлагается интегрирование эпюр внутренних усилий в фиктивной балке.

В работе [19] для получения аналитического решения системы нелинейных уравнений предлагается пренебречь изменением распора поясов от действия обратно симметричной нагрузки. Вместе с тем неучет изменения распора ведет к неточностям, допустимым только в упрощенных расчетах.

Из приведенного литературного обзора следует вывод о том, что численные методы расчета вантовых систем проработаны с достаточной полнотой для выполнения практических расчетов в специализированных программных комплексах нелинейного анализа. Тем не менее задание параметров вантовой конструкции и оценка правильности принятых расчетных схем требуют разработки так называемых полуаналитических подходов, реализуемых в программных комплексах математических расчетов общего назначения, обладающих инструментами оптимизации и аппроксимации.

Аналитические подходы к статическому расчету вантовых конструкций, разработанные к настоящему времени, сопряжены с трудоемкими процедурами расчета коэффициентов, включающими построение и интегрирование эпюр поперечных сил или изгибающих моментов в фиктивной шарнирно опертой балке, а также с решением систем нелинейных уравнений. Это представляет сложность при выполнении практических расчетов, затрудняя проработку вариантов на этапе эскизного проектирования.

Целью настоящей работы является разработка усовершенствованной полуаналитической методики статического анализа двухпоясных вантовых ферм, предназначенной для использования в программных комплексах математических расчетов общего назначения.

Методы исследования

Вантовые фермы состоят из гибких пологих поясов, объединенных связями в виде растяжек или распорок. Расчетная схема вантовой фермы приведена на рис. 1.

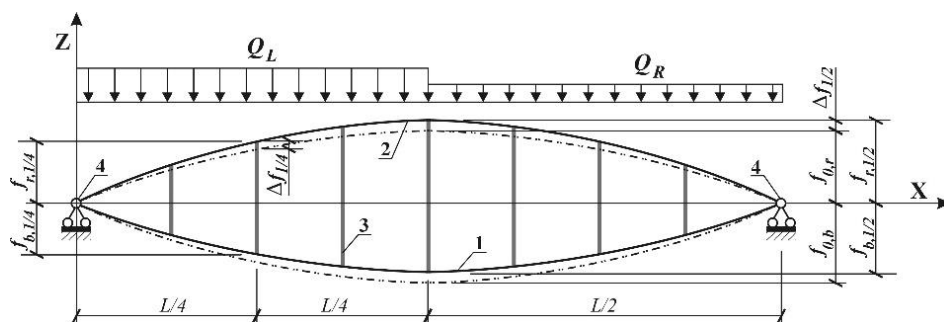


Рис. 1. Расчетная схема двухпоясной вантовой фермы:

1 – несущий пояс; 2 – стабилизирующий пояс; 3 – связь между поясами; 4 – неподвижная опора

Fig. 1. Structural model of cable truss:

1 – bearer chord; 2 – restraining chord; 3 – tie; 4 – fixed support

Приняты следующие предпосылки для выполнения расчетов. Материал исследуемых вантовых ферм работает в линейно-упругой стадии. Опорные

узлы неподвижны и расположены в одной горизонтальной плоскости. Пояса исследуемых ферм являются пологими гибкими вантами, способными воспринимать только растяжение. Отношения ординат в центре пролета (стрел поясов) f к размеру пролета L принадлежат к диапазону $1/24-1/8$. На размер перекрываемого пролета ограничения не наложены. В исходном условно ненапряженном состоянии между поясами создается бесконечно малая равномерная контактная нагрузка, задающая их начальную форму в виде квадратной параболы с начальной стрелой f_0 .

Связи между поясами обладают бесконечной жесткостью. Внешние нагрузки действуют вертикально, а узлы вантовых ферм перемещаются только в вертикальном направлении. Таким образом, ординаты поясов f в деформированном состоянии могут быть выражены через перемещения вантовой фермы Δf следующим образом:

$$f_{b1/2} = f_{0b} - \Delta f_{1/2}; \quad (1a)$$

$$f_{r1/2} = f_{0r} + \Delta f_{1/2}, \quad (16)$$

где b и r – индексы, обозначающие несущий и стабилизирующий пояс соответственно.

Принято, что внешняя нагрузка Q на вантовую ферму состоит из двух частей, равномерно загружающих левую и правую половины пролета: Q_L и Q_R . Положительные направления нагрузок приведены на рис. 1. Нагрузка слева неотрицательна $Q_L \geq 0$, а нагрузка справа не превышает нагрузку слева $Q_R \leq Q_L$. При этом суммарная нагрузка на вантовую ферму положительна $(Q_R + Q_L) > 0$.

Внешняя нагрузка Q , действующая на вантовую ферму, полностью передается на несущий пояс. Таким образом, нагрузки на пояса составят:

– несущий пояс:

$$q_b = Q + P; \quad (2a)$$

– стабилизирующий пояс:

$$q_r = P, \quad (26)$$

где P – контактная нагрузка между поясами.

По аналогии с внешней нагрузкой контактную нагрузку можно представить в виде двух составляющих P_L и P_R . Внешняя и контактная нагрузки разбиваются на сумму равномерной и обратно симметричной частей (индексы Eq и Inv соответственно):

$$Q_L = Q_{Eq} + Q_{Inv}; \quad Q_R = Q_{Eq} - Q_{Inv}; \quad (3)$$

$$P_L = P_{Eq} + P_{Inv}; \quad P_R = P_{Eq} - P_{Inv}. \quad (4)$$

Величины равномерной и обратно симметричной составляющих внешней нагрузки Q_{Eq} и Q_{Inv} находятся из (3) при заданных значениях Q_L и Q_R . Составляющие контактной нагрузки между поясами P_{Eq} и P_{Inv} неизвестны и подлежат определению.

С учетом (2a) и (26) суммарная равномерная и обратно симметричная нагрузки на пояса составят:

– несущий пояс:

$$q_{b,Eq} = Q_{Eq} + P_{Eq} \text{ и } q_{b,Inv} = Q_{Inv} + P_{Inv}; \quad (5)$$

– стабилизирующий пояс:

$$q_{r,Eq} = P_{Eq} \text{ и } q_{r,Inv} = P_{Inv}. \quad (6)$$

Авторы работы [20], применяя аппроксимацию формы ванты и внешней нагрузки при помощи тригонометрических рядов, получили уравнение равновесия:

$$y(x) = \frac{kq_j}{EA} \frac{L^2}{\pi^2} \frac{L_{c0}}{\Delta L} \Psi(x), \quad (7)$$

где $y(x)$ – ордината ванты в локальной системе координат (начало координат находится на левой опоре ванты, локальная ось Y направлена в сторону увеличения ординаты: для стабилизирующего пояса – вверх, для несущего пояса – вниз) в сечении x при $x \in [0...L]$, где L – пролет ванты; EA – продольная жесткость ванты; ΔL – удлинение ванты, равное разности между ее геометрической длиной под нагрузкой L_g и начальной длиной L_{c0} ; j – номер элемента ряда (так называемый базовый индекс, принимаемый в дальнейших расчетах равным единице); kq_j – коэффициент разложения внешней нагрузки $q_g(x)$, распределенной по длине пролета ванты, определяемый при помощи интеграла Фурье [21]; $\Psi(x)$ – функция, зависящая от внешней нагрузки:

$$\Delta L = L_g - L_{c0}; \quad (8)$$

$$kq_j = \frac{2}{L} \int_0^L \left(q_g(x) \sin \left(\frac{j \cdot \pi \cdot x}{L} \right) \right) dx; \quad (9)$$

$$\Psi(x) = \sum_{m=1}^{n_M} \frac{k_{m,j}}{m^2} \sin \left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{L} \right), \quad (10)$$

где $k_{m,j}$ – приведенные коэффициенты разложения нагрузки, полученные в [20] для $j = 1$ в виде суммы приведенных коэффициентов равномерной части нагрузки k_{m1}^{Eq} и обратно симметричной части k_{m1}^{Inv} :

$$k_{m1}(\eta) = k_{m1}^{Eq} + k_{m1}^{Inv}(\eta), \quad (11)$$

где η – отношение интенсивности обратно симметричной нагрузки, действующей на пояс вантовой фермы q_{Inv} , к интенсивности равномерной нагрузки q_{Eq} :

$$\eta = q_{Inv} / q_{Eq}. \quad (12)$$

Отношение (12) выражено через ординаты пояса в четверти и середине пролета $f_{1/4}$ и $f_{1/2}$ [20]:

$$\eta = 4f_{1/4} / f_{1/2} - 3. \quad (13)$$

Упрощенное выражение для определения геометрической длины ваны по ординате (стреле) в центре пролета в зависимости от соотношения η :

$$L_g \approx \frac{2}{3} \frac{\eta^2 + 4}{L} f_{1/2}^2 + L. \quad (14)$$

В свою очередь, начальная недеформированная длина L_{c0} представляет собой разность геометрической длины пояса в исходном положении L_{g0} и заданного натяжения ΔL_p , необходимого для создания предварительных напряжений в вантовой ферме:

$$L_{c0} = L_{g0} - \Delta L_p. \quad (15)$$

Длина пояса в исходном положении L_{g0} находится из (14) при заданной начальной стреле f_0 и соотношении $\eta = 0$, соответствующем равномерной нагрузке.

Результаты

В соответствии с (9), коэффициенты разложения нагрузки, состоящей из суммы равномерной Eq и обратно симметричной Inv частей, $q_g = q_{Eq} + q_{Inv}$ являются суммой коэффициентов:

$$kq_j = kq_j^{Eq} + kq_j^{Inv}. \quad (16)$$

В свою очередь, все нечетные коэффициенты разложения обратно симметричной нагрузки, включая kq_1^{Inv} , равны нулю, а для базового индекса ($j = 1$) можно записать:

$$kq_1 = kq_1^{Eq1} \cdot q_{Eq}, \quad (17)$$

где q_{Eq} – интенсивность равномерной части нагрузки, действующей на ванту; $kq_1^{Eq1} = 4/\pi$ – коэффициент разложения (9) равномерно распределенной нагрузки единичной интенсивности, имеющий индекс $j = 1$.

Учитывая (17) и значение функции (10) для центра пролета, равное $\Psi_{1/2} = \pi^3/32$, уравнение (7) запишем в виде

$$\frac{f_{1/2}}{q_{Eq}} = \frac{\rho}{\Delta L}, \quad (18)$$

где ρ – коэффициент:

$$\rho = \frac{L^2 \cdot L_{c0}}{8 \cdot EA}. \quad (19)$$

Учитывая (5) и (6), запишем (18) и (12) для поясов фермы в центре пролета: – для несущего пояса:

$$\frac{f_{b1/2}}{Q_{Eq} + P_{Eq}} = \frac{\rho_b}{\Delta L^b}; \quad (20a)$$

$$\eta_b = \frac{Q_{Inv} + P_{Inv}}{Q_{Eq} + P_{Eq}}; \quad (206)$$

– для стабилизирующего пояса:

$$\frac{f_{r1/2}}{P_{Eq}} = \frac{\rho_r}{\Delta L^r}; \quad (21a)$$

$$\eta_r = P_{Inv} / P_{Eq}, \quad (216)$$

где ρ_b и ρ_r – коэффициенты, определяемые для несущего и стабилизирующего поясов по (19).

Из (206) и (216) получим зависимость между соотношениями η_b и η_r :

$$\eta_b = \frac{Q_{Inv} + \eta_r \cdot P_{Eq}}{Q_{Eq} + P_{Eq}}. \quad (22)$$

Из (13), учитывая (1), выразим отношения обратно симметричной к равномерной нагрузке для несущего и стабилизирующего поясов в зависимости от вертикальных перемещений вантовой фермы в середине и четверти пролета $\Delta f_{1/2}$ и $\Delta f_{1/4}$:

$$\eta_b = \frac{\lambda}{\Delta f_{1/2} - f_{0b}} \Delta f_{1/2}; \quad (23a)$$

$$\eta_r = \frac{\lambda}{\Delta f_{1/2} + f_{0r}} \Delta f_{1/2}, \quad (236)$$

где λ – коэффициент изменения формы вантовой фермы:

$$\lambda = 4\Delta f_{1/4} / \Delta f_{1/2} - 3. \quad (24)$$

Из (20a), с учетом (8), (14), (21a), (23a) и (236), получено кубическое уравнение от неизвестного вертикального перемещения вантовой фермы в середине пролета $\Delta f_{1/2}$:

$$\Delta f_{1/2}^3 + A_2 \cdot \Delta f_{1/2}^2 + A_1 \cdot \Delta f_{1/2} + A_0 = 0. \quad (25a)$$

Вертикальное перемещение в середине пролета $\Delta f_{1/2}$ определяется упругими деформациями поясов, а не изменением формы вантовой фермы. Таким образом, величина данного перемещения существенно меньше ее габаритных размеров, а кубическое уравнение может быть редуцировано до уравнения второй степени:

$$A_2(\lambda) \cdot \Delta f_{1/2}^2 + A_1 \cdot \Delta f_{1/2} + A_0 = 0. \quad (256)$$

где A_0 , A_1 – коэффициенты; A_2 – функция, зависящая от параметра λ :

$$A_2(\lambda) = \frac{2}{3} \frac{\rho_b \cdot f_{0r} - \rho_r \cdot f_{0b}}{L} (\lambda^2 + 12); \quad (26a)$$

$$A_1 = 8 \frac{\rho_b \cdot f_{0r}^2 + \rho_r \cdot f_{0b}^2}{L} + L(\rho_b + \rho_r) - (\rho_b \cdot L_{c0}^r + \rho_r \cdot L_{c0}^b); \quad (266)$$

$$A_0 = \frac{8}{3} \frac{\rho_b \cdot f_{0r}^3 - \rho_r \cdot f_{0b}^3}{L} + L(\rho_b \cdot f_{0r} - \rho_r \cdot f_{0b}) + \dots \\ \dots + \rho_r \cdot f_{0b} \cdot L_{c0}^b - \rho_b \cdot f_{0r} \cdot L_{c0}^r + Q_{Eq} \cdot \rho_b \cdot \rho_r. \quad (26b)$$

Коэффициенты ρ_b и ρ_r для несущего и стабилизирующего поясов определяются по (19).

При условии $A_2 \neq 0$, которое обеспечено при

$$\rho_b \cdot f_{0r} \neq \rho_r \cdot f_{0b}, \quad (27a)$$

а также при условии

$$\varsigma(\lambda) = A_1^2 - 4A_2(\lambda)A_0 \geq 0, \quad (27b)$$

решение (25б) запишем в следующем виде:

$$\Delta f_{1/2}(\lambda) = \frac{-A_1 + \sqrt{\varsigma(\lambda)}}{2A_2(\lambda)}. \quad (28)$$

При невыполнении условий (27) вертикальное перемещение вантовой фермы в середине пролета $\Delta f_{1/2}$ не зависит от параметра λ и определяется из решения линейного уравнения, полученного из (25б) при $A_2 = 0$:

$$\Delta f_{1/2} = -A_0 / A_1. \quad (29)$$

Равномерная часть контактной нагрузки между поясами P_{Eq} , а также отношения η_b и η_r должны удовлетворять равенству (22), которое запишем в виде нелинейного уравнения одной переменной λ :

$$F(\lambda) = 0, \quad (30)$$

где

$$F(\lambda) = \frac{Q_{Inv} + \eta_r(\lambda)P_{Eq}(\lambda)}{Q_{Eq} + P_{Eq}(\lambda)} - \eta_b(\lambda). \quad (31)$$

Здесь $\eta_b(\lambda)$ и $\eta_r(\lambda)$ – функции (23а) и (23б); $P_{Eq}(\lambda)$ – функция, полученная из (21а) при учете, что входящие в (21а) элементы $f_{r1/2}$ и ΔL^r зависят от вертикального перемещения вантовой фермы в центре пролета $\Delta f_{1/2}$, которое, в свою очередь, определяется из (28) при заданном λ ; Q_{Eq} , Q_{Inv} – симметричная и обратно симметричная составляющие заданной внешней нагрузки.

Для решения уравнения (30) предлагается применить метод хорд. Поиск решения производится в диапазоне $\lambda_L \dots \lambda_R$, где границы диапазона принимаются из условия

$$F(\lambda_L)F(\lambda_R) \leq 0. \quad (32)$$

В случае если значение функции (31) на одной из границ равно нулю, $F(\lambda^*) = 0$, решение найдено: $\lambda = \lambda^*$, иначе – производится итерационный поиск. На каждой итерации определяется промежуточная точка λ_M :

$$\lambda_M = \frac{|F(\lambda_R)|\lambda_L + |F(\lambda_L)|\lambda_R}{|F(\lambda_R)| + |F(\lambda_L)|}. \quad (33)$$

Границы диапазона поиска меняются следующим образом. При $F(\lambda_R)F(\lambda_M) > 0$ отбрасывается часть интервала, находящаяся правее точки λ_M (т. е. принимается $\lambda_R = \lambda_M$), в противном случае отбрасывается левая часть интервала (принимается $\lambda_L = \lambda_M$). Итерационный процесс поиска решения завершается при достижении заданной степени точности:

$$|F(\lambda_M)| < \mu_\varepsilon, \quad (34)$$

где μ_ε – величина допустимой ошибки.

В качестве решения принимается $\lambda = \lambda_M$.

Невозможность задания начального диапазона поиска $\lambda_L \dots \lambda_R$ по условию (32) означает, что решение λ стремится к $\pm\infty$, а вертикальное перемещение вантовой фермы в центре пролета, с учетом (24), стремится к нулю: $\Delta f_{1/2} \rightarrow 0$. В этом случае задача нахождения параметра λ заменяется задачей определения вертикального перемещения вантовой фермы в четверти пролета $\Delta f_{1/4}$ при отсутствии перемещения в центре:

$$\Delta f_{1/2} = 0. \quad (35)$$

Учитывая (24), при условии (35), запишем отношения (23а) и (23б) в виде функций от перемещения $\Delta f_{1/4}$:

$$\eta_b(\Delta f_{1/4}) = -4\Delta f_{1/4} / f_{0b}; \quad (36a)$$

$$\eta_r(\Delta f_{1/4}) = 4\Delta f_{1/4} / f_{0r}. \quad (36b)$$

Поиск решения производится методом хорд с использованием функции (31), выраженной через искомое перемещение:

$$F(\Delta f_{1/4}) = \Delta f_{1/4}^3 + C_1 \cdot \Delta f_{1/4} + C_0 \rightarrow 0, \quad (37)$$

где
$$C_1 = \frac{3}{32} L \left(\frac{8}{3} \frac{f_{0r}^2}{L} + Q_{Eq} \frac{\rho_r}{f_{0r} + f_{0b}} + L - L_{c0}^r \right); \quad (38a)$$

$$C_0 = \frac{3}{128} L \frac{f_{0b} \cdot \rho_r}{f_{0r} + f_{0b}} Q_{Inv}. \quad (38b)$$

Рассмотрена двухпоясная вантовая ферма пролетом $L = 60$ м. В качестве материала поясов приняты высокопрочные стальные ванты с модулем упругости $E = 1,48 \cdot 10^4$ кН/см². Площади поперечных сечений несущего и стабилизирующего поясов: $A_b = 20,0$ см² и $A_r = 13,0$ см². На стадии предварительного напряжения распоры и стрелы поясов фермы составляют: $H_{pr,b} = H_{pr,r} = 588,6$ кН и $f_{b1/2}^{pr} = f_{r1/2}^{pr} = 4,02$ м [18, 22].

Геометрические длины поясов на стадии предварительного напряжения $L_{g,pr}^b$ и $L_{g,pr}^r$ найдены по (14) при заданных стрелах $f_{b1/2}^{pr}$, $f_{r1/2}^{pr}$ и коэффициенты, соответствующем равномерной нагрузке $\eta = 0$. Приняв равномерное распределение усилий по длине вант, находим относительные деформации поясов

при преднапряжении: $\varepsilon_{pr,b} = H_{pr,b} / EA_b = 1,987 \cdot 10^{-3}$ и $\varepsilon_{pr,r} = H_{pr,r} / EA_r = 3,056 \cdot 10^{-3}$. По закону Гука найдены начальные недеформированные длины поясов в исходном (ненапряженном) состоянии $L_{c0} = L_{g,pr} / (1 + \varepsilon_{pr})$ при известных длинах и относительных деформациях на стадии преднапряжения: $L_{c0}^b = 60,59785$ м и $L_{c0}^r = 60,53322$ м.

Принято, что предварительное напряжение вантовой фермы создается натяжением несущего пояса. Таким образом, геометрическая длина стабилизирующего пояса в исходном состоянии совпадает с начальной недеформированной длиной $L_{g0}^r = L_{c0}^r$. Стрела стабилизирующего пояса в исходном состоянии найдена из (14) при $\eta = 0$: $f_{0r} = 3,4637$ м.

Стрела несущего пояса в исходном состоянии найдена из условия недеформируемости распорок, объединяющих пояса, и, как следствие, сохранения неизменным расстояния между поясами: $f_{0b} = 4,5763$ м. Геометрическая длина несущего пояса в исходном состоянии $L_{g0}^b = 60,93076$ м найдена по (14) при известной стреле f_{0b} и коэффициенте $\eta = 0$. По разности геометрической и начальной недеформированной длины несущего пояса найдено его натяжение, необходимое для создания предварительного напряжения вантовой фермы: $\Delta L_p = 0,3329$ м (15).

Выполнено сравнение полученных результатов (обозначены индексом g) с результатами расчета вантовой фермы в специализированном программном комплексе MAV.Structure [23] (индекс M). Вертикальное перемещение в центре пролета при преднапряжении: $\Delta f_{pr,g} = f_{pr,r} - f_{0r} = 0,5563$ м. Расхождение с результатом MAV.Structure $\Delta f_{pr,M} = 0,5709$ м составляет 2,6 %.

Принято загрузить только левой половины пролета вантовой фермы $Q_R = 0,0$ (см. рис. 1). Интенсивность нагрузки выражена параметрически [18]:

$$Q_L = q_0 \cdot k_{Ld}, \quad (39)$$

где $q_0 = 8,91$ кН/м; k_{Ld} – параметр (коэффициент увеличения нагрузки).

Для удобства сравнения вычислены вертикальные перемещения относительно преднапряженного состояния вантовой фермы Δz_g :

$$\Delta z_g = \Delta f_{Ld,g} - \Delta f_{pr,g}, \quad (40)$$

где $\Delta f_{pr,g}$, $\Delta f_{Ld,g}$ – вертикальные перемещения при преднапряжении и при действии внешней нагрузки относительно исходного состояния вантовой фермы, полученные по предложенной методике.

При $k_{Ld} = 8,0$ расхождения полученных по предложенной методике перемещений в четверти и центре пролета $\Delta z_{1/4g} = -1822,9$ мм и $\Delta z_{1/2g} = -975,4$ мм от результатов программного комплекса MAV.Structure $\Delta z_{1/4M} = -1770,1$ мм и $\Delta z_{1/2M} = -977,9$ мм составляют 2,94 и 0,26 % соответственно. Усилия в поясах вантовой фермы получены исходя из условия их упругой работы:

$N_{b,g} = 3534,5$ кН и $N_{r,g} = 287,8$ кН. При этом длины поясов под нагрузкой получены по (14), с учетом (1) и (13), при найденных перемещениях. Расхождения с результатами MAV.Structure $N_{b,M} = 3373,2$ кН и $N_{r,M} = 285,1$ кН составляют 4,67 и 0,94 % соответственно.

Сравнение перемещений вантовой фермы с результатами работ других авторов приведено на рис. 2. На оси абсцисс обозначены вертикальные перемещения на расстоянии $L/3$ от левой опоры. На оси ординат приведены значения внешней нагрузки, соответствующие коэффициенту $k_{Ld} = 1-8$ (39). Графики 1 и 2 иллюстрируют результаты, полученные в [18, 22]. Перемещения, приведенные на графике 3, найдены по предлагаемой в настоящей работе методике (40).

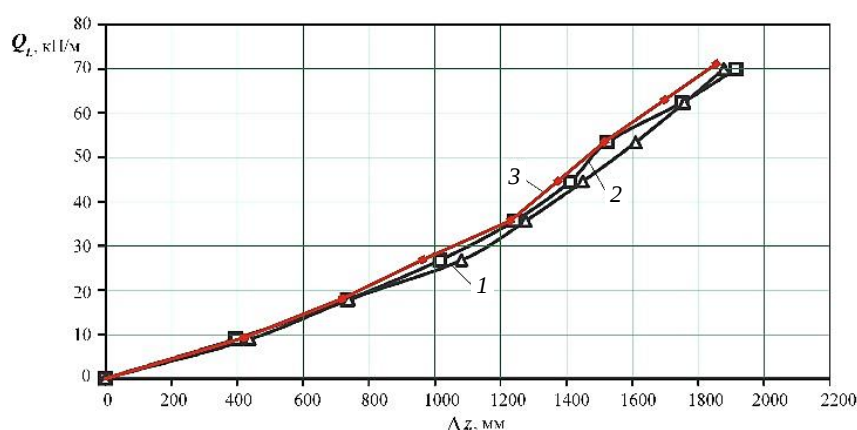


Рис. 2. Вертикальные перемещения вантовой фермы:

1, 2 – решения, полученные в [18] и [22] соответственно; 3 – значения, полученные по предлагаемой методике

Fig. 2. Vertical displacements of cable truss:

1, 2 – works [18] and [22], respectively; 3 – this work

Приведенное сравнение показывает хорошее соответствие результатов статического расчета двухпоясной вантовой фермы, полученных по предложенной методике, работам других авторов, а также результатам специализированного программного комплекса MAV.Structure. Таким образом, разработанная полуаналитическая методика расчета позволяет получить достаточно точные с практической точки зрения результаты.

Заключение

Двухпоясные вантовые фермы относятся к числу основных несущих элементов облегченных строительных конструкций большепролетных покрытий зданий и сооружений. Их применение способствует освоению отдаленных и труднодоступных территорий с недостаточно развитой инфраструктурой. Таким образом, совершенствование методов их расчета и проектирования является важной и актуальной задачей.

Предложена упрощенная полуаналитическая методика статического анализа двухпоясных вантовых ферм, усовершенствованная в части применения метода одномерного поиска для решения системы нелинейных уравнений, использование которого требует меньших вычислительных ресурсов в сравнении с общим случаем решения нелинейных систем.

Методика применима для широко распространенного на практике случая действия внешней нагрузки, равномерно загружающей левую и правую половины пролета и представленной в виде суммы равномерной нагрузки по всему пролету и обратно симметричной нагрузки.

Методика основана на применении уравнения равновесия гибкой ванта, полученного методом разложения функции формы ванта и внешней нагрузки в тригонометрические ряды. Предложены уравнения для нахождения перемещений в центре и четверти пролета. По найденным перемещениям определяются нагрузки на пояса вантовой фермы и усилия в поясах.

Результаты применения предложенной методики находятся в близком соответствии с результатами, полученными другими авторами, а также с результатами геометрически нелинейного статического анализа в специализированном программном комплексе MAV.Structure.

Предложенная усовершенствованная методика позволит повысить глубину вариантной проработки вантовых конструкций на ранней стадии разработки проекта за счет ее реализации в общедоступных математических программных комплексах, обладающих широким набором инструментов численного моделирования, оптимизации и обработки полученных результатов.

Дальнейшее совершенствование предложенной методики находится в области учета произвольных нагрузок на вантовую ферму, смещений опор и температурных воздействий.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Еремеев П.Г. Висячие конструкции // Строительные материалы. 2022. № 10. С. 62–67. DOI: 10.31659/0585-430X-2022-807-10-62-67
2. Еремеев П.Г. Вантовая комбинированная конструктивная система «Тенсегрити» // Промышленное и гражданское строительство. 2021. № 1. С. 21–27. DOI: 10.33622/0869-7019.2021.01.21-27
3. Yu Z., Jiamin G., Zhiyu J., Weigang C., Guanggen Z. Control method for determining feasible pre-stresses of cable-struts structure // Thin-Walled Structures. 2022. V. 174. Article 109159. DOI: 10.1016/j.tws.2022.109159
4. Yuan P., He B., Nie R., Zhang L., Yu H., Wang W., Ma X. Member importance prediction and failure response analysis for cable network antennas // Engineering Structures. 2022. V. 266. Article 114642. DOI: 10.1016/j.engstruct.2022.114642
5. Talvik I. Finite element modelling of cable networks with flexible supports // Computers and Structures. 2001. V. 79. I. 26–28. P. 2443–2450.
6. Zhang A., Shangguan G., Zhang Y., Zou M., Luo C. Structural behavior of a fully assembled cable-piercing ridge-tube cable dome with modular assembly ring truss // Journal of Constructional Steel Research. 2023. V. 211. Article 108193. DOI: 10.1016/j.jcsr.2023.108193
7. Дроздов В.В., Пшеничкина В.А., Строк С.И. Расчет несущих строительных конструкций уникальных высотных и большепролетных зданий с учетом физической и геометрической нелинейности. Волгоград : ВолгГТУ, 2020. 100 с.
8. Gasparini D., Gautam V. Geometrically nonlinear static behavior of cable structures // Journal of Structural Engineering. 2002. № 128 (10). P. 1317–1329.

9. Ma S., Yuan X.F., Deng M., Yang L. Minimal mass design of a new cable truss in two states // *Mechanics Research Communications*. 2022. V. 125. Article 103995. DOI: 10.1016/j.mechres-com.2022.103995
10. Costa R.S., Lavall A.C.C., Lanna da Silva R.G., Porcino dos Santos A., Viana H.F. Cable structures: an exact geometric analysis using catenary curve and considering the material non-linearity and temperature effect // *Engineering Structures*. 2022. V. 253. Article 113738. DOI: 10.1016/j.engstruct.2021.113738
11. Xue Y., Luo Y., Wang Y., Xu X., Wan H.P., Shen Y., Fu W. A new configuration of Geiger-type cable domes with sliding ridge cables: computational framework and structural feasibility investigation // *Engineering Structures*. 2023. V. 286. Article 116028. DOI: 10.1016/j.engstruct.2023.116028
12. Feng Y., Yuan X.F., Samy A. Analysis of new wave-curved tensegrity dome // *Engineering Structures*. 2022. V. 250. Article 113408. DOI: 10.1016/j.engstruct.2021.113408
13. Krishnan S. Structural design and behavior of prestressed cable domes // *Engineering Structures*. 2020. V. 209. Article 110294. DOI: 10.1016/j.engstruct.2020.110294
14. Wang Z., Yuan X., Dong S. Simple approach for force finding analysis of circular Geiger domes with consideration of self-weight // *Journal of Constructional Steel Research*. 2010. V. 66. I. 2. P. 317–322. DOI: 10.1016/j.jcsr.2009.09.010
15. Li X., Xue S. Prestress design and geometric correction method of cable–truss structures based on equivalent equilibrium force model // *Thin-Walled Structures*. 2023. V. 191. Article 111058. DOI: 10.1016/j.tws.2023.111058
16. Трубец А.Г. Пространственные металлические конструкции. Москва : Стройиздат, 1983. 215 с.
17. Sadaoui A., Lattari K., Khennane A. A novel analytical method for the analysis of a bi-concave cable-truss footbridge // *Engineering Structures*. 2016. V. 123. P. 97–107. DOI: 10.1016/j.engstruct.2016.05.025
18. Kmet S., Kokorudova Z. Non-linear closed-form computational model of cable trusses // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2009. V. 44. I. 7. P. 735–744. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2009.03.004
19. Москалев Н.С. Конструкции висячих покрытий. Москва : Стройиздат, 1980. 336 с.
20. Chesnokov A.V., Mikhailov V.V. Analysis of cable structures by means of trigonometric series // *Structural membranes 2017 : материалы Международной конференции, 9–11 октября 2017 г. Мюнхен, Германия, 2017. С. 455–466. URL: <http://congress.cimne.com/membranes2017/frontal/Doc/Ebook2017.pdf> (дата обращения: 13.02.2024).*
21. Tolstov G.P. Fourier Series. New York : Dover Publications, 2012. 352 p.
22. Kassimali A., Parsi-Feraidoonian H. Strength of cable trusses under combined loads // *Journal of Structural Engineering*. 1987. № 113. I. 5. P. 907–924.
23. MAV.Structure. Расчет конструкций методом конечных элементов. URL: <http://www.bridgearth.ru/cad/59-cad/519-mavstructure.html> (дата обращения: 13.02.2024).

REFERENCES

1. Eremeev P.G. Suspended structures. *Stroitel'nye materialy*. 2022; 10: 62–67. DOI: 10.31659/0585-430X-2022-807-10-62-67 (In Russian)
2. Eremeev P.G. Hybrid cable structural system “Tensegrity”. *Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitel'stvo*. 2021; 1: 21–27. DOI: 10.33622/0869-7019.2021.01.21-27 (In Russian)
3. Yu Z., Jiamin G., Zhiyu J., Weigang C., Guangen Z. Control method for determining feasible pre-stresses of cable-struts structure. *Thin-Walled Structures*. 2022; 174: 109159. DOI: 10.1016/j.tws.2022.109159
4. Yuan P., He B., Nie R., Zhang L., Yu H., Wang W., Ma X. Member importance prediction and failure response analysis for cable network antennas. *Engineering Structures*. 2022; 266: 114642. DOI: 10.1016/j.engstruct.2022.114642
5. Talvik I. Finite element modelling of cable networks with flexible supports. *Computers and Structures*. 2001; 79 (26–28): 2443–2450.

6. Zhang A., Shangguan G., Zhang Y., Zou M., Luo C. Structural behavior of a fully assembled cable-piercing ridge-tube cable dome with modular assembly ring truss. *Journal of Constructional Steel Research*. 2023; 211: 108193. DOI: 10.1016/j.jcsr.2023.108193
7. Drozdov V.V., Pshenichkina V.A., Strok S.I. Structural analysis of unique high-rise and long-span buildings with respect to physical and geometric nonlinearity. Volgograd, 2020. 100 p. (In Russian)
8. Gasparini D., Gautam V. Geometrically nonlinear static behavior of cable structures. *Journal of Structural Engineering*. 2002; 128 (10): 1317–1329.
9. Ma S., Yuan X.F., Deng M., Yang L. Minimal mass design of a new cable truss in two states. *Mechanics Research Communications*. 2022; 125: 103995. DOI: 10.1016/j.mechrescom.2022.103995
10. Costa R.S., Lavall A.C.C., Lanna da Silva R.G., Porcino dos Santos A., Viana H.F. Cable structures: An exact geometric analysis using catenary curve and considering the material nonlinearity and temperature effect. *Engineering Structures*. 2022; 253: 113738. DOI: 10.1016/j.engstruct.2021.113738
11. Xue Y., Luo Y., Wang Y., Xu X., Wan H.P., Shen Y., Fu W. A new configuration of Geiger-type cable domes with sliding ridge cables: computational framework and structural feasibility investigation. *Engineering Structures*. 2023; 286: 116028. DOI: 10.1016/j.engstruct.2023.116028.
12. Feng Y., Yuan X.F., Samy A. Analysis of new wave-curved tensegrity dome. *Engineering Structures*. 2022; 250: 113408. DOI: 10.1016/j.engstruct.2021.113408
13. Krishnan S. Structural design and behavior of prestressed cable domes. *Engineering Structures*. 2020; 209: 110294. DOI: 10.1016/j.engstruct.2020.110294
14. Wang Z., Yuan X., Dong S. Simple approach for force finding analysis of circular Geiger domes with consideration of self-weight. *Journal of Constructional Steel Research*. 2010; 66 (2): 317–322. DOI: 10.1016/j.jcsr.2009.09.010
15. Li X., Xue S. Prestress design and geometric correction method of cable–truss structures based on equivalent equilibrium force model. *Thin-Walled Structures*. 2023; 191: 111058. DOI: 10.1016/j.tws.2023.111058
16. Trushchev A.G. Spatial metal structures. Moscow: Stroiizdat, 1983. 215 p. (In Russian)
17. Sadaoui A., Lattari K., Khennane A. A novel analytical method for the analysis of a bi-concave cable-truss footbridge. *Engineering Structures*. 2016; 123: 97–107. DOI: 10.1016/j.engstruct.2016.05.025
18. Kmet S., Kokorudova Z. Non-linear closed-form computational model of cable trusses. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2009; 44 (7): 735–744. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2009.03.004
19. Moskalev N.S. Suspended roof structures. Moscow: Stroiizdat, 1980. 336 p. (In Russian)
20. Chesnokov A.V., Mikhailov V.V. Analysis of cable structures by means of trigonometric series. In: *Proc. Int. Conf. 'Structural Membranes 2017'*, Munchen, Germany, 9-11 October 2017. P. 455–466. Available: <http://congress.cimne.com/membranes2017/frontal/Doc/Ebook2017.pdf> (accessed February 13, 2024).
21. Tolstov G.P. Fourier Series. New York: Dover Publications, 2012. 352 p.
22. Kassimali A., Parsi-Feraidoonian H. Strength of cable trusses under combined loads. *Journal of Structural Engineering*. 1987; 113 (5): 907–924.
23. MAV.Structure. Finite element analysis of structures. Available: www.bridgeart.ru/cad/59-cad/519-mavstructure.html (accessed February 13, 2024). (In Russian)

Сведения об авторах

Чесноков Андрей Владимирович, канд. техн. наук, доцент, Липецкий государственный технический университет, 398055, г. Липецк, ул. Московская, 30, andreychess742@mail.ru

Михайлов Виталий Витальевич, докт. техн. наук, профессор, Липецкий государственный технический университет, 398055, г. Липецк, ул. Московская, 30, mmvv46@rambler.ru

Authors Details

Andrei V. Chesnokov, PhD, A/Professor, Lipetsk State Technical University, 30, Moskovskaya Str., 398055, Lipetsk, Russia, andreychess742@mail.ru

Vitalii V. Mikhailov, DSc, Professor, Lipetsk State Technical University, 30, Moskovskaya Str., 398055, Lipetsk, Russia, mmvv46@rambler.ru

Вклад авторов

Все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.
Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Authors contributions

The authors contributed equally to this article.
The authors declare no conflicts of interests.

Статья поступила в редакцию 15.02.2024
Одобрена после рецензирования 25.02.2024
Принята к публикации 05.03.2024

Submitted for publication 15.02.2024
Approved after review 25.02.2024
Accepted for publication 05.03.2024