Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. 2024. Т. 26. № 3. С. 158−169.

ISSN 1607-1859 (для печатной версии)
ISSN 2310-0044 (для электронной версии)

Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta – Journal of Construction and Architecture. 2024; 26 (3): 158−169.
Print ISSN 1607-1859
Online ISSN 2310-0044

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ
УДК 531.31;539.3
DOI: 10.31675/1607-1859-2024-26-3-158-169 EDN: FGMWEZ

ПОСТОЯННЫЕ УПРУГОСТИ АНИЗОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ АНИЗОТРОПИЕЙ

Анай-Хаак Бугалдаевна Калдар-оол, Руслан Николаевич Сандан, Алдын-Херел Хеймерович Монгуш
Тувинский государственный университет, г. Кызыл, Россия

Аннотация. Исследуются новые анизотропные материалы с цилиндрической анизотропией, включая армированные различными волокнами намоточные композиционные материалы. Для создания математических моделей, объясняющих изменение модуля упругости, применено алгебраическое решение дифференциального уравнения четвертого порядка в частных производных с двумя переменными в полярных координатах.

Актуальность изучения анизотропных материалов обусловлена их уникальными свойствами, которые могут быть оптимизированы для конкретного применения.

Цель исследования заключается в изучении свойств анизотропии композиционных материалов с цилиндрической анизотропией.

Научная новизна. В результате вычисления получены соотношения между постоянными упругости в главных направлениях анизотропии – параметры упругости. В определении свойств композиционных материалов с плоской схемой анизотропии постоянные упругости для цилиндрически анизотропных тел в главных направлениях анизотропии являются инновационным шагом, который позволяет достаточно просто и эффективно определять параметры упругости и прочность материалов при произвольном направлении координатных осей. Одно из полученных соотношений между постоянными упругости в главных направлениях анизотропии выведено впервые, а второе вытекает из решения задачи анизотропии криволинейного ортотропного тела С.Г. Лехницким.

Методы исследования. Уравнения переведены в декартовы координаты и использованы функции напряжений в виде суммы полиномов.

Результаты исследований могут найти применение при совершенствовании высокопрочных композиционных материалов, при разработке новых технологий проектирования и изготовления строительных конструкций, высокопрочных конструкций из синтетических композиционных материалов.

Ключевые слова: анизотропия, композиционные материалы, математическая модель, цилиндрически анизотропное тело, модуль упругости, главные напряжения

Для цитирования: Калдар-оол А.-Х.Б., Сандан Р.Н., Монгуш А.-Х.Х. Постоянные упругости анизотропного материала с цилиндрической анизотропией // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. 2024. Т. 26. № 3. С. 158−169. DOI: 10.31675/1607-1859-2024-26-3-158-169. EDN: FGMWEZ

© Калдар-оол А.-Х.Б., Сандан Р.Н., Монгуш А.-Х.Х., 2024

ORIGINAL ARTICLE

ELASTIC CONSTANTS OF CYLINDRICALLY ANISOTROPIC MATERIAL

Anai-Khaak B. Kaldar-ool, Ruslan N. Sandan, Aldyn-Kherel H. Mongush
Tuvan State University, Kyzyl, Russia

Abstract. This article examines new cylindrically anisotropic materials, including winding composite materials reinforced with various fiber, and a mathematical solution of the fourth-order partial differential equation with two variables in polar coordinates.

Purpose: Ther aim of this work is to study anisotropy properties of composite materials with cylindrical anisotropy.

Methodology/approach: Foe a solution, equations are translated into Cartesian coordinates, and stress functions are used as a sum of polynomials. As a result of the solution, two relations are obtained between the elastic constants in the main direction of anisotropy, i.e., elasticity parameters. These parameters are important to determine the mechanical properties of anisotropic material.

Research findings: New high-strength composite materials are improved to apply in new technologies for building design and construction, high-strength structures are obtained using synthetic composite materials.

Originality/value: Elastic constants for cylindrically anisotropic materials represent an innovative approach to determine the properties of composite materials with a flat anisotropy scheme, which make it easier and more efficient to determine elasticity parameters and strength in an arbitrary direction of coordinate axes.

Keywords: anisotropy, composite materials, mathematical model, cylindrically anisotropic material, modulus of elasticity, main stress

For citation: Kaldar-ool A.-Kh.B., Sandan R.N., Mongush A.-Kh.Kh. Elastic constants of cylindrically anisotropic material. Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta – Journal of Construction and Architecture. 2024; 26 (3): 158−169. DOI: 10.31675/1607-1859-2024-26-3-158-169. EDN: FGMWEZ

К анизотропным материалам с цилиндрической анизотропией можно отнести намоточные композиционные материалы, армированные волокнами углерода, бора, базальта, металлическими нитями, стекловолокнами, и древесину, как природный композиционный материал [1, 2].

В природе композиционные материалы формируются естественным путем, наиболее прочные волокна, придающие высокую прочность, ориентированы согласно основным принципам бионики по направлению с главными напряжениями и деформациями.

Изучение природных композиционных материалов позволяет материаловедам создавать новые с заранее заданными свойствами.

Широкое распространение получают изделия, изготовленные из стеклопластиков, в том числе намоточных, напоминающих природный композит – древесину – с ее годичными слоями. Часто древесину, костные волокна животных и человека принимают за прототип при создании новых современных высокопрочных материалов [3].

По строению такие материалы являются анизотропными, т. е. меняющими физические и механические свойства по объему и направлениям в зависимости от желаемых характеристик.

Понимание и контроль анизотропии в материалах позволяют создавать новые материалы с улучшенными характеристиками и функциональностью. Например, анизотропные материалы могут обладать улучшенной прочностью, жёсткостью, теплопроводностью или электропроводностью в определенных направлениях, что делает их ценными для различного технологического применения и в инженерии.

Исследованием анизотропии упругости и прочности анизотропных материалов занимались многие отечественные ученые: Е.К. Ашкенази, Ю.С. Соболев, А.Н. Митинский, С.Г. Лехницкий, А.А. Поздняков, А.И. Кузнецов, А.Л. Рабинович и др., а также зарубежные: H. Kubler, D.V. Rosato, A. Jlinen, C.S. Grove, R. Keylwerth и др.

Анализ литературных источников показал, что в главных направлениях анизотропии до недавнего времени отсутствовала выявленная математическая взаимосвязь между постоянными упругости [4, 5], как в изотропии тел. Е.К. Ашкенази, Ю.С. Соболев и некоторые другие авторы отмечают, что это является одной из главных причин получения противоречивых результатов экспериментальных и теоретических исследований. Это послужило толчком для проведения новых исследований упругости и прочности анизотропных материалов, в особенности композиционных синтетического и природного происхождения.

В последние 15–20 лет были получены новые интересные данные для анизотропных материалов, хотя в исследованиях и практических задачах до сих пор нередко используются результаты 50–70-летней давности.

В настоящей статье приводятся результаты [6, 7] теоретических исследований анизотропии упругости намоточных композиционных материалов, основанные на известных законах математики и механики, проводится их сопоставление с результатами более ранних исследований С.Г. Лехницкого, Е.К. Ашкенази, Ю.С. Соболева и др.

Целью исследования является изучение свойств анизотропии композиционных материалов с цилиндрической анизотропией и их влияния на физико-механические характеристики.

Для достижения поставленной цели решаются следующие задачи*:*

1. Определение модуля упругости и показателя анизотропии в зависимости от главных направлений анизотропии.

2. Определение параметров упругости композиционных материалов, обеспечивающих постоянные упругие свойства материала конструкции.

3. Решение задачи изгиба криволинейного ортотропного бруса с цилиндрической анизотропией.

За основу в теоретических исследованиях было принято известное в теории упругости анизотропного тела [4, 5] однородное дифференциальное уравнение в полярных координатах четвертого порядка в частных производных для ортотропного тела [5, 8, 9, 10]:

$$\frac{1}{E_t}\frac{\partial^4 F}{\partial r^4}+\left(\frac{1}{G_{rt}}-2\frac{\mu_{rt}}{E_r}\right)\frac{1}{r^2}\frac{\partial^4 F}{\partial r^2\partial\theta^2}+\frac{1}{E_r}\frac{1}{r^4}\frac{\partial^4 F}{\partial\theta^4}+\frac{2}{E_t}\frac{1}{r}\frac{\partial^3 F}{\partial r^3}-\left(\frac{1}{G_{rt}}-2\frac{\mu_{rt}}{E_r}\right)\times$$
$$\times\frac{1}{r^3}\frac{\partial^2 F}{\partial r\partial\theta^2}-\frac{1}{E_r}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}+\left(2\frac{1-\mu_{rt}}{E_r}+\frac{1}{G_{rt}}\right)\frac{1}{r^4}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}+\frac{1}{E_r}\frac{1}{r^3}\frac{\partial F}{\partial r}=0, \qquad (1)$$

где E_r, E_t – модули упругости при растяжении (сжатии) в главных направлениях; μ_{rt}, G_{rt} – коэффициент Пуассона и модуль упругости при сдвиге.

Для решения задачи уравнение (1) было переведено в декартовы координаты.

При решении уравнения (1) в плоской задаче для круглой пластинки с цилиндрической анизотропией функция напряжений была принята в виде суммы полиномов [11]:

$$F = \sum_{i=1}^{n} x^k \cdot f_k(y), \tag{2}$$

где $f_k(y)$ – неизвестные функции, удовлетворяющие дифференциальному уравнению (1).

В результате решения уравнения (1) с подстановкой соответствующих производных от функции напряжений (2) после преобразований было получено алгебраическое уравнение (3) 2-го порядка, корни которого соответственно равны:

$$B^2 - \frac{2}{3}\left(5 + k^2\right)B - \frac{5}{3}k^4 + \frac{14}{3}k^2 + 1 = 0; \tag{3}$$

$$B_{(1)} = 3 - k^2; \tag{4}$$

$$B_{(2)} = \frac{1 + 5k^2}{3}, \tag{5}$$

где $k^2 = E_t/E_r$.

Один из корней (4) встречается в монографии С.Г. Лехницкого [9] в решении задачи изгиба кривого криволинейно-анизотропного бруса (ортотропного бруса с цилиндрической анизотропией), где в формуле (24.7) на с. 98 [9, 12]:

$$\frac{E_t}{E_r}(1 - 2\mu_{rt}) + \frac{E_t}{G_{rt}} = 3, \tag{6}$$

тогда $\beta = 2$ и распределение напряжений будет в точности таким же, как в изотропном брусе.

Если для β подкоренное выражение $\beta = \sqrt{1 + \frac{E_t}{E_r}(1 - 2\mu_{rt}) + \frac{E_t}{G_{rt}}}$ преобразовать, то получим из решения [9] тот же корень из формулы (4), т. е.: $\frac{E_t}{E_r} - 2\mu_{rt}\frac{E_t}{E_r} + \frac{E_t}{G_{rt}} = 3$ или при $\frac{E_t}{E_r} = k^2$ получим $k^2 - 2\mu_{rt} \cdot k^2 = 3 - k^2$, что и было нами получено ранее (см. формулу выше) $B_{(1)} = 3 - k^2$ (4) в теоретических исследованиях [1, 12].

Или эта же формула [12]:

$$\beta = \sqrt{1 + k^2 + \frac{1 + 5k^2}{3}} = \frac{2\sqrt{1 + 2k^2}}{\sqrt{3}},$$

при $k^2 = 1$ получим то же: $\beta = \frac{2\sqrt{1 + 2k^2}}{\sqrt{3}}$ [12].

Для первой группы материалов, удовлетворяющих условию (4), изменение модуля упругости от 0 до 90° (от радиального к тангенциальному направлению) происходит через промежуточную экстремальную точку при наклоне слоев под углом 30° к линии действия силы [6].

Для второй группы промежуточная точка экстремума отсутствует, и модуль упругости от 0 до 90° изменяется плавно.

К такому выводу можно прийти, анализируя полученные формулы для постоянных упругости:

$$\frac{1}{E_{x'}} = \frac{\cos^4\theta}{E_r} + \frac{\sin^4\theta}{E_t} + \frac{3-k^2}{E_t}\cos^2\theta\sin^2\theta;$$

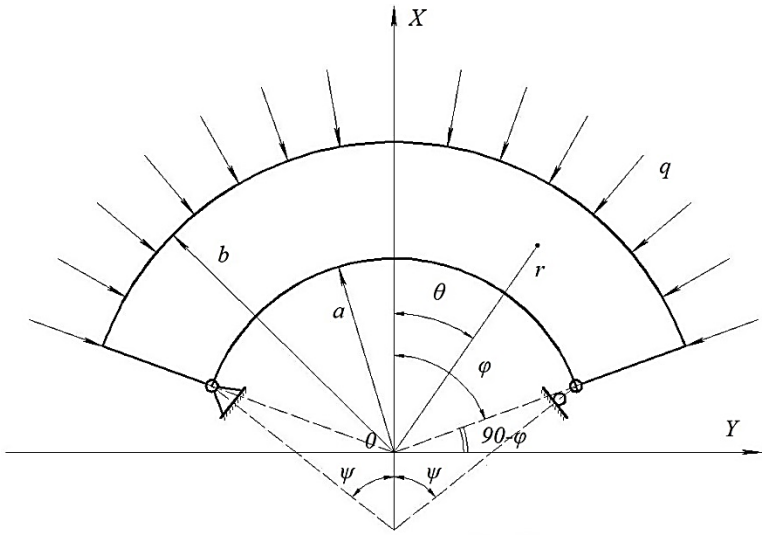
$$\frac{1}{E_{y'}} = \frac{\sin^4\theta}{E_r} + \frac{\cos^4\theta}{E_t} + \frac{3-k^2}{E_t}\sin^2\theta\cos^2\theta;$$

$$\frac{1}{G_{x'y'}} = \frac{8(k^2-1)}{E_t}\sin^2\theta\cos^2\theta + \frac{1}{G_{rt}};$$

$$\mu_{x'y'} = -E_{x'}\left[\frac{2(k^2-1)}{E_r}\sin^2\theta\cos^2\theta + \frac{\mu_{rt}}{E_t}\right].$$

При этом коэффициент β в соответствии с нашим решением независимо от $k^2 = E_t/E_r$, как и в работах [9, 12], будет равен 2, т. е. будет в точности таким же, каким в изотропном брусе (рисунок), и это не противоречит выводу С.Г. Лехницкого:

$$\beta = \sqrt{1 + \frac{a_{11} + 2a_{12} + 2a_{66}}{a_{22}}} = \sqrt{1 + \frac{E_t}{E_r}(1 - 2\mu_{rt}) + \frac{E_t}{G_{rt}}}.$$



Криволинейный ортотропный анизотропный брус с цилиндрической анизотропией
Curvilinear orthotropic anisotropic beam with cylindrical anisotropy

Тогда напряжения в криволинейном ортотропном цилиндрически анизотропном стержне могут быть вычислены по формулам в обозначениях С.Г. Лехницкого [9, 12]:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{q}{b}\left[P+Q\left(\frac{r}{r_t}\right)^{k-1}+R\left(\frac{r_t}{r}\right)^{k+1}\right]+\\
&+\frac{q}{r_t\cdot b\cdot g_1}\frac{r_t}{r}\left[\left(\frac{r}{r_t}\right)^{\beta}+c^{\beta}\left(\frac{r_t}{r}\right)^{\beta}-\left(1+c^{\beta}\right)\right]\frac{\cos(\varphi-\psi)}{\cos\psi}\cos\theta;\\
\sigma_\theta &= \frac{q}{b}\left[P+Q\cdot k\left(\frac{r}{r_t}\right)^{k-1}+R\cdot k\left(\frac{r_t}{r}\right)^{k+1}\right]+\\
&+\frac{q}{r_t\cdot b\cdot g_1}\frac{r_t}{r}\left[(1+\beta_1)\left(\frac{r}{r_t}\right)^{\beta}+(1+\beta_1)c^{\beta}\left(\frac{r_t}{r}\right)^{\beta}-\left(1+c^{\beta}\right)\right]\frac{\cos(\varphi-\psi)}{\cos\psi}\cos\theta;\\
\tau_{r\theta} &= \frac{q}{r_t\cdot b\cdot g_1}\frac{r_t}{r}\left[\left(\frac{r}{r_t}\right)^{\beta}+c^{\beta}\left(\frac{r_t}{r}\right)^{\beta}-\left(1+c^{\beta}\right)\right]\frac{\cos(\varphi-\psi)}{\cos\psi}\cos\theta;
\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

$$\left.\begin{aligned}
P &= \frac{1}{2(k^2-1)(1-c^{2k})g}\Big[2k(k-1)\left(1-c^{k+1}\right)+2k(k+1)c^{k+1}\left(1-c^{k-1}\right)-\\
&\quad-(k^2-1)(1+c)(1-c^{2k})m\Big];\\
Q &= \frac{1}{2(k-1)(1-c^{2k})g}\times\\
&\quad\times\Big[-(k-1)\left(1-c^2\right)-2k\cdot c^2\left(1-c^{k-1}\right)+(k-1)(1+c)(1-c^{k+1})m\Big];\\
R &= \frac{1}{2(k+1)(1-c^{2k})g}\times\\
&\quad\times\Big[(k+1)c^{2k}\left(1-c^2\right)-2k\cdot c^{k+1}\left(1-c^{k+1}\right)-(k+1)(1+c)c^{2k}(1-c^{1-k})m\Big],
\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

где $$c=\frac{a}{b};\qquad m=\frac{\sin\varphi\sin(\varphi-\psi)}{\cos\psi};$$

$$g=\frac{(1-c^2)}{2}-\frac{k}{k+1}\frac{(1-c^{k+1})^2}{1-c^2}+\frac{k\cdot c^2}{k-1}\frac{(1-c^{k-1})^2}{1-c^{2k}};\qquad k=\sqrt{\frac{E_t}{E_r}};$$

$$g_1=\frac{2}{\beta}(1-c^{\beta})+(1+c^{\beta})\ln c\,.$$

При расчетах 2-й группы анизотропных материалов по формулам (7) и (8) нужно иметь в виду, что коэффициент β зависит от k^2, в отличие от первого случая: это следует из формулы С.Г. Лехницкого ((24.7), с. 98 [9]) и второго корня алгебраического уравнения (3):

$$B_{(2)} = \frac{1+5k^2}{3}, \text{ т. е.}$$

$$\beta = \sqrt{1+\frac{E_t}{E_r}(1-2\mu_{rt})+\frac{E_t}{G_{rt}}} = \sqrt{1+k^2+\frac{1+5k^2}{3}} = \frac{2\sqrt{1+2k^2}}{\sqrt{3}}.$$

Формулы для расчета постоянных упругости при втором корне будут иметь вид [13]:

$$\frac{1}{E_{x'}} = \frac{\cos^4\theta}{E_r} + \frac{\sin^4\theta}{E_t} + \frac{1+5k^2}{3E_t}\sin^2\theta\cos^2\theta;$$

$$\frac{1}{E_{y'}} = \frac{\sin^4\theta}{E_r} + \frac{\cos^4\theta}{E_t} + \frac{1+5k^2}{3}\sin^2\theta\cos^2\theta;$$

$$\frac{1}{G_{x'y'}} = \frac{8(1-k^2)}{3E_t}\sin^2\theta\cos^2\theta + \frac{1}{G_{rt}};$$

$$\mu_{x'y'} = -E_{x'}\left[\frac{2(1-k^2)}{3E_r}\sin^2\theta\cos^2\theta - \frac{\mu_{rt}}{E_t}\right].$$

Соотношения постоянных упругости в круглых скобках (условно назовем параметром упругости) зависят от степени точности определения каждой из постоянных. Причем сама по себе величина коэффициента Пуассона мала, а при ее определении при наклоне слоев композита под углом 45° возможна неточность, как признают авторы методик Е.К. Ашкенази, А.Н. Митинский, Ю.С. Соболев.

Найденные значения параметров анизотропии позволяют устранить этот недостаток и облегчить решение дифференциального уравнения (1).

Поэтому расчет напряжений для ортотропных анизотропных тел с цилиндрической анизотропией, выполняемый по формулам (7) и (8) в одном случае с использованием коэффициента $\beta = 2$, в другом случае $\beta = \frac{2\sqrt{1+2k^2}}{\sqrt{3}}$, зависит от отношения модулей упругости $E_t/E_r = k^2$ конкретного анизотропного материала.

В таком случае потребуется предварительно определить, к какой группе относится анизотропный материал.

Среди многих вопросов при исследовании физических и механических свойств анизотропных материалов, в том числе и композиционных природного и синтетического происхождения, наибольший интерес представляют экстремальные свойства и положение главных плоскостей анизотропии.

Аналитическая зависимость модуля упругости известна из теории упругости:

$$\frac{1}{E_{x'}} = \frac{\cos^4\theta}{E_x} + \frac{\sin^4\theta}{E_y} + \left(\frac{4}{E_{xy}^{(45)}} - \frac{1}{E_x} - \frac{1}{E_y}\right)\sin^2\theta\cos^2\theta \qquad (9)$$

или при введении следующих обозначений:

$$E_x = E_0; \quad E_y = E_{90}; \quad E_{xy}^{(45)} = E_{45}; \quad E_{x'} = E_\alpha;$$

$$G_{xy} = G_0; \quad G_{xy}^{(45)} = G_{45}; \quad G_{x'y'} = G_\alpha; \quad \mu_{xy} = \mu_0; \quad \mu_{yx} = \mu_{90};$$

$$C = \frac{E_0}{E_{90}}; \quad b = \frac{E_0}{E_{45}} - \frac{1+C}{4}.$$

Вместо формулы (9) Е.К. Ашкенази было получено:

$$\frac{E_\alpha}{E_0} = \frac{1}{\cos^4\theta + b\sin^2 2\theta + C\sin^2\theta}.$$

Эту формулу можно применить для любой плоскости упругой симметрии.

Формула А. Митинского [14] для ортотропного тела обозначается:

$$G_{xy} = \frac{E_{xy}^{(45)}}{2\left(1+\mu_{xy}^{(45)}\right)}.$$

Последняя формула аналогична формуле для изотропных материалов:

$$G_{x'y'}^{(45)} = G_{(45)} = \frac{E_0 E_{90}}{E_0\left(1+\mu_{90}\right) + E_{90}\left(1+\mu_0\right)}.$$

Путем приравнивая к нулю первой производной $\frac{dE_\alpha}{d\alpha}$ Е.К. Ашкенази было получено [4]:

$$\left[\cos^2\alpha - C\sin^2\alpha - 2b\left(1-2\sin^2\alpha\right)\right]\sin\alpha\cos\alpha = 0.$$

Первые два экстремума находят, приравнивая к нулю множитель за скобками, и получают $\alpha_1 = 0°$; $\alpha_2 = 90°$.

Третье экстремальное значение модуля упругости будет иметь место [8] при угле

$$a_3 = \arcsin\sqrt{\frac{1-2b}{1+C-4b}}$$

или с учетом подстановки формулы (2.31) из [4]:

$$a_3 = \arcsin\sqrt{\frac{1-2\frac{E_0}{E_{45}} + \frac{1-\frac{E_0}{E_{90}}}{2}}{1+\frac{E_0}{E_{90}} - 4\frac{E_0}{E_{45}} + \left(1+\frac{E_0}{E_{90}}\right)}}.$$

Для равноармированного материала (при $C = 1$), например для фанеры, значение $\alpha_3 = 45°$.

Третье экстремальное значение будет получено только в случае выполнения неравенства [15]:

$$1 \geq \frac{1-2b}{1+C-4b} \geq 0 .$$

При несоблюдении этого условия модуль упругости будет иметь только два экстремума, как, например, у намоточных стеклопластиков и натуральной древесины в плоскости наибольшей жесткости (в направлении волокон).

Модуль упругости $E_{x'}$ ортотропно-анизотропного материала в произвольном направлении определяется выражением (2.28) из работы [4].

При произвольном направлении оси X' с учетом известного соотношения между направляющими косинусами:

$$n_1^2 + l_1^2 + m_1^2 = 1 .$$

Е.К. Ашкенази получила значения направляющих косинусов:

1) при $n_1 = 0$

$$m_1 = \pm \sqrt{\frac{\frac{3}{E_y} - \frac{4}{E_{yz}^{(45)}} + \frac{1}{E_z}}{\frac{4}{E_y} + \frac{4}{E_z} - \frac{8}{E_{yz}^{(45)}}}} ; \qquad l_1 = \pm\sqrt{1-m_1^2} ;$$

2) при $m_1 = 0$

$$n_1 = \pm \sqrt{\frac{\frac{3}{E_y} - \frac{4}{E_x} + \frac{1}{E_{xy}^{(45)}}}{\frac{4}{E_y} + \frac{4}{E_x} - \frac{8}{E_{xy}^{(45)}}}} ; \qquad l_1 = \pm\sqrt{1-n_1^2} ;$$

3) при $l_1 = 0$

$$n_1 = \pm \sqrt{\frac{\frac{4}{E_z} - 2A}{\frac{4}{E_x} + \frac{4}{E_z} - 4A}} ; \qquad m_1 = \pm\sqrt{1-n_1^2} ,$$

где $A = \frac{4}{E_{xz}^{(45)}} - \frac{1}{E_x} - \frac{1}{E_z}$.

В частных случаях: $m_1 = 0$; $l_1 = 0$; $n_1 = \pm 1$; $l_1 = 0$; $n_1 = 0$; $m_1 = \pm n_1 = 0$; $m_1 = 0$; $l_1 = \pm 1$ [4].

С этим решением в точности совпадает и решение [16].

Одно из них получено впервые, а второе вытекает из решения задачи анизотропии криволинейного ортотропного тела С.Г. Лехницкого, и полученное решение ему не противоречит.

При анализе напряженно-деформированного состояния, с учетом полученных соотношений между постоянными упругости, становится возможным получить достоверную информацию для ортотропных материалов с цилиндрической анизотропией.

Таким образом, результаты исследования представляют собой важный вклад в понимание влияния анизотропии на физико-механические свойства композиционных материалов с цилиндрической анизотропией и могут быть использованы в инженерной практике для разработки новых материалов с оптимальными характеристиками.

Список источников

1. *Глухих В.Н.* Анизотропия упругости волокнистых композиционных материалов. Санкт-Петербург : Изд-во Политехн. ун-та, 2018. 94 с.
2. *Новейшие достижения* в обработке отверстий в композиционных материалах // Композитный мир. 2015. № 1 (58). С. 42−46. EDN: MWPXRG
3. *Акопян А.Л., Глухих В.Н., Прилуцкий А.А.* К вопросу использования некоторых особенностей природных материалов при разработке композитов для строительных конструкций // Фундаментальные исследования. 2016. № 3-2. С. 235−239. EDN: TMYVOF
4. *Ашкенази Е.К.* Анизотропия древесины и древесных материалов. Москва : Лесная промышленность, 1978. 221 с.
5. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. Москва : Гостехиздат, 1977. 415 с.
6. *Glukhikh V.* Problem of the anisotropy of elasticity and strength in anisotropic fiber materials // Architecture and Engineering. 2021. V. 6. №. 2. P. 31−36. DOI: 10.23968/2500-0055-2021-6-2-31-36. EDN: AXEODS
7. *Kaldar-Ool A.-Kh., Glukhikh V., Opbul E., Saaya S.* Stress condition of brick barrel vaults in view of anisotropic properties // Magazine of Civil Engineering. 2021. №. 5 (105). P. 10509. DOI: 10.34910/MCE.105.9. EDN: YQLQCO
8. *Глухих В.Н., Красильникова С.С.* Анализ модуля упругости анизотропного материала на примере древесины // Вестник гражданских инженеров. 2017. № 3 (62). С. 21−26. DOI: 10.23968/1999-5571-2017-14-3-21-26. EDN: YYZGZZ
9. *Лехницкий С.Г.* Анизотропные пластинки. Москва : Гостехиздат, 1957. 463 с.
10. *Kaldar-Ool A.-Kh., Opbul E.* Stress condition of orthotropic vault structure with cylindrical anisotropy // Magazine of Civil Engineering. 2022. №. 8 (116). P. 11605. DOI: 10.34910/MCE.116.5. EDN: GVMVOM
11. *Курдюмов Н.* Решение в полиномах плоской задачи теории упругости // ПММ. 1946. Т. XI.
12. *Калдар-оол А.-Х.Б.* Совершенствование методов расчета напряженного состояния коробовых сводов в зданиях-памятниках архитектуры – объектах культурного наследия : специальность 05.23.01 : диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук / Калдар-оол Анай-Хаак Бугалдаевна. Санкт-Петербург, 2020. 192 с.
13. *Глухих В.Н., Калдар-оол А.-Х.Б.* Анизотропия кирпичных коробовых сводов // Вестник гражданских инженеров. 2019. № 6 (77). С. 130−136. DOI: 10.23968/1999-5571-2019-16-6-130-136. EDN: SZVJRH
14. *Митинский А.Н.* Упругие постоянные древесины как ортотропного материала // Труды ЛТА. 1948. № 63. С. 23–54.
15. *Ашкенази Е.К., Ганов Э.В.* Анизотропия конструкционных материалов : справочник. Москва : Лесная промышленность, 1981. 320 с.
16. *Глухих В.Н., Петров В.М., Сойту Н.Ю.* Определение постоянных упругости с учётом анизотропии свойств композиционных материалов, используемых для намотки ответственных оболочек и стержневых конструкций в судостроении и портовой инфраструктуре // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова. 2016. Вып. 2 (36). С. 137–143.

REFERENCES

1. *Glukhikh V.N.* Anisotropic elasticity of fibrous composite materials. Staint-Petersburg, 2018. 94 p. (In Russian)
2. The latest achievements in hole processing in composite materials. *Kompozitnyi mir*. 2015; 1 (58). Pp. 42−46. (In Russian)
3. *Akopyan A.L., Glukhikh V.N., Prilutskiy A.A.* The use of natural materials in composite development in building industry. *Fundamental'nye issledovaniya*. 2016; 3, 235−239. (In Russian)
4. *Ashkenazi E.K.* Anisotropy of wood and wood materials. Moscow: Lesnaya Promyshlennost, 1978. 221 p. (In Russian)
5. *Lekhnitskiy S.G.* Theory of elasticity of anisotropic body. Moscow: Gostekhizdat, 1977. 415 p. (In Russian)
6. *Glukhikh V.* Problem of the anisotropy of elasticity and strength in anisotropic fiber materials. *Architecture and Engineering*. 2021; 6 (2): 31−36. DOI: 10.23968/2500-0055-2021-6-2-31-36
7. *Kaldar-Ool A.-Kh., Glukhikh V., Opbul E., Saaya S.* Stress condition of brick barrel vaults in view of anisotropic properties. *Magazine of Civil Engineering*. 2021; 5 (105): 10509. DOI: 10.34910/MCE.105.9
8. *Glukhikh V.N., Krasilnikova S.S.* Elasticity modulus of anisotropic wood. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov*. 2017; 3 (62): 21−26. DOI: 10.23968/1999-5571-2017-14-3-21-26. (In Russian)
9. *Lekhnitskiy S.G.* Anisotropic plates. Moscow: Gostekhizdat, 1957. 463 p. (In Russian)
10. *Kaldar-Ool A-Kh., Opbul E.* Stress condition of orthotropic vault structure with cylindrical anisotropy. *Magazine of Civil Engineering*. 2022; 8 (116): 11605. DOI: 10.34910/MCE.116.5
11. *Kurdyumov N.* Polynomial solution of plane elasticity problem. *Prikladnaya matematika i mekhanik*. 1946; 11. (In Russian)
12. *Kaldar-ool A.-K.B.* Calculatio improvement of stress-starin state of barrel vaults in architectural monuments of cultural heritage. PhD Thesis. Saint-Petersburg, 2020. 192 p. (In Russian)
13. *Glukhikh V.N., Kaldar-ool A.K.B.* Anisotropy of brick barrel vaults. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov*. 2019; 6 (77): 130−136. DOI: 10.23968/1999-5571-2019-16-6-130-136 (In Russian)
14. *Mitinsky A.N.* Elastic constants of orthotropic wood. *Trudy LTA*. 1948; (63): 23–54. (In Russian)
15. *Ashkenazi Ye.K., Ganov V.V.* Anisotropy of construction materials. Reference book. Moscow: Lesnaya Promyshlennost, 1981. 320 p. (In Russian)
16. *Glukhikh V.N., Petrov V.M., Soytu N.Yu.* Elastic constants of anisotropic composite materials for winding of shells and beams in shipbuilding and sea port infrastructure. *Vestnik gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S.O. Makarova*. 2016; 2 (36): 137–143. (In Russian)

Сведения об авторах

Калдар-оол Анай-Хаак Бугалдаевна, канд. техн. наук, Тувинский государственный университет, 667000, Республика Тыва, г. Кызыл, ул. Ленина, 36, oorzhaka-h@mail.ru

Сандан Руслан Николаевич, канд. техн. наук, Тувинский государственный университет, 667000, Республика Тыва, г. Кызыл, ул. Ленина, 36, ruzzzlan@mail.ru

Монгуш Алдын-Херел Хеймерович, магистрант, Тувинский государственный университет, 667000, Республика Тыва, г. Кызыл, ул. Ленина, 36, mongush.aldyn97@mail.ru

Authors Details

Anai-Khaak B. Kaldar-ool, PhD, Tuvan State University, 36, Lenin Str., 667000, Kyzyl, Russia, oorzhaka-h@mail.ru

Ruslan N. Sandan, PhD, Tuvan State University, 36, Lenin Str., 667000, Kyzyl, Russia, ruzzzlan@mail.ru

Aldyn-Kherel H. Mongush, Graduate Student, Tuvan State University, 36, Lenin Str., 667000, Kyzyl, Russia, mongush.aldyn97@mail.ru

Вклад авторов

Все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.
Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Authors contributions

The authors contributed equally to this article.
The authors declare no conflicts of interests.

Статья поступила в редакцию 28.06.2023
Одобрена после рецензирования 24.04.2024
Принята к публикации 26.04.2024

Submitted for publication 28.06.2023
Approved after review 24.04.2024
Accepted for publication 26.04.2024