

Вестник Томского государственного  
архитектурно-строительного университета.  
2023. Т. 25. № 6. С. 113–124.

ISSN 1607-1859 (для печатной версии)  
ISSN 2310-0044 (для электронной версии)

Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo  
arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta –  
Journal of Construction and Architecture.  
2023; 25 (6): 113–124.

Print ISSN 1607-1859  
Online ISSN 2310-0044

## НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

УДК 624.016

DOI: 10.31675/1607-1859-2023-25-6-113-124

EDN: WOJCIZ

# НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО СТРУКТУРНО-НЕОДНОРОДНОГО СТЕРЖНЯ

**Андрей Викторович Мищенко**

*Новосибирский государственный*

*архитектурно-строительный университет (Сибстрин),*

*г. Новосибирск, Россия*

*Новосибирское высшее военное командное ордена Жукова училище,*

*г. Новосибирск, Россия*

**Аннотация.** *Актуальность.* Неоднородные конструкции обладают рядом существенных преимуществ перед классическими однородными. Регулирование их напряженно-деформированного состояния дает возможность более эффективно адаптировать систему к заданным термосиловым воздействиям и в результате получить дополнительные эффекты экономии массы и стоимости конструкции. Практическое использование неоднородных элементов конструкций в настоящее время требует создания инженерных методов расчета, обладающих приемлемой трудоемкостью, необходимой точностью и универсальностью.

*Целью* настоящей работы является совершенствование способов построения комплекса необходимых физических соотношений в задачах термосилового пространственного деформирования неоднородных стержней.

*Методы исследования.* Для расчетной модели стержня Тимошенко применены аппроксимации функций поперечных сдвигов и мембранная аналогия для деформаций сдвига при кручении. Пространственный призматический стержень прямоугольного сечения образован из квазиоднородных частей (фаз), выполненных из различных конструкционных материалов.

*Результаты.* Получены расчетные соотношения для термосилового пространственного изгиба с растяжением, поперечного сдвига и кручения. Данные уравнения содержат жесткостные характеристики нулевого, первого и второго порядков при изгибе с растяжением, сдвиговые и крутильную жесткости сечения. Их применение позволяет компактно сформулировать физические зависимости и краевую задачу пространственного деформирования неоднородного стержня.

**Ключевые слова:** структурно-неоднородный стержень, пространственный изгиб, жесткостные характеристики неоднородного сечения, кручение неоднородного стержня, мембранная аналогия

**Для цитирования:** Мищенко А.В. Напряженно-деформированное состояние пространственного структурно-неоднородного стержня // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. 2023. Т. 25. № 6. С. 113–124. DOI: 10.31675/1607-1859-2023-25-6-113-124. EDN: WOJCIZ

## ORIGINAL ARTICLE

**STRESS-STRAIN STATE OF ROD WITH HETEROGENEOUS STRUCTURE****Andrey V. Mishchenko***Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering,  
Novosibirsk, Russia**Order of Zhukov Novosibirsk Higher Military Command School,  
Novosibirsk, Russia*

**Abstract.** Heterogeneous structures have a number of significant advantages over classical homogeneous. Their stress-strain state control allows to more effectively adapt the system to given thermal conditions and, as a result, additionally save weight and cost of the structure. The practical use of elements with heterogeneous structure, requires the creation of engineering calculation approaches with acceptable labor intensity, accuracy and versatility.

**Purpose:** The improvement of design methods implying physical relations in problems of thermal power deformation of rods with heterogeneous structure.

**Design/methodology:** The Timoshenko rod model design involves the approximation of transverse shear functions and membrane analogy of shear deformation in torsion. A three-dimensional prismatic rod having a rectangular cross-section, is obtained from quasi-homogeneous parts (phases) made of various structural materials.

**Research findings:** Theoretical calculations are obtained for thermal power spatial bending with tension, transverse shear and torsion. These equations contain stiffness characteristics of zero, first- and second-order tensile bending, shear and torsional stiffnesses of the section.

**Practical implication:** These equations can be used to compactly formulate physical relations and the boundary value problem of spatial deformation of rods with heterogeneous structure.

**Keywords:** rod with heterogeneous structure, spatial bending, rigidity, non-uniform section, torsion, membrane analogy

**For citation:** Mishchenko A.V. Stress-strain state of rod with heterogeneous structure. Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta – Journal of Construction and Architecture. 2023; 25 (6): 113–124. DOI: 10.31675/1607-1859-2023-25-6-113-124. EDN: WOJCIZ

**Введение**

Неоднородные конструкции, запроектированные с использованием принципов рационального проектирования, обладают рядом неоспоримых преимуществ перед однородными [1, 2, 3, 4]. Основными из них являются: а) способность более эффективно адаптироваться к заданным физическим полям [5]; б) возможность регулирования напряженно-деформированного состояния; в) получение экономии массы и стоимости материалов конструкции. В силу сложности объекта исследования – пространственно деформируемого неоднородного стержня, испытывающего силовое и тепловое воздействия, в литературе обычно рассматриваются различные частные случаи расчетных схем: плоские задачи [1, 6, 7, 8], простые виды воздействия на отдельные элементы конструкций [9, 10] либо, при усложнении воздействий, – стержни простой геометрической формы с частными случаями неоднородности [9]. Спецификой неоднородных конструкций является их чувствительность к тепловым воздействиям [5, 11, 12]. В ряде работ уточненные методы расчета

строятся без привлечения гипотез теории стержней. Так, в работе [13] для построения инженерной теории сопротивления неоднородных стержней применено разложение решения исходной задачи в ряд по производным деформаций сопутствующей задачи однородного стержня. В нулевом приближении предложенный метод дает классическое решение. В работах [14, 15] для исследования пространственных задач применен метод асимптотического расщепления. Данные подходы [13, 14, 15], а также численные [7, 16, 17, 18] и экспериментальные [8, 19] исследования весьма ценны для оценки различных приближенных методов.

При практическом использовании неоднородных конструкций в настоящее время требуется создание инженерных методов расчета, обладающих приемлемой трудоемкостью и универсальностью, позволяющих выполнять оценку напряженно-деформированного состояния при комбинированном пространственном воздействии. В настоящей работе рассматривается постановка задачи и способ построения основных расчетных соотношений для задачи термосилового пространственного деформирования неоднородного стержня. При этом в решении задачи кручения и краевой задачи общего деформирования стержня дополнительно использованы ограничения симметрии расчетной схемы относительно продольных координатных плоскостей.

### Материалы и методы исследования

На рис. 1 в системе координат  $xuz$  показан прямой стержень, испытывающий пространственный изгиб в сочетании с растяжением (сжатием), кручением и тепловым стационарным воздействием.

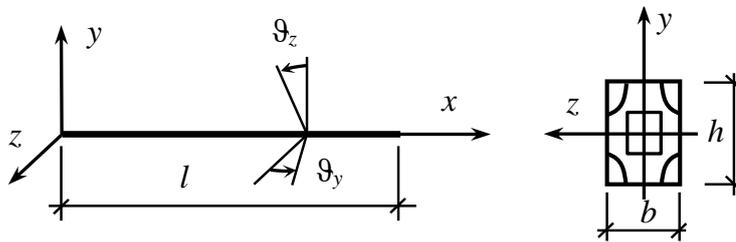


Рис. 1. Расчетная схема стержня  
Fig. 1. Schematic view of the rod

Стержень составлен из  $s$  квазиоднородных частей (фаз), выполненных из различных конструкционных материалов: металлов, бетона, конструкционных пластмасс, древесины, искусственных дисперсных композитов и т. п. с обеспечением идеального межфазного контакта при отсутствии разрывов в деформациях на границах фаз. Материал  $k$ -й фазы характеризуется стационарными в рассматриваемом диапазоне температур физическими характеристиками: модулями упругости  $E_k$ ,  $G_k$ , коэффициентами температурного расширения  $\alpha_k$ . На основе решения задачи стационарной теплопроводности в неоднородной структуре выявлено поле температур  $t_k(x, y, z)$  ( $k = 1, \dots, s$ ). Стержень имеет призматическую форму, прямоугольное поперечное сечение и симметричную относительно плоскостей  $xu$ ,  $xz$  структуру.

Считая стержень тонким, примем при описании его деформированного состояния гипотезы Тимошенко с дополнительным учетом деформации сечений при кручении. Построение основных соотношений рассмотрим отдельно для случаев пространственного изгиба, поперечного сдвига и кручения.

**1. Пространственный термосиловой изгиб с растяжением (сжатием).** Функции перемещений  $u$ ,  $v$ ,  $w$  в направлении осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , деформаций  $\varepsilon$  и сдвигов  $\gamma$  примем согласно выражениям:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0 - \theta_z y + \theta_y z, & v(x, y, z) &= v_0, & w(x, y, z) &= w_0, \\ \varepsilon_x(x, y, z) &= \varepsilon_0 - \kappa_z y + \kappa_y z, & \varepsilon_y(x, y, z) &= \varepsilon_z(x, y, z) = 0, \\ \kappa_y(x) &= \frac{d\theta_y}{dx}, & \kappa_z(x) &= \frac{d\theta_z}{dx}, \\ \gamma_{xy}(x, y, z) &= \frac{dv_0}{dx} - \theta_z = \gamma_{y0}(x), \\ \gamma_{xz}(x, y, z) &= \frac{dw_0}{dx} + \theta_y = \gamma_{z0}(x), & \gamma_{yz} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $u_0(x)$ ,  $v_0(x)$ ,  $w_0(x)$  – перемещения точек геометрической оси;  $\theta_y(x)$ ,  $\theta_z(x)$  – углы поворота сечений относительно осей  $y$ ,  $z$ .

Интегральные силовые факторы в сечении  $s$ -фазного стержня заданы формулой

$$[N, M_z, M_y](x) = \sum_{k=1}^s \iint_{A_k} [\sigma_x^{(k)}, -y\sigma_x^{(k)}, z\sigma_x^{(k)}] dA, \quad (2)$$

где  $A_k$  – площадь  $k$ -й фазы в нормальном сечении.

Подставив в (2) выражение закона Дюамеля – Нэймана

$$\sigma_x^{(k)} = E_k [\varepsilon_x - \alpha_k t_k], \quad (3)$$

при учете (1) для деформации  $\varepsilon_x$ , получим физические соотношения, связывающие интегральные силовые факторы с обобщенными деформациями при термоупругом изгибе с растяжением

$$\begin{cases} D_0 \varepsilon_0 - D_z \kappa_z + D_y \kappa_y = N - N_t, \\ -D_z \varepsilon_0 + D_{zz} \kappa_z - D_{yz} \kappa_y = M_z - M_{zt}, \\ D_y \varepsilon_0 - D_{yz} \kappa_z + D_{yy} \kappa_y = M_y - M_{yt}. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь интегральные температурные силовые факторы

$$N_t = -\sum_{k=1}^s E_k \alpha_k \iint_{A_k} t_k dA, \quad M_{zt} = \sum_{k=1}^s E_k \alpha_k \iint_{A_k} t_k y dA, \quad M_{yt} = -\sum_{k=1}^s E_k \alpha_k \iint_{A_k} t_k z dA \quad (5)$$

представляют собой усилия в неоднородном сечении, возникающие при наличии температурного поля  $t(y, z)$  и отсутствии деформаций ( $\varepsilon_0 = \kappa_z = \kappa_y = 0$ ).

Коэффициенты при обобщенных деформациях в (4) образуют матрицу жесткости с компонентами

$$D_0 = \sum_{k=1}^s E_k \iint_{A_k} dA, \quad [D_z, D_y] = \sum_{k=1}^s E_k \iint_{A_k} [y, z] dA, \quad (6)$$

$$[D_{zz}, D_{zy}, D_{yy}] = \sum_{k=1}^s E_k \iint_{A_k} [y^2, yz, z^2] dA$$

нулевого ( $D_0$ ), первого ( $D_z, D_y$ ) и второго ( $D_{zz}, D_{zy}, D_{yy}$ ) геометрических порядков. В работе [13] жесткости  $D_z, D_y$  названы жесткостями взаимного влияния: а) осевой деформации  $\varepsilon_0$  на изгибающие моменты и б) кривизны  $\kappa_z, \kappa_y$  на продольную силу.

Разделив в системе (4) первое уравнение на  $D_0$ , второе на  $D_{zz}$ , а третье на  $D_{yy}$ , получим

$$\begin{cases} \varepsilon_0 - y_0 \kappa_z + z_0 \kappa_y = \frac{N - N_t}{D_0}, \\ -\frac{y_0}{i_z^2} \varepsilon_0 + \kappa_z - \frac{i_{yz}^2}{i_z^2} \kappa_y = \frac{M_z - M_{zt}}{D_{zz}}, \\ \frac{z_0}{i_y^2} \varepsilon_0 - \frac{i_{yz}^2}{i_y^2} \kappa_z + \kappa_y = \frac{M_y - M_{yt}}{D_{yy}}, \end{cases} \quad (7)$$

$$y_0 = \frac{D_z}{D_0}, \quad z_0 = \frac{D_y}{D_0}, \quad i_z = \sqrt{\frac{D_{zz}}{D_0}}, \quad i_y = \sqrt{\frac{D_{yy}}{D_0}}, \quad i_{yz} = \sqrt{\frac{D_{zy}}{D_0}}. \quad (8)$$

Выражения (8) определяют жесткостные параметры неоднородного сечения:  $y_0, z_0$  – координаты центра жесткости сечения; осевые  $i_z, i_y$  и центробежный  $i_{yz}$  – радиусы жесткости сечения.

Нормальные напряжения (3) с использованием (1), (7) для неоднородного сечения общего вида представим в форме

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(k)} = \frac{E_k}{D} & \left\{ \frac{N - N_t}{D_0} \left[ 1 - \frac{i_{yz}^4}{i_z^2 i_y^2} + \left( \frac{i_{yz}^2}{i_y^2} z_0 - y_0 \right) \frac{y}{i_z^2} + \left( \frac{i_{yz}^2}{i_z^2} y_0 - z_0 \right) \frac{z}{i_y^2} \right] - \right. \\ & - \frac{M_z - M_{zt}}{D_{zz}} \left[ \frac{i_{yz}^2}{i_y^2} z_0 - y_0 + \left( 1 - \frac{z_0^2}{i_y^2} \right) y + \left( y_0 z_0 - i_{yz}^2 \right) \frac{z}{i_y^2} \right] + \\ & \left. + \frac{M_y - M_{yt}}{D_{yy}} \left[ \frac{i_{yz}^2}{i_z^2} y_0 - z_0 + \left( y_0 z_0 - i_{yz}^2 \right) \frac{y}{i_z^2} + \left( 1 - \frac{y_0^2}{i_z^2} \right) z \right] \right\} - E_k \alpha_k t_k, \quad (9) \\ D = & 1 - \frac{i_{yz}^4}{i_z^2 i_y^2} + \left( \frac{i_{yz}^2}{i_y^2} z_0 - y_0 \right) \frac{y_0}{i_z^2} + \left( \frac{i_{yz}^2}{i_z^2} y_0 - z_0 \right) \frac{z_0}{i_y^2}. \end{aligned}$$

В случае симметричного сечения, принятого в настоящей статье, либо при выполнении перехода к главным центральным осям жесткости, обеспечивающим для жесткостей взаимного влияния выполнение условий  $D_y = D_z = D_{yz} = 0$ , а значит, согласно (8),  $y_0 = z_0 = i_{yz} = 0$ ,  $D = 1$ , матрица жесткости системы (4) принимает диагональный вид, система (7) распадается на три независимых уравнения, что позволяет впоследствии решать крайевые задачи для двух плоских изгибов и растяжения отдельно. В этом случае нормальные напряжения (9), действующие в  $k$ -й фазе при силовом и тепловом воздействиях, могут быть найдены по формуле

$$\sigma_x^{(k)} = E_k \left( \frac{N - N_t}{D_0} - \frac{M_z - M_{zt}}{D_{zz}} y + \frac{M_y - M_{yt}}{D_{yy}} z - \alpha_k t_k \right), \quad (10)$$

что согласуется с формулами, полученными в [6].

Примечательным является факт инвариантности значения определителя матрицы жесткости при параллельном переносе осей  $y, z$  системы координат. При использовании системы (4) и (7) соответственно имеем

$$\det \begin{vmatrix} D_0 & -D_z & D_y \\ -D_z & D_{zz} & -D_{yz} \\ D_y & -D_{yz} & D_{yy} \end{vmatrix} \equiv D_0 D_{yy} D_{zz}, \quad \det \begin{vmatrix} 1 & -y_0 & z_0 \\ -\frac{y_0}{i_z^2} & 1 & -\frac{i_{yz}^2}{i_z^2} \\ \frac{z_0}{i_y^2} & -\frac{i_{yz}^2}{i_z^2} & 1 \end{vmatrix} \equiv 1.$$

**2. Пространственный поперечный сдвиг.** Примем для стержня Тимошенко аппроксимации сдвигов в виде

$$\begin{aligned} \gamma_{xy}(x, y, z) &= a_y(x) f_y(y), \\ \gamma_{xz}(x, y, z) &= a_z(x) f_z(z) \end{aligned} \quad (10)$$

с амплитудами  $a_y, a_z$  и заданными функциями распределения  $f_y, f_z$ , удовлетворяющими граничным условиям на поверхностях

$$\begin{aligned} f_y(y) &= 0, \quad y = \pm h/2, \\ f_z(z) &= 0, \quad z = \pm b/2. \end{aligned}$$

Схожая аппроксимация применена для пластин в [2]. Используя закон Гука и условия равновесия

$$[Q_y, Q_z](x) = \sum_{k=1}^s \iint_{A_k} [\tau_{yx}^{(k)}, \tau_{zx}^{(k)}] dA, \quad (11)$$

получим формулы для касательных напряжений в  $k$ -й фазе

$$\tau_{xy}^{(k)}(z, y, z) = \frac{Q_y G_k f_y(y)}{\sum_{j=1}^s G_j \iint_{A_j} f_y dA}, \quad \tau_{xz}^{(k)}(z, y, z) = \frac{Q_z G_k f_z(z)}{\sum_{j=1}^s G_j \iint_{A_j} f_z dA}. \quad (12)$$

Учитывая (10), (11), (12), жесткости неоднородного сечения при сдвигах, входящие в физические соотношения

$$D_{Q_y} \gamma_{y0} = Q_y, \quad D_{Q_z} \gamma_{z0} = Q_z, \quad (13)$$

можно записать в виде

$$D_{Q_y} = \frac{1}{k_y} \sum_{k=1}^s G_k \iint_{A_k} f_y dA, \quad D_{Q_z} = \frac{1}{k_z} \sum_{k=1}^s G_k \iint_{A_k} f_z dA, \quad (14)$$

$$k_y = \frac{\gamma_{y0}}{a_y}, \quad k_z = \frac{\gamma_{z0}}{a_z}.$$

Параметры  $k_y, k_z$  представляют собой коэффициенты осреднения функций деформаций сдвига (10) при введении обобщенных сдвигов  $\gamma_{y0}, \gamma_{z0}$  в кинематических соотношениях (1). В частности, значению  $k_y = 1$  соответствует принятие в качестве  $\gamma_{y0}$  максимального сдвига. При интегральном

осреднении следует положить  $k_y = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} f_y dy, \gamma_{y0} = k_y a_y$ . Принятие, например, параболической функции  $f_y = 1 - (2y/h)^2$  дает значение  $k_y = 2/3$ .

Для стержней с простой геометрической формой фаз, например слоистых, касательные напряжения  $\tau_{xy}, \tau_{xz}$  могут быть найдены более строго – из условий равновесия сдвигаемых частей сечения:

$$\tau_{yx}^{(k)}(z, y, z) = \frac{Q_y D_z^{\text{sec}}}{D_{zz}} \frac{G_k}{\sum_{j \in j_y} G_j(z) b_j(y)}, \quad \tau_{xz}^{(k)}(z, y, z) = \frac{Q_z D_y^{\text{sec}}}{D_{yy}} \frac{G_k}{\sum_{j \in j_z} G_j(y) h_j(z)},$$

$$D_z^{\text{sec}}(y) = \int_y^{h/2} \int_{-b/2}^{b/2} E(y, z) y dy dz, \quad D_y^{\text{sec}}(z) = \int_z^{b/2} \int_{-h/2}^{h/2} E(y, z) z dy dz.$$

Здесь, по сравнению с формулами, приведенными в [6] для плоской задачи, введены вторые множители, содержащие модули сдвига и отражающие зависимость от второй координаты в сечении. При вычислении напряжения  $\tau_{yx}^{(k)}$  суммирование в формуле выполняется по фазам, пересекаемым горизонтальным уровнем  $y$  с номерами  $j \in j_y$ . Аналогично в формуле для  $\tau_{xz}^{(k)}$  это осуществляется для фаз, пересекаемых уровнем  $z$  с номерами  $j \in j_z$ .

**3. Кручение стержня.** Перемещения при кручении получим как результат жесткого поворота сечения и его деформации [20]:

$$u(x, y, z) = \kappa_x \psi(y, z), \quad \kappa_x(x) = \frac{d\theta_x}{dx}, \quad (15)$$

$$v(x, z) = -\theta_x z, \quad w(x, y) = \theta_x y.$$

Здесь  $\theta_x$  – угол поворота сечения относительно оси  $x$ ;  $\kappa_x$  – кручение оси стержня;  $\psi$  – функция деформации Сен-Венана. При учете (15) компоненты сдвиговой деформации и касательные напряжения принимают вид

$$\gamma_{xy}(x, y, z) = \kappa_x \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} - z \right), \quad \gamma_{xz}(x, y, z) = \kappa_x \left( \frac{\partial \Psi}{\partial z} + y \right), \quad \gamma_{yz} = 0,$$

$$\tau_{xy}^{(k)} = G_k \kappa_x \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} - z \right), \quad \tau_{xz}^{(k)} = G_k \kappa_x \left( \frac{\partial \Psi}{\partial z} + y \right).$$

Далее напряжения при кручении будем определять с помощью функции напряжений Прандтля  $\varphi$  [20]. Взяв за основу выражения напряжений в однородном стержне

$$\tau_{xy} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad \tau_{xz} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

представим их для неоднородного стержня в виде

$$\tau_{xy}^{(k)} = G_k \kappa_x \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial z}, \quad \tau_{xz}^{(k)} = -G_k \kappa_x \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y}. \quad (16)$$

Здесь  $\bar{\varphi}$  – единая для всех фаз сечения аппроксимация функции деформаций при кручении. Примем для нее, согласно мембранной аналогии, функцию прогибов гибкой мембраны  $w$ , закрепленной на контуре сечения ( $w \rightarrow \bar{\varphi}$ ). Аппроксимируем прогибы мембраны выражением

$$\bar{\varphi} = bh[\text{ch}(\alpha_{0z}) - \text{ch}(\alpha_{0z}\xi_z)][\text{ch}(\alpha_{0y}) - \text{ch}(\alpha_{0y}\xi_y)], \quad (17)$$

$$\xi_y = 2y/h, \quad \xi_z = 2z/b,$$

удовлетворяющим требуемому условию  $\bar{\varphi} = 0$  на границе  $\xi_y = \xi_z = \pm 1$ . Заданные масштабные параметры  $\alpha_{0z}$ ,  $\alpha_{0y}$  определяют интервалы гиперболических функций в (17), используемые для аппроксимации на прямоугольной области сечения. В отличие от тригонометрической аппроксимации, форма (17) дает физически правильный знак вторых производных напряжений  $\partial^2 \tau_{xz} / \partial z^2$ ,  $\partial^2 \tau_{xy} / \partial y^2$ .

Подставив напряжения (16), записанные с учетом функции (17), в условие равновесия для крутящего момента

$$M_t(x) = \sum_{k=1}^s \iint_{A_k} (\tau_{xz}^{(k)} y - \tau_{xy}^{(k)} z) dA,$$

получим формулы для касательных напряжений при кручении

$$\tau_{xz}^{(k)} = \frac{2G_k M_t}{D_t} b \alpha_{0y} \text{sh}(\alpha_{0y} \xi_y) [\text{ch}(\alpha_{0z}) - \text{ch}(\alpha_{0z} \xi_z)],$$

$$\tau_{xy}^{(k)} = -\frac{2G_k M_t}{D_t} h \alpha_{0z} \text{sh}(\alpha_{0z} \xi_z) [\text{ch}(\alpha_{0y}) - \text{ch}(\alpha_{0y} \xi_y)]$$

и жесткость неоднородного сечения при кручении

$$D_t = 2 \sum_{k=1}^s G_k \iint_{A_k} \{ b \alpha_{0y} \text{sh}(\alpha_{0y} \xi_y) [\text{ch}(\alpha_{0z}) - \text{ch}(\alpha_{0z} \xi_z)] y - h \alpha_{0z} \text{sh}(\alpha_{0z} \xi_z) [\text{ch}(\alpha_{0y}) - \text{ch}(\alpha_{0y} \xi_y)] z \} dA, \quad (18)$$

входящей в физическое обобщенное равенство при кручении

$$D_t \kappa_x = M_x. \quad (19)$$

**4. Формулировка краевой задачи.** Как известно, физическая структура стержня не оказывает влияния на вид формируемых для него условий равновесия и кинематических соотношений. Представим систему дифференциальных уравнений в перемещениях для рассмотренных видов деформирования при учете жесткостных характеристик (6), (14), (18), физических соотношений (13), (19) и записанных с учетом симметрии (4):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( D_0 \frac{du}{dx} \right) &= q_x - \frac{dN_t}{dx}, \\ \frac{d^2}{dx^2} \left[ D_{zz} \left( \frac{d^2 v}{dx^2} - \frac{d\gamma_{y0}}{dx} \right) \right] &= q_y - \frac{d^2 M_{yt}}{dx^2}, \\ \frac{d^2}{dx^2} \left[ D_{yy} \left( \frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{d\gamma_{z0}}{dx} \right) \right] &= q_z - \frac{d^2 M_{zt}}{dx^2}, \\ \frac{d}{dx} \left( D_x \frac{d\theta_x}{dx} \right) &= m_x. \end{aligned}$$

Система дополняется двенадцатью кинематическими и статическими условиями, соответствующими способу закрепления концов стержня. Последние записываются с использованием физических зависимостей (4), (13), (19).

### Выводы

Таким образом, полученные соотношения позволяют выполнять приближенные постановки и решения разнообразных краевых прямых и обратных задач, в числе которых: выявление напряженно-деформированного состояния композитного стержня при термосиловом воздействии, оценка его прочности и жесткости, выявление рациональных геометрических и структурных параметров неоднородной структуры стержня, оптимизационные задачи.

### СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Мищенко А.В. Расчетная модель нелинейного динамического деформирования составных многофазных стержней // Вестник МГСУ. 2014. № 5. С. 35–44. DOI: 10.22227/1997-0935.2014.5
2. Андреев А.Н., Немировский Ю.В. Многослойные анизотропные оболочки и пластины: изгиб, устойчивость, колебания. Новосибирск : Наука, 2001. 288 с. EDN: RTXGKT
3. Chen W., Hao J., Tang M. Analytical analysis of dynamic stress distribution of fiber reinforced polymer rod based on realistic boundary shear stress // Composites Part B: Engineering. 2017. V. 131. P. 209–220. URL: <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2017.07.043>
4. Li C., Yin X., Wang Y., Zhang L., Zhang Z., Liu Y., Xian G. Mechanical property evolution and service life prediction of pultruded carbon/glass hybrid rod exposed in harsh oil-well condition // Composite Structures. 2020. V. 246. Art. 112418. URL: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.112418>
5. Мищенко А.В. Моделирование двумерных температурных полей в структурно-неоднородных стержнях с разрывными геометрическими параметрами // Известия вузов. Строительство. 2018. № 1. С. 5–15. DOI 10.32683/0556-1052-2018-709-1-5-15

6. *Мищенко А.В.* Напряжения в слоистых стержнях переменного сечения // Механика композиционных материалов и конструкций. 2007. Т. 13. № 4. С. 537–547. URL: <https://mkmk.ras.ru/volume/2007/%e2%84%964-2007/>
7. *Bedon C., Louter C.* Numerical investigation on structural glass beams with GFRP-embedded rods, including effects of pre-stress // *Composite Structures*. 2018. V. 184. P. 650–661. URL: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.10.027>
8. *O'Neill C., McPolin D., Taylor S.E., Martin T., Harte A.M.* Glued-in basalt FRP rods under combined axial force and bending moment: An experimental study // *Composite Structures*. 2018. V. 186. P. 267–273. URL: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.12.029>
9. *Деревянных Е.А., Миронов Б.Г.* К вопросу о кручении неоднородных призматических стержней // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2014. № 3 (21). С. 105–111. URL: <http://limit21.ru/upload/arhiv/21.pdf>
10. *Winczek J.* A simplified method of predicting stresses in surfaced steel rods // *Journal of Materials Processing Technology*. 2012. V. 212. I. 5. 2012. P. 1080–1088. URL: <https://doi.org/10.1016/j.jmatprotec.2011.12.016>
11. *Turusov R.A.* Elastic and thermal behavior of a layered structure. Part II. Calculation results and their analysis // *Mech. Compos Mater*. 2015. V. 51. P. 127–134. URL: <https://doi.org/10.1007/s11029-015-9484-9>
12. *Andreev V.I., Turusov R.A.* Thermal strength of adhesion bond // *Applied Mechanics and Materials*. 2014. V. 670-671. P. 153–157. URL: <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.670-671.153>
13. *Горбачев В.И.* Инженерная теория сопротивления неоднородных стержней из композиционных материалов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия : Естественные науки. 2016. № 6. С. 56–72. DOI: 10.18698/1812-3368-2016-6-56-72
14. *Горьнин Г.Л., Немировский Ю.В.* Продольно-поперечный изгиб слоистых балок в трехмерной постановке // ПМТФ. 2004. Т. 45. № 6. С. 133–143. URL: <https://www.sibran.ru/journals/issue.php?ID=120017>
15. *Yankovskii A.P.* Refinement of the asymptotic expansions when solving the spatial problem of the bending and twisting of composite bars // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2015. V. 79. № 5. P. 475–492. URL: <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2016.03.009>
16. *Azinović B., Danielsson H., Serrano E., Kramar M.* Glued-in rods in cross laminated timber – Numerical simulations and parametric studies // *Construction and Building Materials*. 2019. V. 212. P. 431–441. URL: <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2019.03.331>
17. *Jawdhari A, Harik I.* Finite element analysis of RC beams strengthened in flexure with CFRP rod panels // *Construction and Building Materials*. 2018. V. 163. P. 751–766. URL: <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2017.12.139>
18. *Grunwald C., Kaufmann M., Alter B., Vallée T., Tannert T.* Numerical investigations and capacity prediction of G-FRP rods glued into timber // *Composite Structures*. 2018. V. 202. P. 47–59. URL: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.10.010>
19. *Wu Q, Xiao S., Iwashita K.* Experimental study on the interfacial shear stress of RC beams strengthened with prestressed BFRP rod // *Results in Physics*. 2018. V. 10. P. 427–433. URL: <https://doi.org/10.1016/j.rinp.2018.06.007>
20. *Timoshenko S.P., Goodier J.N.* Theory of Elasticity. 3 edition. New York : McGraw-Hill College, 1970. 608 p. ISBN-13: 978-0070647206, ISBN-10: 0070647208.

## REFERENCES

1. *Mishchenko A.V.* Calculation model of nonlinear dynamic deformation of composite multi-phase rods. *Vestnik MGSU*. 2014; (5): 35–44. DOI: 10.22227/1997-0935.2014.5 (In Russian)
2. *Andreev A.N., Nemirovsky Yu.V.* Multilayer anisotropic shells and plates: Bending, stability, vibrations. Novosibirsk: Nauka, 2001. 288 p. EDN: RTXGKT (In Russian)
3. *Chen W., Hao J., Tang M.* Analytical analysis of dynamic stress distribution of fiber reinforced polymer rod based on realistic boundary shear stress. *Composites Part B: Engineering*. 2017; 131: 209–220. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.07.07.043.2017>

4. Li C., Yin X., Wang Y., Zhang L., Zhang Z., Liu Y., Xian G. Mechanical property evolution and service life prediction of pultruded carbon/glass hybrid rod exposed in harsh oil-well condition. *Composite Structures*. 2020; 246: 112418. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct>
5. Mishchenko A.V. Modeling of two-dimensional temperature fields in rods with structural inhomogeneity and discontinuous geometrical parameters. *Izvestiya vuzov. Stroitel'stvo*. 2018; (1): 5–15. DOI 10.32683/0556-1052-2018-709-1-5-15 (In Russian)
6. Mishchenko A.V. Stresses in layered rods with variable cross section. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktii*. 2007; 13(4): 537-547. (In Russian)
7. Bedon C., Louter C. Numerical investigation on structural glass beams with GFRP-embedded rods, including effects of pre-stress. *Composite Structures*. 2018; 184: 650–661. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.10.10.027>
8. O'Neill C., McPolin D., Taylor S.E., Martin T., Harte A.M. Glued-in basalt FRP rods under combined axial force and bending moment: An experimental study. *Composite Structures*. 2018; 186: 267–273. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.12.12.029>
9. Derevyannykh E.A., Mironov B.G. Torsion of heterogeneous prismatic rods. *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I.Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya*. 2014; 3 (21): 105–111. (In Russian)
10. Winczek J.A. Simplified method of predicting stresses in surfaced steel rods. *Journal of Materials Processing Technology*. 2012; 212 (5): 1080–1088. <https://doi.org/10.1016/j.jmatprotec.2011.12.016>
11. Turusov R.A. Elastic and thermal behavior of a layered structure. Part II. Calculation results and their analysis. *Mechanics of Composite Materials*. 2015; 51: 127–134 <https://doi.org/10.1007/s11029-015-9484-9>
12. Andreev V.I., Turusov R.A. Thermal strength of adhesion bond. *Applied Mechanics and Materials*. 2014; 670-671: 153–157 <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.670-671.153>
13. Gorbachev V.I. Engineering theory of inhomogeneous rods resistance from composite materials. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seriya: Estestvennye nauki*. 2016; (6): 56–72. DOI: 10.18698/1812-3368-2016-6-56-72 2016 (In Russian)
14. Gorynin G.L., Nemirowsky Yu.V. Longitudinal-transverse bending of laminated beams in three-dimensional setting. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika*. 2004; 45 (6): 133–143. (In Russian)
15. Yankovskii A.P. Refinement of the asymptotic expansions, solving the spatial problem of the bending and twisting of composite bars. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2015; 79 (5): 475–492 <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2016.03.03.009>
16. Azinović B., Danielsson H., Serrano E., Kramar M. Glued-in rods in cross laminated timber - Numerical simulations and parametric studies. *Construction and Building Materials*. 2019; 212: 431–441. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2019.03.331>
17. Jawdhari A., Harik I. Finite element analysis of RC beams strengthened in flexure with CFRP rod panels. *Construction and Building Materials*. 2018; 163: 751–766 <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2017.12.139>
18. Grunwald C., Kaufmann M., Alter B., Vallée T., Tannert T. Numerical investigations and capacity prediction of G-FRP rods glued into timber. *Composite Structures*. 2018; 202: 47–59 <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.10.10.010>
19. Wu Q., Xiao S., Iwashita K. Experimental study on the interfacial shear stress of RC beams strengthened with pre-stressed BFRP rod. *Results in Physics*. 2018; 10: 427–433 <https://doi.org/10.1016/j.rinp.2018.06.007>
20. Timoshenko S.P., Goodier J.N. *Theory of Elasticity*. 3rd ed. New York: McGraw-Hill College, 1970. 608 p. ISBN-13: 978-0070647206, ISBN-10: 0070647208.

#### Сведения об авторе

Мищенко Андрей Викторович, докт. техн. наук, доцент, Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет (Сибстрин), 630008, Новосибирск, ул. Ленинградская, 113; Новосибирское высшее военное командное ордена Жукова училище, 630117, Новосибирск, ул. Иванова, 49, mavr59@ngs.ru

**Author details**

*Andrey V. Mishchenko*, DSc, A/Professor, Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering, 113, Leningradskaya Str., 630008, Novosibirsk, Russia; Order of Zhukov Novosibirsk Higher Military Command School, 49, Ivanov Str., 630117, Novosibirsk, Russia, mavr59@ngs.ru

Статья поступила в редакцию 21.09.2023  
Одобрена после рецензирования 03.10.2023  
Принята к публикации 21.11.2023

Submitted for publication 21.09.2023  
Approved after review 03.10.2023  
Accepted for publication 21.11.2023