

СТРОИТЕЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ, ЗДАНИЯ И СООРУЖЕНИЯ

УДК 624.041

*ПЕРЕЛЬМУТЕР АНАТОЛИЙ ВИКТОРОВИЧ, докт. техн. наук,
иностраннный член РААСН,
aperel@i.com.ua; anatolyperelmutter@gmail.com
Научно-производственное объединение SCAD Soft,
03037, г. Киев, ул. Просвещения, 3а*

ЗАДАЧИ СИНТЕЗА В ТЕОРИИ СООРУЖЕНИЙ (КРАТКИЙ ИСТОРИЧЕСКИЙ ОБЗОР)

История развития оптимального проектирования насчитывает уже почти четыре столетия. За это время менялись подходы к задачам оптимизации, возникали все новые методы их решения, уточнялись целевые установки и ограничения решаемых задач. Сам процесс развития проблемы оказывается весьма поучительным, поскольку выявляет некоторые общие тенденции научно-технического творчества в целом.

Предлагаемый обзор ни в коем случае не претендует на полноту. Кроме того в нем практически отсутствуют указания на решенные задачи, относящиеся к конкретным видам конструкций (за исключением самых первых пионерных работ), а основное внимание уделено развитию «инструментальной составляющей» оптимального проектирования и идейной стороне проблемы.

Ключевые слова: оптимизация; обратные задачи строительной механики; математическое программирование.

*ANATOLIY V. PEREL'MUTER, DSc, RAACS International Fellow,
aperel@i.com.ua; anatolyperelmutter@gmail.com
SCAD Soft,
3-a, Prosveshcheniya Str., 03037, Kiev, Ukraine*

SYNTHESIS PROBLEMS IN THE THEORY OF STRUCTURES (BRIEF HISTORICAL REVIEW)

The history of the optimum design development dates back almost four centuries. During this period, approaches to the problem of optimization have been changed, new methods of their solution appeared, purpose functions and constraints of this problem have been specified more accurately. The process of the problem development is rather instructive, as it shows some general trends in scientific and technical creativity as a whole.

This paper is not fully exhaustive. Moreover, does not contain recommendations related to specific types of structures (except for the pioneering works). The main attention is paid to the development of «instrumental component» of the optimum design and ideology of the problem.

Keywords: optimization; inverse problems of structural mechanics; mathematical programming.

Введение

При проектировании строительных конструкций перед инженером ставится задача соблюдения таких требований, как прочность, жесткость, устойчивость, долговечность, экономичность, технологичность, продолжительность сроков проектирования и строительства, использование определенных ресурсов и материалов. Все эти требования имеют весьма противоречивый характер, поэтому оптимизация проекта является главной целью каждого инженера, который стремится создать отдельный элемент, конструкцию или сооружение, удовлетворяющие определенным критериям.

Проблемы оптимального проектирования давно привлекают большое внимание, им посвящено значительное число работ, а история развития оптимального проектирования насчитывает уже почти четыре столетия и восходит к основополагающей для строительной механики работе Галилео Галилея [94]. Настоящая работа не ставит своей целью дать исчерпывающую историю развития проблемы со всеми ее ответвлениями в разнообразные области и приложения. Этот обзор можно считать историческим приложением к работе [29]. Представляется, что самостоятельный интерес может представить история возникновения и развития основных идей, которую можно проиллюстрировать, остановившись, главным образом, на стержневых системах, долгое время являвшихся единственным объектом исследования в строительной механике.

Более того, даже среди стержневых систем можно выделить фермы, которые обладают той особенностью, что каждый элемент системы характеризуется только одним параметром: площадью поперечного сечения (аналогичная ситуация реализуется в случае трехслойных изгибаемых систем, если толщина заполнителя задана, а определению подлежат одинаковые сверху и снизу толщины несущих пластин [127]). Эта особенность существенно упрощает анализ, и именно на ферменных конструкциях отрабатывались основные приемы решения задач оптимизации. Такого рода подход позволяет описать историю развития в «чистом» виде, т. е. без влияния многих дополнительных факторов, важных с практической точки зрения, но сильно усложняющих анализ.

Сказанное не означает, что другие задачи оптимизации в каком-то смысле являются второстепенными. Более того, целые классы задач оптимизации, например такие, как поиск оптимальной конфигурации трехмерного упругого тела [3] или отыскание оптимального очертания поверхности тонкой оболочки [73], которые остаются за пределами рассмотрения, весьма важны. Но задачи такого рода, где конструкция описывается дифференциальными уравнениями в частных производных, связаны с математическими идеями другого рода и в этом смысле лежат несколько в стороне от тематики настоящего очерка. Исключение составляют лишь те варианты упомянутых задач, где используется переход к дискретным переменным, например, путем применения метода конечных элементов.

О чем пойдет речь

Классическая теория сооружений традиционно ориентирована на анализ напряженно-деформированного состояния. Однако издавна наряду с этим направлением присутствовали элементы синтетического направления, связанного с такими проблемами, как оптимальное проектирование и как решение обратных задач строительной механики. Указанные проблемы не эквивалентны, поскольку при решении обратных задач строительной механики может отсутствовать цель достичь некоторого наилучшего (оптимального) решения или получить для рассматриваемой системы некоторое экстремальное свойство.

Напряженно-деформированное состояние некоторой системы (для простоты ограничиваемся стержневыми конструкциями), поиск которого является прямой задачей строительной механики, можно найти, если известны:

- топологическая схема и геометрические размеры конструкции;
- опорные закрепления и другие условия связи;
- типы сечений и их размеры;
- физическая модель работы материала;
- внешние воздействия.

Все эти данные определяются некоторым набором параметров, и если не заданы все они, то можно задаться некоторыми элементами напряженно-деформированного состояния, а остальные его элементы и неизвестные параметры конструкции подобрать так, чтобы задача оказалась полностью решенной. Такая задача строительной механики называется обратной.

Обратная задача часто не имеет единственного решения, и ее условиям может удовлетворять целое множество значений разыскиваемых параметров. В этих случаях условия обратной задачи часто доопределяются требованием выбора наилучшего в некотором смысле варианта решения, и возникает задача оптимального проектирования.

Чаще всего отыскивается решение, оптимальное с точки зрения расхода материала или с другим экономическим показателем. Но в обратной задаче не обязательно исходят из условия оптимальности, здесь для поиска искомых параметров часто используют условия принадлежности к некоторому классу систем с некоторыми желательными свойствами (равнопрочность, постоянство распределения по системе упругой удельной деформации, требование о принадлежности частот собственных колебаний некоторому желательному диапазону или др.).

Однако необязательность не является условием отсутствия, поэтому известны обратные задачи, в которых неизвестные параметры отыскиваются для системы с экстремальными свойствами, и это не обязательно свойства минимума веса или стоимости. Типичным примером может служить задача о поиске системы с заданным расходом материала, которая выдерживает максимальную нагрузку (так называемая задача складирования). Или можно еще назвать пример задачи об отыскании мест установки дополнительных опор (из числа заранее разрешенных позиций), максимально увеличивающих критическую нагрузку потери устойчивости.

Если же говорить об экономических целях, то имеется целый ряд все усложняющихся и уточняющихся постановок задачи, образующих цепочку:

минимум объема (веса), минимум стоимости материала, минимум себестоимости конструкции, минимум первоначальных и эксплуатационных затрат на протяжении всего жизненного цикла. Но полезно отметить, что всякого рода уточнения целевых показателей не всегда существенно сказываются на результате, поэтому здесь уместно прибегнуть к весьма интересному замечанию, сделанному в книге [64] относительно реакции инженера и математика на результат оптимизации. В качестве иллюстрации рассмотрим известную задачу об оптимальной высоте стальной двутавровой балки, для которой показано, что изменение оптимальной высоты h_{opt} на 20 % в ту или иную сторону приводит к увеличению массы ее погонного метра всего на 3–4 %.

С точки зрения математика, невязка отсчитывается по оси h , и поэтому точки $0,8h_{opt}$ и $1,2h_{opt}$ рассматриваются как очень грубое приближение из-за их значительного удаления от глобального минимума функции цели (рис. 1). А с точки зрения инженера, четырехпроцентное отклонение от глобального минимума функции цели можно считать хорошим приближением к оптимальному проекту, и, учитывая приемлемость для практики полученного результата, проектировщик не должен упускать эту благоприятную возможность при выборе решения поставленной задачи проектирования.

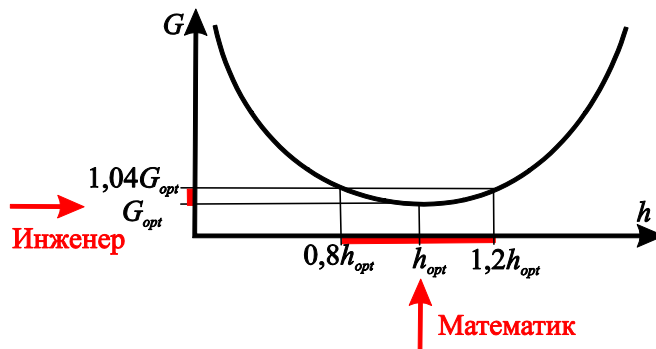


Рис. 1. Две точки зрения на задачу оптимизации

Эта идея, по-видимому, впервые высказана и широко рассматривалась В.Н. Гордеевым, который предложил вместо отыскания точки экстремума разыскивать, а затем более детально анализировать все множество решений, примыкающих к этой точке [17, 71]. Поскольку большинство реальных оптимизационных задач обладают «пологим экстремумом», т. е. даже заметное отступление от идеального решения не намного меняет значение целевой функции, то это дает возможность, не выходя в пространстве параметров проектирования из множества решений, близких к оптимальному, учитывать дополнительные трудно формализуемые условия (например, дискретность некоторых параметров).

Начало пути

Попытки решения задач оптимизации предпринимались еще в древности. Так, уже во времена Пифагора было известно, что фигура, имеющая

наименьшее отношение периметра к площади, – это круг. В 1638 г. Галилей, положивший начало науке о прочности, продемонстрировал параболическую форму балки равного сопротивления [94]. При этом использовалась идея равнонапряженности, которую Галилей, очевидно, полагал вполне естественной для рассматриваемой задачи и которая в будущем нашла себе многочисленных последователей.

В 1807 г. Томас Юнг указал, что оптимальная форма шарнирно опертой балки бесполезна ввиду ее нулевой высоты на опорах. Он предложил определить форму балки по соседству от опоры посредством тангенса угла наклона к теоретической линии очертания изгибаемой балки, предвосхитив в некотором роде формулу Журавского для поперечной силы [145].

Но первая четко сформулированная задача оптимального проектирования стержневых конструкций была поставлена и решена Лагранжем в 1770–1773 гг. Это была задача о колонне наименьшего веса, жестко заделанной на одном конце и нагруженной сжимающей силой на другом [111].

Определялась форма колонны, отвечающая минимуму веса при заданной продольной силе. Решение Лагранжа было ошибочным, и неточность, которая в нем содержалась, была устранена лишь через восемьдесят лет в работе русского академика Т. Клаузена [82], который нашел оптимальную форму колонны (рис. 2, а), у которой при приближении к вершине стержня толщина стремится к нулю, а напряжения неограниченно возрастают. Для устранения этой особенности Е.Л. Николаи [39] ввел дополнительное ограничение на величины допустимых напряжений. Полученное в этом случае распределение толщин представлено на рис. 2, б.

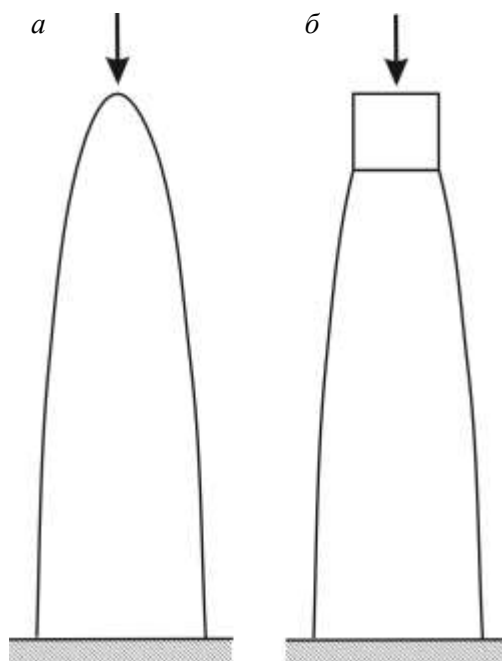


Рис. 2. Решение задачи Лагранжа

Продолжили исследование этой задачи Н.Г. Ченцов [68] и др.¹ Было проведено подробное исследование данной задачи для различных типов стержней и условий закрепления. При этом рассматривалась как указанная задача минимизации веса стержня при фиксированной величине силы потери устойчивости, так и двойственная к ней задача максимизации критической силы при условии, что объем задан.

Подход Лагранжа, когда явно формулируется задача поиска механической системы, обладающей определенными наперед заданными свойствами (в данном случае минимальным весом), позволяет считать Лагранжа основателем направления в строительной механике, ориентированного на решение задач синтеза. Кроме того, использование Лагранжем вариационного исчисления для решения таких задач надолго определило господство этого метода при решении задач синтеза.

Работы Галилея и Лагранжа имели академический характер и никаким образом не ориентировались на техническое применение. Эта ситуация сохранялась еще очень долго, и задачи синтеза были лишь некоторыми упражнениями в быстро развивающемся вариационном исчислении.

Но было одно исключение, которое связано с интересом к расчету мостовых сводов, стимулировавшее исследования, относящиеся к арочным системам. Одним из наиболее интересных вопросов теории арок является вопрос о так называемой рациональной форме оси арки, т. е. о подборе наивыгоднейших геометрических параметров оси арки и ее поперечных сечений. Этот вопрос очень давно привлекал к себе внимание инженеров и породил обширную литературу.

Одним из ярких примеров может служить проект моста через Неву, представленный в 1772 г. И.П. Кулибиным. Он принял очертание арки по форме экспериментально изученного им веревочного многоугольника, справедливо полагая, что арка такой формы будет работать только на осевое давление. Следует отметить, что это суждение Кулибина нельзя полагать пионерным. Более чем за сто лет до Кулибина специалист по экспериментам Королевского общества Роберт Гук опубликовал анаграмму, которая расшифровывалась в текст:



И.П. Кулибин

«Как провисает гибкая линия, так же, но в перевернутом виде получится жесткая арка» [105].

Первую попытку аналитически определить очертание арки по кривой давления предпринял в 1787 г. Салимбени, однако его решение содержало ошибку, поскольку он полагал, что кривая давления совпадает с осью свода

¹ В послевоенные годы задача Лагранжа стала популярной в США. Клиффорд Трусделл, не зная о Т. Клаузене и его российских последователях, предложил задачу Лагранжа для решения американским ученым Дж. Келлеру и Г. Вайнбергеру. Оба ученых с этой задачей успешно справились. Однако работа Г. Вайнбергера осталась неопубликованной, а Дж. Келлер не только повторил решение Клаузена, но и показал, что для выпуклых поперечных сечений оптимальная колонна имеет форму равностороннего треугольника.

при любой его форме [132]. Прошло еще около шестидесяти лет, пока Вилларсо правильно решил задачу о создании свода, ось которого совпадает с кривой давления [141].

Уже в начале XX в. были решены многие задачи об оптимальных арках. Особенно интенсивно исследовался вопрос об определении рациональной оси арки заданного пролёта и заданной стрелы подъёма, при которой требуемые условиями прочности поперечные сечения арки будут наименьшими [6, 7]. Дальнейшие исследования этой задачи уточняли ее постановку. Так, В.И. Руднев выдвинул новую точку зрения на рациональную ось, установив для арок конечной толщины различие между очертанием по кривой давления, вдоль которой $M = 0$, но $Q \neq 0$, очертанием по векториальной кривой, вдоль которой $Q = 0$, но $M \neq 0$, и очертанием по промежуточной кривой. Для тонкой арки можно искать очертание по веревочной кривой, вдоль которой $M = 0$ и $Q = 0$. Для ряда интегрируемых случаев В.И. Руднев вывел уравнения этих кривых, относящихся к симметричным аркам, находящимся под вертикальной нагрузкой [53].

Исследования, посвященные поиску рационального очертания оси арки, были продолжены в работах [19, 24, 57, 63] и др. Но задача об арке была не единственной из числа оптимизационных, которыми интересовались исследователи в конце XIX и в первой половине XX в. Так, инженер Г.С. Семиколенов применительно к неразрезным балкам ставил задачу «...придумать такую систему устройств мостовых покрытий, чтобы избежать невыгод, представленных ими, и по возможности сохранять их существенную выгоду, сбережение в материале» [54]. В своих «уравновешенных» многопролетных балках он отыскивал места оптимального размещения шарниров, улучшив таким образом консольно-балочную систему мостов, предложенную Гербером [97].

В связи с разработкой сортов металлопроката большой интерес вызвала проблема оптимизации формы поперечного сечения изгибаемого стержня. Одним из первых была опубликована работа [45]. В этой работе автор впервые обосновал общий метод анализа профилей, создал основы теории сортамента. Пользуясь удельным моментом сопротивления $k = W / A^{3/2}$, Э.Р. Пацкевич установил, что «балка тем лучше работает на изгиб, чем больше k , и что по k можно проверить не только прочность, но и рациональность сечения». Рассматривая профили с равными удельными моментами сопротивления, автор делает вывод, что подобные профили представляют частный случай профилей равного удельного сопротивления. Равенство удельных моментов сопротивления обусловлено равенством отношений линейных размеров (удельные моменты сопротивления зависят лишь от формы профиля). Позже подход Пацкевича с некоторыми усовершенствованиями применил Ф.С. Ясинский, который использовал его при создании Русского нормального метрического сортамента [72]. В 1924 г. Н.П. Пузыревский вводит понятие о теоретическом весе сооружения, которое сыграло важную роль в дальнейших исследованиях [48].

К рассматриваемой проблеме близко примыкает поиск закономерностей, которыми обладают построенные сооружения различного типа. Так систематическое сопоставление различных схем мостовых сооружений с целью выбо-

ра наилучшего решения началось с работы Э. Колингтона [83], анализ был продолжен в работах Гейнцерлинга [101], Дирксена [84], Н.Б. Богуславского [8], Е.О. Патона [44], Н.С. Стрелецкого [60, 61]. В частности, в упомянутой работе С.Н. Стрелецкого, в основу которой положен анализ проектных решений по 320 мостам, были высказаны и некоторые общие теоретические положения, которые были позже развиты применительно к сооружениям других типов как самим Н.С. Стрелецким, так и учеными его школы.

Это направление исследований в какой-то мере является не теоретическим, а экспериментальным, поскольку можно полагать, что каждое реальное сооружение является единичным экспериментом, хотя и специально не запланированным для исследования закономерности поведения всей совокупности однотипных конструкций. Однако множественность такого рода экспериментальных данных позволяет использовать их для выявления скрытых закономерностей.

Сам процесс проектирования в значительной степени является неформализованным экспериментом в смысле решения некоторой конкретной задачи. Данные указанных экспериментов с отдаленных времен составили фонд для набора рациональных действий, хотя такие эксперименты, вообще говоря, приводят к случайным результатам, и время, посвященное бесполезным или неудачным экспериментам, иногда составляет сотни лет. Например, поиск рациональной схемы для решеток мостовой фермы был длительным процессом, который, начавшись с римских деревянных арок, через многие странные формы, такие как схемы Боллмана, Финка и Лонга [47], привел к современным структурам.

Возникновение теории

Упомянутые выше исследования были разрозненными подступами к созданию некоторой более или менее общей теории оптимизации, теории, потребность в которой начала ощущаться в 20-х гг. XX в. и которая уже неявно, в зачаточном виде наблюдается, например, в работах по исследованию закономерностей, заключенных в построенных сооружениях.

Равнопрочность и метод заданных напряжений. В основу такой теории легла идея равнопрочности, или конструкции, у которой для всех расчетных сечений требование прочности выполняется в форме равенства (реализуются заданные напряжения). То есть целью синтеза конструкции объявлялось достижение равнопрочности.

Предшественником указанного подхода можно считать Мориса Леви. В работе [113] он установил, что объем стержней статически неопределимой равнопрочной фермы будет таким же, как у стержней статически определимой фермы, образованной из заданной путем удаления лишних связей. Кроме того, в этой работе было показано, что теоретический вес равнопрочной фермы пропорционален потенциальной энергии деформаций.

Что касается Леви, то, исследуя свойства равнопрочной конструкции, он не предполагал, что поиск та-



Морис Леви

ких конструкций может стать достаточно общим подходом к проблеме оптимизации, некоторым новым методом строительной механики. Напомним, что понятие равнопрочности ввел еще Г. Галилей, который определил форму равнопрочной балки. Им рассматривался случай изгиба консольной балки под действием сосредоточенной силы, приложенной к свободному концу, и было показано, что условие равнопрочности выполняется, если высота балки h меняется по параболическому закону.

Как оказалось впоследствии, задача о форме балки минимального веса при условии, что нормальные напряжения не превосходят заданной величины σ_0 , сводится к задаче, решенной Г. Галилеем. Таким образом, равнопрочная консольная балка в то же время является балкой минимального веса. Были найдены и другие примеры, когда условие равнопрочности обеспечивает минимальный вес конструкции.

Это обстоятельство во многом определило интерес к отысканию равнопрочных конструкций, задача, которая имеет смысл в случае одного нагружения.

Первые общие работы в области поиска равнопрочных стержневых конструкций принадлежат А. Пиппарду [123] и Г. Гейману [100]. Они содержали рецептурное описание метода расчета статически неопределимых ферм, состоящего в том, что задаются усилия в лишних (условно необходимых) стержнях, с учетом которых сечения всех других стержней подбираются из условия равенства напряжения в них предельному значению. Таким образом ферма (за исключением лишних стержней) оказывается «полнонапряженной». Ни Пиппард, ни Гейман не заметили возможность получения противоречивого решения, когда рассчитанная таким способом ферма получает знаки усилий в лишних стержнях, противоположные заданным.



И.М. Рабинович

Полное обоснование метода и анализ как положительных, так и отрицательных его сторон были выполнены в классической работе И.М. Рабиновича, опубликованной в 1933 г. Его монография [49] оказала огромное влияние на дальнейшее развитие синтетического направления в строительной механике. В ней были изучены вопросы изменения деформаций, усилий и площадей поперечных сечений стержней и установлены пределы таких изменений.

Критерием оптимальности являлась равнопрочность основных стержней. Было доказано важное предложение о возможности создания фермы наименьшего веса при условии использования предварительного напряжения (значительно позже этот результат был переоткрыт Хофмейстером и Фелтоном [104]).

Была обобщена теорема Мориса Леви об образовании статически неопределимой фермы наименьшего веса путем ее превращения в статически определимую за счет обращения в нуль усилий в некоторых условно необходимых стержнях. Подробно разобраны случаи образования противоречий при неудачном задании усилий в лишних стержнях.

Нетривиальной проблемой, возникшей в связи с методом заданных напряжений, была следующая. Поскольку для статически неопределимых си-

стем предлагалось задаться усилиями в лишних стержнях, то следовало знать допустимые пределы их изменения (выход за эти пределы приводил к отрицательным значениям площадей). Некоторые рекомендации по этому поводу даны в 1938 и в 1952 гг. Хуберяном [65–67], развивавшем метод заданных напряжений, позже к проблеме допустимых пределов обращались и другие исследователи [21, 56].

Другая проблема метода заданных напряжений связана с необходимостью оперирования абсолютными значениями усилий, поскольку именно от них зависели значения искомых геометрических характеристик сечений (площадей, моментов сопротивления и т. п.). Этой проблеме обязаны своим появлением «модулярные функции» Ю.А. Радцига [50], с помощью которых решалась задача о наивыгоднейшем исключении лишних связей, или «функции перемен знака» А.И. Виноградова [10], определяющие места нулевых точек эпюры моментов в оптимальных стержневых системах с преобладающим изгибом.

А.И. Виноградов впервые решил вопрос о расчете по заданным напряжениям на действие временных нагрузок и впервые ввел понятие о наивыгоднейших линиях влияния. Он и в дальнейшем интенсивно развивал теорию обратных задач, используя введенное им в обращение понятие о множестве конструкций с заданным очертанием осей, для которого разыскивается наивыгоднейшее (с точки зрения минимизации веса) распределение внутренних усилий. Было доказано, что минимум веса достигается на некотором подмножестве этого множества.

При этом могут реализоваться не только системы без лишних связей, но и некоторые статически неопределимые решения без предварительного напряжения [11].

Кроме исследований Виноградова ряд работ, развивающих метод заданных напряжений, был выполнен К.М. Хуберяном. В своей работе [65] он предложил при разработке практической схемы расчета сохранить наивыгоднейшее распределение напряжений, отказавшись от наивыгоднейшего распределения усилий. В другой своей работе [66] метод расчета фермы по заданным напряжениям распространен на многократно статически неопределимые фермы при постоянном и при временном нагружении.

Позже К.М. Хуберян изучает применение метода заданных напряжений к статически неопределимым фермам с крестовой решеткой и находит значительное упрощение задачи для рассматриваемого им частного случая.

Итак, статически неопределимая ферма минимального веса может быть реализована только в исключительных случаях, в отличие от конструкций, элементы которых испытывают неоднородное напряженное состояние. Такие конструкции всегда можно сделать равнопрочными, если менять форму поперечного сечения элементов [15].



А.И. Виноградов



К.М. Хуберян

Правда, при этом могут быть получены конструкции весьма экзотического вида. Пример проектирования портальной рамы, для которой разыскиваются размеры поперечного сечения и ориентация его главных осей, показан на рис. 3. Если же отказаться от поиска угла поворота сечения, полагая направление главных осей фиксированным, то также можно найти равнопрочное решение, которое оказывается на 23,4 % тяжелее.

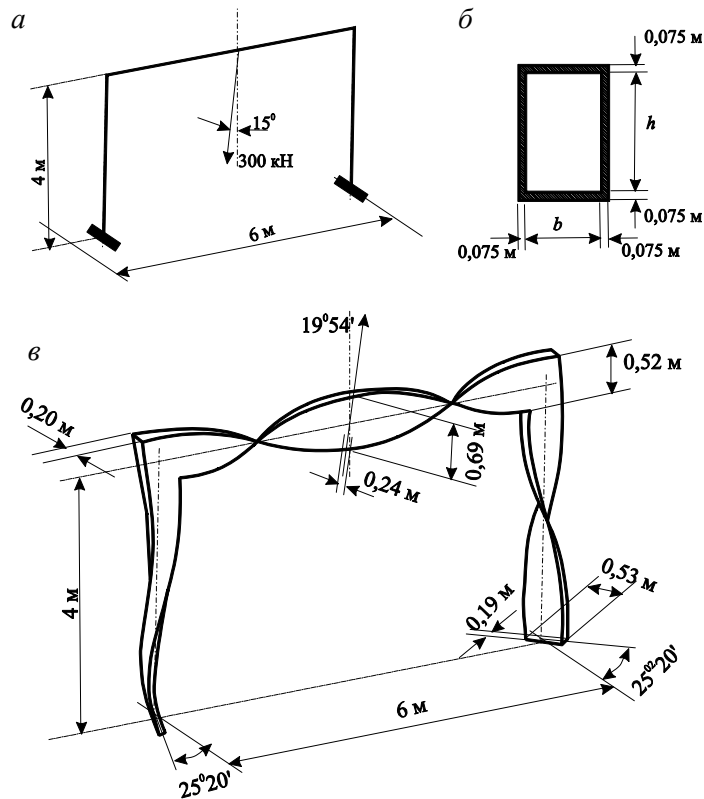


Рис. 3. Оптимальное распределение материала вдоль оси рамы:
а – схема рамы; б – тип поперечного сечения; в – решение задачи

Наряду с условием равнопрочности в качестве критерия рациональности конструкции стали использовать условия равностойчивости, постоянства удельной потенциальной энергии упругой деформации и др.

Опора на потенциальную энергию. Энергетические характеристики оптимальных конструкций могут использоваться как критерии, обеспечивающие минимальный вес, и служить основой для построения методов их синтеза. При этом задача о поиске минимума заменяется задачей о синтезе систем с заранее заданными свойствами.

Так, для полностью напряженной ферменной конструкции, у которой площадь поперечного сечения любого стержня выражается через усилие в нем N_i и допускаемое напряжение σ_0 как $A_i = |N_i|/\sigma_0$, потенциальная энергия деформаций равна

$$U = \frac{1}{2} \sum_i \int_l \frac{N_i^2}{EA_i} dx = \frac{1}{2} \sum_i \frac{|N_i| l_i \sigma_0}{E},$$

а ее объем равен

$$V = \sum_i A_i l_i = \sum_i \frac{|N_i| l_i}{\sigma_0}.$$

Сравнивая эти выражения, нетрудно заметить, что $U = kV$, где $k = \sigma_0^2/2E$. На факт пропорциональности, по-видимому, впервые обратил внимание А. Мичелл [116]. Эта связь послужила отправной точкой для А.И. Кефели для вычисления наименьшего теоретического объема фермы, который определялся из условий минимума энергии деформаций [23].

Кроме условия пропорциональности было обнаружено, что минимум объема можно получить, если удастся достигнуть равномерного по конструкции распределения удельной потенциальной энергии деформаций. Действительно постоянный для всей конструкции коэффициент $k = \sigma_0^2/2E = (\sigma_0/E)(\sigma_0/2) = \sigma_0 \varepsilon/2$ равен плотности потенциальной энергии деформаций.

Но исследование Кефели не нашли тогда своего продолжения, и только через десятилетие книга З. Васютыньского [142] положила начало целой серии работ в области теории оптимальных систем, основанных на связи между перераспределением материала в упругой линейно деформируемой системе и потенциальной энергией деформаций.

Васютыньский поставил своей целью решение задачи проектирования конструкции на минимум потенциала упругих деформаций при сохранении постоянного объема материала [143]. Это направление позволило также изучать вопросы синтеза инженерных сооружений, чему был посвящен ряд интересных работ группы польских ученых, возглавляемых З. Васютыньским ([76–78, 99] и др.)



З. Васютыньский

Большое значение для обобщения результатов, обнаруженных сперва для ферменных конструкций, имела работа Е.Ф. Мазура [114], в которой он доказал, что прочность упругой конструкции заданного веса является минимальной, если удельная энергия деформаций в «расчетных волокнах» постоянна по всей системе.

При этом под расчетными волокнами понимаются бесконечно малые участки поперечного сечения, на напряженное состояние которых имеют влияние малые изменения параметров конструкции. Некоторые работы по оптимизации лишь по форме отличались от исследований, в которых оптимизация связана с потенциальной энергией деформаций. Так, А.А. Комаров предложил в основу своих исследований идею, что всякая конструкция предназначена для восприятия некоторых внешних нагрузок и передачи их на опорные закрепления, следовательно, выгодность проектируемой силовой схемы будет зависеть от величины передаваемых усилий и от длины путей, по которым происходит эта передача [25, 26]. В связи с этим сравнение вариантов силовой

схемы осуществлялось через особую характеристику конструкции – ее «силовой вес» M . Он одновременно учитывает оба качества передачи сил – величину и протяженность действия внутренних усилий в конструкции. И чем меньше его величина, тем более совершенна силовая схема.

Однако, как говорится, новое есть основательно забытое старое. Почти на сто лет ранее К. Калман [79] предложил располагать узлы фермы таким образом, чтобы минимизировать величину $M = \sum |N_i| l_i$. Но величина силового веса M пропорциональна потенциальной энергии. Действительно, выражение для энергии

$$U = \frac{1}{2} \sum_i \frac{N_i^2 l_i}{EA_i} = \frac{1}{2} \sum_i \frac{N_i^2 l_i A_i}{EA_i^2} = \frac{1}{2} \sum_i \frac{\sigma_i^2 l_i A_i}{E}$$

при равенстве всех напряжений предельному значению σ_0 приобретает вид

$$U = \frac{1}{2} \sum_i \frac{\sigma_0^2 A_i l_i}{E} = \frac{\sigma_0}{2E} \sum_i \sigma_0 A_i l_i = \frac{\sigma_0}{2E} \sum_i N_i l_i.$$

Так что и работы А.А. Комарова следует отнести к энергетическому направлению оптимизации.

Оптимизация как задача математического программирования. Первый метод отыскания пластических рамных систем минимального веса был предложен Жаком Хейманом [103]. Он основывался на исследовании возможных механизмов разрушения и сопоставлении соответствующих им весов. Поскольку рассматривались неразрезные балки и рамы, на которые действуют только сосредоточенные силы, то построение таких механизмов не вызывало затруднений. Кроме того, полагалось, что вес единицы длины стержня пропорционален предельному пластическому моменту. Несколько позже В. Прагер рассмотрел случай, когда вес единицы длины пропорционален некоторой степени (меньшей, чем единица) предельного момента [126].

Важные теоремы о верхнем и нижнем пределе для минимального веса рамных конструкций были доказаны Фолкисом [89, 90], который ввел понятие механизма, соответствующего весу. Этот механизм характеризуется тем, что в уравнении работ коэффициенты при каждом предельном пластическом моменте такие же, как и в выражении для веса. Теоремы Фолкиса утверждают, что если механизм, соответствующий весу, не обеспечивает появления статически допустимого и безопасного распределения усилий, то вес такой рамы будет меньше веса оптимальной конструкции. И наоборот, если в этом механизме реализуется статически допустимое и безопасное распределение усилий, то вес такой рамы больше или равняется минимальному весу.

Исходя из этих теорем, Фолкис пришел к использованию линейного программирования в задачах оптимального проектирования. Его подход заключался в нахождении конструкции минимального веса при недопущении пластического разрушения конструкции. В этих условиях значительный класс задач оптимизации конструкции можно сформулировать как задачи линейного программирования [88], при этом рассматривается только одно условие нагружения.

В 1958 г. Пирсон, развивая теорию пластического разрушения, обратился к задаче проектирования ферм и рам минимального веса при наличии нескольких вариантов нагружения [120]. Эта работа сыграла важную роль, поскольку использованный в ней подход послужил предтечей трех ключевых идей, которые впоследствии легли в основу разработки современных методов оптимизации конструкций, работающих за пределами упругости. Он состоит в том, что одновременно ищут оптимальный проект и критические схемы появления пластических шарниров.

Большое влияние на развитие современных методов оптимизации конструкций оказала работа [108], в которой было показано, что для достаточно общего класса задач оптимального проектирования возможна постановка задач нелинейного программирования, а также было признано фундаментальное значение ограничений в виде неравенств при корректной постановке задач оптимального проектирования конструкций.

Но наиболее общий подход к решению задач оптимизации был предложен Л.А. Шмитом [134, 135]. Этим подходом для создания системы автоматического проектирования вводится идея применения конечно-элементного расчета конструкций в связке с методами нелинейного математического программирования. Общей постановкой задачи, которая была выдвинута Шмитом, подчеркивалась важность учета неединственности различных условий нагружения и наложения ограничений по различным формам достижения предела несущей способности с использованием системы ограничений-неравенств.



Л.А. Шмит

Другим важным аспектом, который учитывался в этой постановке задачи, было наличие ограничений на минимальные и максимальные размеры элементов конструкции. Кроме того, Шмит указывал, что, в противоположность широко распространенной точке зрения, проект статически неопределимой конструкции минимального веса, на который наложено только ограничение по напряжению, не обязательно будет такой конструкцией, в которой каждый элемент нагружен полностью, по крайней мере, при одном из вариантов нагружения.

В течение следующего десятилетия, с 1960 по 1970 гг., подход к решению задач оптимизации конструкций на основе нелинейного программирования применялся к самым разным задачам оптимизации и разработке вариантов реализации алгоритмов нелинейного программирования.

Были опробованы методы последовательной безусловной оптимизации [124], подход, использующий расширенные функции Лагранжа [98], метод проекций градиента Розена и различные модификации методов наискорейшего спуска [96, 117] и другие способы решения задачи нелинейного программирования. Выбираемый автором алгоритм оказывал существенное влияние и на формулировку задачи, и на то, что считалось ее решением, поскольку, как известно, методы нелинейного программирования в большинстве случаев не гарантируют достижения абсолютного минимума целевой функции по причине невыпуклости области допустимых решений. Эта ситу-

ация привела к применению методов целочисленного [138], динамического [107, 119] программирования и различных итерационных методов [130] даже для идентичных задач.

К началу 70-х гг. стало очевидно, что имеющиеся возможности оптимизации конструкции на глобальном уровне, основанные на расчете по методу конечных элементов в сочетании с методикой математического программирования, требуют чрезвычайно больших затрат времени для решения задач проектирования конструкций весьма ограниченных размеров.



В. Прагер

Полагали, что выход из создавшейся ситуации состоит в использовании альтернативного подхода, идея которого была предложена в работе Прагера и Тейлора [127] и ставшего известным как «подход критериев оптимальности». Этой методикой предусмотрено, что сначала необходимо вывести условия, которым должен удовлетворять оптимальный проект. Затем разрабатывается алгоритм (как правило, итерационный), целью которого является поиск конструкции, удовлетворяющей установленным критериям, и тем самым достигается локальный минимум.

В этом смысле методы, основанные на критериях оптимальности, попадают в категорию не прямых методов оптимизации. В пионерной работе [127], например, рассмотрена задача поиска конструкции минимального веса с заданным значением виртуальной работы нагрузки $P(x)$ на прогибах $y(x)$. Поскольку виртуальная работа нагрузки имеет заданное значение C , то принцип минимума потенциальной энергии становится принципом минимума энергии деформаций, а последняя, как показано в этой работе, пропорциональна весу конструкции. Далее было показано, что подход такого рода может быть использован, когда рассматривается величина, которая характеризуется минимальным принципом строительной механики (например, использованной в указанной выше задаче работой внешних сил).

Непрямые методы оптимизации использовались в задачах проектирования систем минимального веса [85, 109, 140], а также в ряде других задач, где можно было опереться на вариационные принципы строительной механики. К ним относятся, например, такие задачи, в которых в качестве критерия оптимизации выступают: основная частота собственных колебаний [18], коэффициент предельной нагрузки в случае пластического разрушения [70], величина критической силы потери устойчивости [139].

К этому же направлению примыкают исследования по проблеме рациональной расстановки связей в задачах устойчивости и собственных колебаний. Одной из первых работ этого направления была работа [9]. В работах [20, 31, 40, 58] были обоснованы правила выбора мест постановки связей, максимально сдвигающих первую собственную частоту или критическую силу. Было обосновано их минимально необходимое количество. Показано, что установкой в стержневой системе с дополнительными связями можно повысить величину первой собственной частоты или критической силы максимально до значения $(s + 1)$ -й. При этом связи должны быть поставлены в узловые точки формы соб-

ственных колебаний (потери устойчивости), отвечающей $(s + 1)$ -й собственной частоте (критической силе) системы без дополнительных связей. Были предложены методы, позволяющие максимально повысить величину первой собственной частоты (критической силы) при минимальной суммарной жесткости дополнительных связей.

В работе [30] рассмотрена другая постановка задачи, когда требуется выбрать из числа возможных места установки упругих дискретных связей и определить их жесткости таким образом, чтобы первая собственная частота (критическая нагрузка) достигала бы заранее заданного значения, конструктивные ограничения соблюдались, а вес или объем материала дополнительных связей принимал бы минимальное значение.

Решены задачи, связанные с необходимостью в одних случаях размещения на сооружении дополнительных грузов, а в других – со снятием части нагрузки. При этом изменение частоты собственных колебаний не должно выходить за установленные границы. В задаче о догрузке сооружения ставится цель о размещении максимально возможной величины дополнительной нагрузки, не выводящей уменьшенную частоту собственных колебаний за установленную границу. При этом величины каждого из дополнительных грузов ограничены.

Иногда критерий оптимизации конструируется на основании интуитивных соображений. Например, важнейшее требование, которому должна удовлетворять любая конструкция, сводится к необходимости соблюдения критерия прочности в каждом элементе. Ограничение прочностных характеристик входит в число других ограничений, накладываемых на проект конструкции. На практике критерии прочности удовлетворяются с помощью концепции полностью напряженных конструкций (fully strenget); эта концепция явилась одним из первых критериев оптимальности.

Трудно назвать автора идеи полностью напряженной конструкции, которая интуитивно казалась приводящей к системе наименьшего веса и была реализована во многих расчетных программах, но научный анализ этого вопроса начался лишь во второй половине XX в. Интерес представляли соотношения между полностью напряженной конструкцией и конструкцией минимального веса, поскольку никакие очевидные отношения между ними явно не были видны. В работе [133] утверждалось, что проект минимального веса может быть отобран среди полностью напряженных конструкций. Но уже через два года было показано [134], что полностью напряженный проект не обязательно является проектом минимального веса, и даже при небольшом количестве условий нагружения метод полного напряжения может привести к неэффективному проекту.

И, по-видимому, первой среди работ, которые четко проанализировали связь между полностью напряженной конструкцией и конструкцией минимального веса была работа Р. Разани [129], в которой было показано, что итерационный метод поиска полностью напряженной конструкции не всегда сходится к проекту минимального веса и найдено необходимое условие для эквивалентности двух методов проектирования. Позже А.И. Виноградов также проанализировал сходимость прочностного перерасчета и показал на примерах, что он может привести не к системе минимального веса [12].

Используемое допущение о том, что у большинства практических конструкций распределение усилий по элементам нечувствительно к размерам поперечных сечений этих элементов, является причиной того, что рассматриваемый алгоритм для некоторых конструкций приводит не только к неоптимальному проекту, но и к проекту с неэффективным распределением усилий в элементах конструкции. Чтобы избавиться от этого недостатка, было предложено на каждой итерации изменять переменные проектирования всего лишь на несколько процентов, тогда к оптимальному проекту можно прийти всего лишь за 4–5 итераций [95].

Но по настоящему трудности решения больших задач оптимизации начали преодолеваться лишь при замене общей задачи оптимизации конструкций на последовательность относительно небольших явных приближенных задач оптимизации конструкций. Реализация этого перехода достигалась за счет скоординированного использования концепций аппроксимирования, которыми предусматривалось:

- уменьшение числа независимых переменных проектирования путем их объединения в группы;
- уменьшение числа ограничений, которые учитывались на каждом этапе временного отбрасывания неактивных и излишних ограничений;
- построение высококачественных явных аппроксимаций для оставленных функций ограничений.

Вообще говоря, это напоминает обычную практику проектирования, когда выполняется ряд шагов с постепенной детализацией и уточнением задачи.

В начале 80-х гг. была сделана попытка создать новый мощный метод минимизации веса строительных конструкций, основанный на сочетании концепций аппроксимирования с двойственным методом [136].

Анализ этого подхода показывает, что для значительного класса задач оптимизации размеров конструкций минимального веса методы, основанные на обобщенных критериях оптимальности, и методы математического программирования образуют единый метод решения задач оптимизации конструкций. Как показал Флэри [87], подходы теории математического программирования и подходы, основанные на использовании критериев оптимальности, отнюдь не исключают друг друга, а трудности, присущие обычным методам, основанным на критериях оптимальности, преодолеваются путем комбинированного применения концепций аппроксимирования и двойственного подхода.

Синтез схемы

Можно проследить, как с течением времени расширялся круг задач оптимизации конструкций. Учитывались все более сложные ограничения, разнообразнее становились постановки задач, использовались разнообразные приемы решения указанных задач. Однако долгое время заданным полагалась геометрическая схема и топология конструкции.

Лишь в немногих случаях, как в задаче об оптимизации оси арки, когда в качестве решения, заведомо считавшегося оптимальным, принималась веревочная кривая, отыскивались некоторые параметры геометрии системы. Ти-

пичной можно считать задачу об определении оптимального значения стрелы подъема арки. И, по-видимому, первой работой, где был поставлен этот вопрос, было исследование [112]. В 1925 г. И.М. Рабинович нашел, что наивыгоднейшее отношение стрелы к пролету весомой гибкой нити или сжатой арки, очерченной по кривой давления от собственного веса, выражается формулой $f/l = \sqrt{3}/4 = 0,433$. Я.Г. Пановко в своей работе [43] дал решение той же задачи, но в качестве нагрузки принял вес самой арки и сплошного надсводного заполнения. Ряд других важных случаев рассмотрены в работах [24, 62].

Сплошные перекрестные системы. Однако топология конструкции в упомянутых работах полагалась заданной и неизменной. Первым нарушил эту традицию Дж.К. Максвелл [115], поставивший задачу отыскания оптимальной конфигурации фермы при заданных нагрузках и опорах. Максвеллу принадлежит теорема, гласящая, что в такой ферме при заданных нагрузках и без учета потери устойчивости выполняется условие

$$V^+ R^+ - V^- R^- = \text{const},$$

где V^+, V^- – объем растянутых и сжатых стержней; R^+, R^- – пределы прочности материала на растяжение и сжатие.

А. Мичелл, продолжая работу Максвелла, в 1904 г. предложил заменить плоскую двумерную конструкцию системой криволинейных стержней, ориентированных вдоль траекторий главных напряжений [116]. В результате получаются конструкции, которые являются статически определимыми и могут не обеспечивать несущую способность при нагружении альтернативными силами.

Мичелл доказал, что из всех конструкций ферм, передающих на опоры заданную нагрузку, минимальным объемом обладает та, для которой выполняется условие

$$V^+ R^+ + V^- R^- = \sum_{i=1}^m P_i u_i,$$

где u_i – перемещение по направлению силы P_i , а модуль деформации всех стержней – постоянная величина.

Сама форма конструкции Мичелла оказывается подобной обычным пластическим линиям скольжения (сетки Генки – Прандтля) при плосконапряженном или плоскодеформированном состоянии [137].

В конструкции Мичелла обычно входит неопределенно большое число бесконечно длинных элементов, поэтому они в редких случаях могут быть непосредственно использованы при проектировании инженерных конструкций. Тем не менее, конструкции Мичелла могут быть полезны при проектировании конструкций, особенно при доминировании одного условия нагружения и наличии главным образом ограничений по напряжениям.

Дальнейшим развитием подхода Мичелла к проектированию конструкций минимального веса явились работы Хемпа [102] и Чана [81], однако поз-



Дж.К. Максвелл



А. Мичелл

же это направление исследований понемногу было свернуто, поскольку получаемые решения мало удовлетворяли практическим запросам (рис. 4, а), хотя некоторые приложения схемы такого рода нашли себя в задачах конструирования стеклопластиков.

Но подход Мичелла оставался привлекательным тем, что он мало связан с априорными предположениями о структуре системы и не зависел от материала конструкции. Именно в рамках такой постановки задачи было выполнено исследование А.Р. Ржаницына, в котором автор делает попытку синтетического подхода к расчету стержневых систем [51]. Используя понятие вириала сил, Ржаницын установил некоторые общие закономерности, присущие оптимальным системам, в частности было доказано, что в оптимальной ферме объем сжатых и растянутых стержней равны друг другу (этот результат еще в 1890 г. получил Максвелл [115]). Для некоторых задач получил схемы минимального веса (рис. 4, б), которые, как и схемы Мичелла, мало напоминали реальные конструкции.

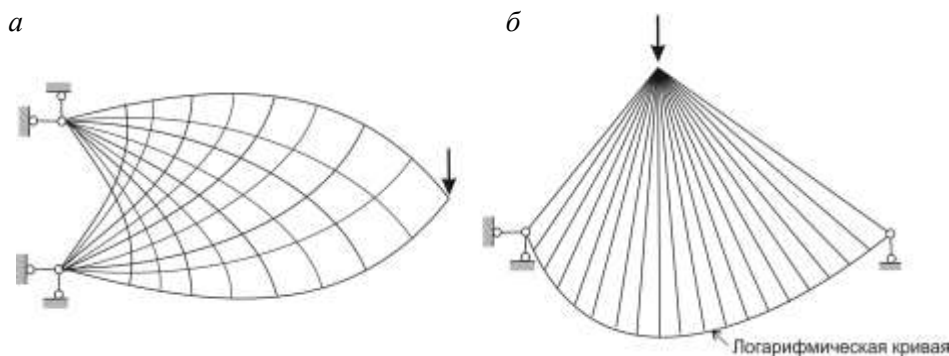


Рис. 4. Оптимальная конфигурация:
а – ферма Мичелла; б – ферма Ржаницына

Приблизительно семьдесят лет спустя после Мичелла его теория была распространена на изгибаемые системы (ростверки). Вильям Прагер и Георгий Рожваны сформулировали первую общую теорию оптимизации топологии, которую называют «теория оптимизации конфигураций» [128]. Они применяли это прежде всего к точной, аналитической оптимизации конструкций, подобных перекрестным балочным клеткам, но у нее есть также важные значения для числовых методов и структур типа континуума.

Для фермы Мичелла функция удельной стоимости определяется как $\psi = k|N|$, где ψ – вес единицы длины; N – усилие; k – заданная константа, а для балочного ростверка функция удельной стоимости записывается в виде $\psi = k|M|$, где M – изгибающий момент [125], и решалась задача об оптимальной компоновке таких конструкций. Так же, как и в фермах Мичелла, решение состоит из бесконечного числа компактно расположенных элементов (фермоподобный континуум в случае задачи Мичелла и ростверкоподобный континуум в задаче Прагера). Детально проблема оптимальной компоновки

представлена в монографии Рожваны [131]. Некоторые примеры полученных компоновок показаны на рис. 5.

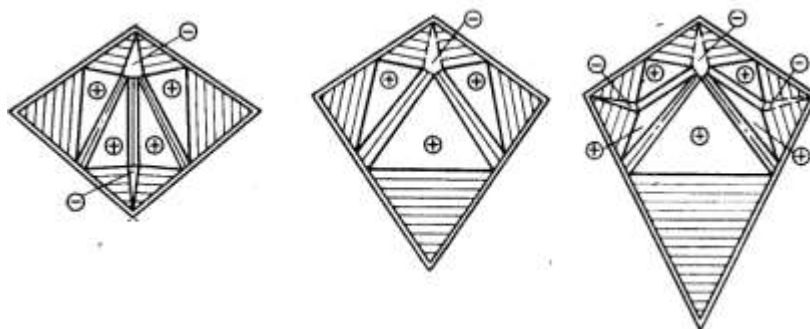


Рис. 5. Примеры компоновки ростверка для ромбовидной области

Использование специальных моделей метода конечных элементов.

Более реалистичной оказалась следующая постановка задачи структурного синтеза. Если задано множество узлов фермы с действующими на них нагрузками, то, соединяя все эти узлы стержнями, составляя для всех узлов уравнения равновесия и минимизируя объем материала, получим задачу линейного программирования для синтеза фермы минимального объема. Такой подход к задаче впервые указан Пирсоном [120].

Несколько более общий подход развит в статье У.С. Дорна, Р.Е. Гомори и Дж. Гринберга [86], где использовано понятие о множестве допустимых узлов (в том числе и ненагруженных), соединенных попарно стержнями (рис. 6), а также Д.А. Мацюлявичюсом [33, 34], который предложил несколько модификаций задачи при учете многих загрузжений. Аналогичную пространственную задачу чуть раньше рассмотрел Г.С. Чэн [81].

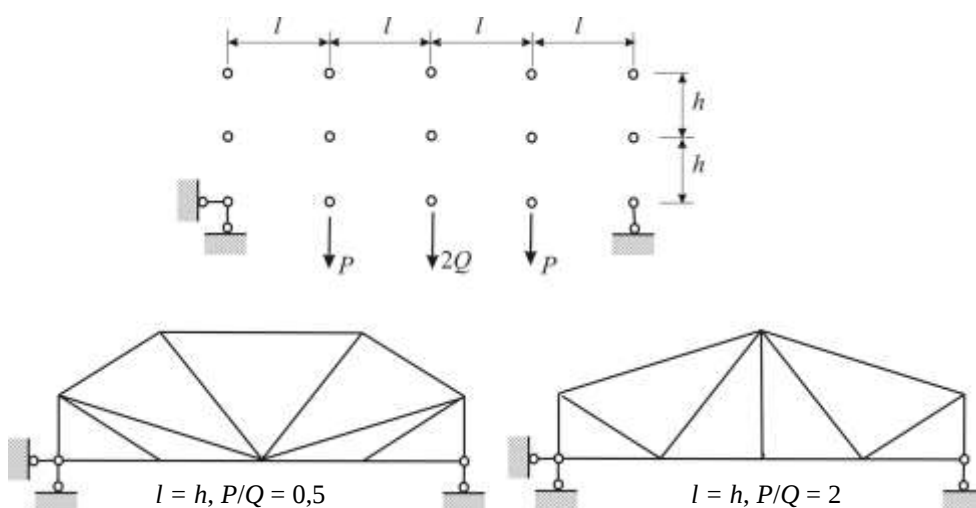


Рис. 6. Оптимальное очертание ферм по Дорну, Гомори и Гринбергу (неподвижные узлы)

Учет собственного веса был предложен в работе Мацюлявичюса [35]. Было обнаружено существование критического габарита конструкции, достижение которого вызывает настолько большой рост собственного веса, что конструкция из материала заданной прочности не способна его воспринять. А само по себе явление «неустойчивости по весу» было, по-видимому, впервые описано за десять лет до этого в работе А.И. Виноградова [13].

Детальный анализ подхода работы [86] выявил зависимость получаемых решений от начальной плотности сетки узлов. В работе [110] эта особенность объяснена тем, что в любой точке допустимой геометрической области с учетом дискретности используемых математических моделей реализуется одно из двух возможных «крайних» состояний: конструкционный материал либо содержится, либо отсутствует. Поэтому в постановке задачи структурной оптимизации силовых конструкций было предложено использовать специфические пористые материалы [27, 74]. Такой подход, использующий твердое деформируемое тело с переменными по объему характеристиками материала, допускает возможность появления в модели конструкции «переходных» зон между «крайними» вариантами состояния упругой среды.

В исследованиях этого направления упругая среда, вписанная в допустимую геометрическую область, делится на конечные элементы. За целевую функцию принимается податливость упругой среды, а ограничением является масса материала. Учитываются ограничения на эквивалентные напряжения, обобщенные перемещения и критические усилия потери устойчивости. Вариации проектных переменных приводят к вырождению элементов, передача усилий через которые нерациональна, и наоборот, выделяют из конструкции элементы, обеспечивающие рациональные пути передачи сил. В результате определяется теоретически оптимальная структура конструкции.

Другой подход основывался на решении задачи оптимизации анизотропных свойств двумерных элементов конструкций из локально-ортотропного материала [4]. Отыскивается наилучшая ориентация осей ортотропии упругой среды из условия минимума функционала интегральной жесткости. Полученное распределение ориентации осей ортотропии может быть использовано для формирования конструктивно-силовой схемы, поскольку найденные линии направления осей могут рассматриваться в качестве сосредоточенных элементов (типа ребер жесткости).

А вообще проблема оптимального проектирования тонкостенных конструкций в полном своем объеме чрезвычайно сложна и в ряде случаев для конструкций из композитов не имеет законченной математической формулировки [5, 38, 69]. Эта сложность обусловлена тем, что задачи оптимизации конструкций относятся к числу нелинейных задач механики, а также многообразием форм используемых в технике конструкций, широким спектром предъявляемых к ним требований и большим разнообразием условий их эксплуатации.

Наиболее распространенными критериями оптимальности являются требования минимума веса или минимума стоимости (когда материал конструкции неоднороден), т. к. при этом целевая функция характеризуется интегральным функционалом. Выполненные в этом направлении исследования в достаточной мере отображены в монографиях [1, 2, 5] и др. Из анализа ука-

званной литературы следует, что в абсолютном большинстве случаев рассматриваются лишь плоские конструкции или цилиндрические оболочки. Это обусловлено трудностями решения соответствующих задач оптимизации.

В рамках континуальной постановки задачи оптимального проектирования условие оптимальности вместе с уравнениями состояния и уравнениями для сопряженных переменных образуют замкнутую нелинейную краевую задачу относительно переменных состояния, проектирования и сопряженных функций [1]. Общие аналитические методы решения таких задач отсутствуют, поэтому развитие теории оптимального проектирования и эффективные методы решения прикладных задач, как правило, связаны с дискретизацией задач оптимизации. Однако, чтобы сузить пространство параметров проектирования (и упростить тем самым задачу), дискретизация осуществляется достаточно грубо (обычно конструкцию разбивают примерно на 10 элементов), что снижает достоверность полученных результатов.

Другой путь упрощения нелинейных задач оптимизации конструкций состоит в сужении подпространства управляющих функций и параметров проектирования. Это позволяет в ряде случаев получить решение задачи оптимизации в аналитической форме или свести к задаче минимизации функции нескольких переменных, но снижает эффективность оптимального проекта. Так, в работах [14, 32, 37, 59] методами математического программирования за счет соответствующего выбора анизотропии материала определены оптимальные параметры пластин и оболочек.

Расчет, ориентированный на оптимальное проектирование

Популярные программы расчета конструкций по методу конечных элементов разрабатывались без учета особенностей задачи оптимизации проекта. Имеются в виду следующие особенности: необходимость получения данных о чувствительности конструкции к изменению параметров расчетной модели, а также необходимость эффективного анализа большого числа различных проектов, имеющих в какой-то мере подобные конфигурации. Например, в большинстве программ, основанных на методе конечных элементов, строится матрица жесткости системы $\mathbf{K}$ для полного описания конкретного проекта. Однако, если учесть необходимость решения задачи оптимизации конструкции, то возникает задача выделения инвариантных частей матрицы $\mathbf{K}$ [75]. И уже первый опыт решения задач оптимального проектирования показал, что расчет конструкций для выбора оптимального проекта является специфической задачей, когда требуется выполнять расчет многих конструкций, которые в какой-то мере близки друг к другу [55].

Анализ чувствительности играет важную роль при расчете конструкций и при их оптимизации [64]. В рамках анализа чувствительности отыскиваются градиенты расчетных характеристик поведения конструкции (например, перемещений, напряжений, собственных частот и нормальных форм колебаний) в виде частных производных от этих характеристик по переменным проектирования (например, площадям поперечного сечения, толщинам, пространственному положению узлов). Настоятельная необходимость получения информации по анализу чувствительности как неотъемлемой части всякой современной про-

граммы расчета по методу конечных элементов диктуется следующими соображениями. При проведении анализа чувствительности получается ценная количественная информация, которая может служить ориентиром в процессе взаимодействия человека и машины. Кроме того, информация о чувствительности служит основой построения явных приближенных выражений характеристик поведения конструкций через переменные проектирования.

Следует добавить, что анализ чувствительности важен еще и с точки зрения проверки стабильности полученного оптимального решения. Дело в том, что имеются случаи, когда даже незначительное изменение параметров задачи приводит к резкому изменению результата. Так, в работе [41] показано, что оптимальные проекты пластин весьма чувствительны к отклонениям толщин от оптимальных, а для пластин, запроектированных на работу в режиме, близком к предельному, даже неполное приложение проектной нагрузки на некоторой части поверхности может привести к разрушению.

На эту особенность результата оптимизации может указать проверка чувствительности решения к изменению параметров. И не только переменных проектирования, которые варьировались в процессе решения, но и тех параметров, которые относились к числу заданных.

Основные направления в области исследований по расчету конструкций, ориентированному на их оптимальное проектирование, распадаются на три основные категории:

1) методы вычисления градиентов параметров поведения конструкции по переменным проектирования, т. е. анализ чувствительности конструкции [91, 92];

2) методы построения приближенных решений с помощью подмножества переменных состояния, отобранного по данным детального анализа [93, 118];

3) улучшение методики разбиения на конечные элементы в направлении большей подчиненности задаче оптимизации проектирования конструкций [75].

Две последние категории связаны с особенностями объекта проектирования и вряд ли могут быть универсальными.

Нетрадиционные задачи оптимизации

Традиционный подход к оптимизации конструкций предусматривает поиск наиболее рациональной структуры и распределения материала в конструкции, находящейся под действием заданной нагрузки или нескольких нагрузок из заданного множества, дискретного или непрерывного. Более широкий подход рассматривает задачи, в которых наряду с определением оптимальной конструктивной формы выясняется оптимальное распределение внешних силовых воздействий [22, 28, 34]. Варьирование распределением и значениями силовых воздействий на конструкцию в тех случаях, когда это возможно, позволяет дополнительно улучшить критерий качества без излишнего расхода материала. Варьирование внешними воздействиями возможно, например, при проектировании несущих конструкций складских и заводских помещений, на которых размещается тяжелый груз и оборудование, а также при проектировании судовых конструкций, производственных кранов и т. д.

Еще одной особенностью традиционного подхода является то обстоятельство, что основные параметры, определяющие назначение и способ использования объекта, считаются заданными «свыше» и, как правило, не подлежащими ревизии. Полагается, например, что требуется создать проект какого-то здания, где протекает определенный технологический процесс, а вопрос о том, можно ли такой процесс организовать под открытым небом и вообще не строить здание, даже не обсуждается. Вместе с тем иногда полезно нарушить эту традицию и рассмотреть более широкую постановку задачи оптимального проектирования, когда одновременно рассматривается задача оптимизации параметров технологического процесса и проектных решений здания или сооружения, где такой процесс реализуется. В качестве одного из немногих примеров такого подхода можно указать на работу [122], где рассматривалась задача оптимального проектирования ветроэнергетической установки. В этой работе к числу варьируемых параметров проектирования относились не только характеристики конструктивного решения башни (геометрия, толщина оболочки), но и основные рабочие характеристики ветроагрегата (его проектируемая мощность, высота установки и диаметр ветроколеса).

Круг решаемых задач расширяется за счет рассмотрения все более разнообразных условий работы конструкции. Так, достаточно большое внимание начало уделяться проблеме оптимального проектирования элементов силовых конструкций, условия эксплуатации которых связаны с воздействием агрессивных рабочих сред [42]. Большим разнообразием отличаются динамические задачи, где ищутся оптимальные решения по виброзащите, сейсмоизоляции, демпфированию колебаний, оптимизируются параметры гасителей колебаний и т. п. (см., например, [16, 36]).

Но решаются не только новые задачи. Более строгому анализу подвергаются задачи, решенные ранее, и, кроме того, ревизуются приемы и подходы, выработанные ранее и ставшие в некотором роде священными. Так, в работе [46] было выполнено исследование известной концепции, которая указывает на экономическую целесообразность непрерывного роста единичной мощности промышленных объектов (для сооружений – принцип концентрации материала в основных конструкциях). Оказалось, что если учитывать ограничения, которые определяются условиями безопасности, то упомянутая концепция имеет границу применимости, что является принципиально важным.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Арман, Ж.Л. Приложения теории оптимального управления системами с распределенными параметрами к задачам оптимизации конструкций / Ж.Л. Арман. – М. : Мир, 1977. – 142 с.
2. Баничук, Н.В. Оптимизация форм упругих тел / Н.В. Баничук. – М. : Наука, 1980. – 256 с.
3. Баничук, Н.В. К задаче оптимизации конструктивно-силовых схем при использовании анизотропной модели / Н.В. Баничук, В.И. Бирюк, Д.М. Епураш // Ученые записки. Т. XV. – 1984. – № 2. – С. 134–138.
4. Баничук, Н.В. Введение в оптимизацию конструкций / Н.В. Баничук. – М. : Наука, 1986. – 303 с.
5. Баничук, Н.В. Оптимизация элементов конструкций из композиционных материалов / Н.В. Баничук, В.В. Кобелев, Р.Б. Рикардс. – М. : Машиностроение, 1988. – 224 с.

6. *Белзецкий, С.И.* Обобщение задачи Виларсо, поставленной им в 12 томе мемуаров французской академии наук / С.И. Белзецкий // Известия собрания инженеров путей сообщения. Т. 17. – 1907. – № 1–2.
7. *Белзецкий, С.И.* Упругая линейная арка равного сопротивления для давлений, производимых на внешнюю поверхность арки сыпучим массивом / С.И. Белзецкий. – СПб., 1904.
8. *Богуславский, Н.Б.* Таблицы веса железнодорожных мостов под нагрузку / Н.Б. Богуславский // Журнал Министерства путей сообщения. – 1907. – № 8.
9. *Бубнов, И.Г.* Строительная механика корабля / И.Г. Бубнов. – Ч. 1. – СПб., 1912; Ч. 2. – СПб., 1914.
10. *Виноградов, А.И.* Исследование вопросов конструирования перекрытий по заданным напряжениям : автореф. дис. ... докт. техн. наук. – М. : МИИТ, 1948.
11. *Виноградов, А.И.* О статической неопределенности стержневых систем наименьшего объема / А.И. Виноградов // Исследования по теории сооружений. – Вып. 6. – М. : Госстройиздат, 1954. – С. 381–387.
12. *Виноградов, А.И.* О сходимости прочностного перерасчета в задачах оптимизации / А.И. Виноградов // Строительная механика и расчет сооружений. – 1971. – № 3. – С. 11–13.
13. *Виноградов, А.И.* Об учете собственного веса в стержневых системах с заданными напряжениями / А.И. Виноградов // Исследования по теории сооружений. – Вып. 8. – М. : Госстройиздат, 1959. – С. 523–534.
14. *Гололобов, В.И.* Определение толщины равнонапряженных упругих оболочек вращения / В.И. Гололобов, Л.А. Ильин // Прикладная механика. – 1970. – Т. 6. – Вып. 7. – С. 58–63.
15. *Гольдштейн, Ю.Б.* Вариационные задачи статики оптимальных стержневых систем / Ю.Б. Гольдштейн, М.А. Соломещ. – Л. : Изд-во Ленинградского ун-та, 1980. – 316 с.
16. *Гордеев, В.Н.* Исследование множества однотипных конструкций с параметрами, близкими к оптимальным / В.Н. Гордеев // Проектирование металлических конструкций : реф. сб. – Серия VII. – Вып. 8 (55). – М. : ЦНИПИАСС, 1974. – С. 12–15.
17. *Гордеев, Ю.В.* Оптимизация параметров сейсмоизолирующих фундаментов с учетом многозначности решений уравнений сейсмических колебаний сейсмоизолированных сооружений / Ю.В. Гордеев, А.А. Долгая, А.М. Уздин // Экспресс-информация «Сейсмостойкое строительство». – Вып. 4, 1997. – С. 44–47.
18. *Гринев, В.Б.* Оптимальное проектирование конструкций, имеющих заданные собственные частоты / В.Б. Гринев, А.П. Филиппов // Прикладная механика. – 1971. – Т. 7. – № 10.
19. *Гуревич, Я.И.* К вопросу о рациональном законе изменения сечений стержневых статически неопределимых систем / Я.И. Гуревич // Труды Хабаровского института инженеров железнодорожного транспорта. – Вып. 7. – М. : Трансжелдориздат, 1954.
20. *Дольберг, М.Д.* Об одном обобщении задачи Бубнова / М.Д. Дольберг // Украинский математический журнал. – 1951. – Т. III. – № 4. – С. 433–448.
21. *Израэлит, А.Б.* О гарантии положительных решений при расчете статически неопределимых балок и рам методом заданных напряжений / А.Б. Израэлит // Труды Всесоюзного заочного лесотехнического института. – М., 1956. – № 2.
22. *Кашковская (Макжанова), Я.В.* Оптимальное нагружение балочных систем / Я.В. Кашковская (Макжанова), Л.С. Ляхович // Известия вузов. Строительство. – 1998. – № 8. – С. 17–22.
23. *Кефели, А.И.* О теоретических весах сооружений / А.И. Кефели // Сборник Ленинградского института инженеров путей сообщения. – Вып. 96. – Л., 1927. – С. 247–266.
24. *Киселев, В.А.* Рациональные формы арок и подвесных систем / В.А. Киселев. – М. : Госстройиздат, 1953. – 353 с.
25. *Комаров, А.А.* Основы проектирования силовых конструкций / А.А. Комаров. – Куйбышев : Куйбышевское книжное изд-во, 1965. – 88 с.
26. *Комаров, А.А.* Силовое конструирование / А.А. Комаров // Труды Куйбышевского авиационного института. – Вып. 1. – Куйбышев, 1952. – С. 36–48.
27. *Комаров, В.А.* Проектирование силовых схем авиационных конструкций / А.А. Комаров // Актуальные проблемы авиационной науки и техники. – М. : Машиностроение, 1984. – С. 114–129.

28. Литвинов, В.Г. Некоторые обратные задачи теории упругости, связанные с оптимальным нагружением / В.Г. Литвинов // Прикладная механика. – 1975. – Т. XI. – Вып. 3. – С. 39–49.
29. Ляхович, Л.С. Некоторые вопросы оптимального проектирования строительных конструкций / Л.С. Ляхович, А.В. Перельмутер // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2014. – V. 10. – № 2. – Р. 14–23.
30. Ляхович, Л.С. Критерий оптимальности связей в задачах устойчивости и собственных колебаний упругих систем / Л.С. Ляхович, А.Н. Плахотин // Известия вузов. Строительство и архитектура. – 1986. – № 7. – С. 26–30.
31. Ляхович, Л.С. О рациональной расстановке связей и распределении материала в задаче о собственных колебаниях системы с конечным числом степеней свободы / Л.С. Ляхович, А.Б. Те, В.Ф. Фишер // Исследования по строительной механике. – Томск : Изд-во ТГУ, 1978. – С. 31–34.
32. Малков, В.П. Оптимизация конструкций по весу из условий прочности / В.П. Малков, Р.Г. Строгин // Методы решения задач упругости и пластичности. – Горький, 1971. – Вып. 4. – С. 138–149.
33. Мацюлявичюс, Д.А. Задача синтеза оптимальной конфигурации шарнирно-стержневой конструкции при постоянной нагрузке с учетом нагрузки от собственного веса / Д.А. Мацюлявичюс // Литовский механический сборник. – 1969. – № 2 (50). – С. 5–23.
34. Мацюлявичюс, Д.А. К вопросу о синтезе конфигурации упругой шарнирно-стержневой конструкции, воспринимающей максимальную нагрузку при ограниченном весе и сортаменте материала / Д.А. Мацюлявичюс // Литовский механический сборник. – 1968. – № 2 (3). – С. 16–21.
35. Мацюлявичюс, Д.А. К вопросу синтеза конфигурации стержневых статически определимых конструкций минимального веса / Д.А. Мацюлявичюс // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1965. – № 1.
36. Мижидон, А.Д. Оптимизационные методы решения задач виброзащиты / А.Д. Мижидон. – Улан-Удэ : БНЦ РАН, 1996. – 137 с.
37. Немировский, Ю.В. К теории строго безмоментных упругих и термоупругих оболочек / Ю.В. Немировский // Механика твердого тела : докл. польско-советского симпозиума, Новосибирск, 29–31 окт. 1974 г. – Варшава : Гос. научн. изд-во, 1978. – С. 231–242.
38. Немировский, Ю.В. Безмоментные упругие оболочки нулевой гауссовой кривизны / Ю.В. Немировский, Г.И. Старостин // Прикладная механика и техническая физика. – 1975. – № 6. – С. 103–115.
39. Николаи, Е.Л. Задача Лагранжа о наивыгоднейшем очертании колонн / Е.Л. Николаи // Известия С.-Петербургского политехнического института. – 1907. – Т. VIII. – Вып. 1. – С. 255–288.
40. Нудельман, Я.Л. Методы определения собственных частот и критических сил для стержневых систем / Я.Л. Нудельман. – М. : Гостехиздат, 1949. – 175 с.
41. Овчинников, И.Г. Оптимальные проекты гибких круглых пластин и их практическая реализуемость / И.Г. Овчинников, А.В. Бочкарев // Известия вузов. Строительство. – 2003. – № 6. – С. 10–15.
42. Овчинников, И.Г. Тонкостенные конструкции в условиях коррозионного износа. Расчет и оптимизация / И.Г. Овчинников, Ю.М. Почтман. – Днепропетровск : Изд-во ДГУ, 1995. – 192 с.
43. Пановко, Я.Г. К вопросу о выборе подъема сводов / Я.Г. Пановко // Сборник трудов МАДИ. – Вып. 2. – 1934. – С. 129–133.
44. Патон, Е.О. Вес железных мостов для железных и линейных дорог / Е.О. Патон. – Киев : Изд-во Политехнического института, 1903. – 59 с.
45. Пацкевич, Э.Р. Удельный момент сопротивления изгибу и его применение к расчету металлических балок / Э.Р. Пацкевич. – СПб. : Типография Эрлих, 1894. – 43 с.
46. Перельмутер, А.В. Концепция концентрации материала и требования безопасности / А.В. Перельмутер // Теория и практика расчета зданий, сооружений и элементов конструкций. Аналитические и численные методы : сб. трудов. – М. : МГСУ, 2011. – С. 286–291.
47. Перельмутер, А.В. Очерки по истории металлических конструкций / А.В. Перельмутер. – М. : Изд-во СКАД СОФТ; Изд-во АСВ, 2015. – 256 с.

48. Пузыревский, Н.П. Шлюзовые ворота и пропуск судов через них / Н.П. Пузыревский. – М. : Стройиздат, 1924.
49. Рабинович, И.М. К теории статически неопределимых ферм. Законы распределения усилий; метод заданных напряжений; начальные усилия в статически неопределимых фермах / И.М. Рабинович. – М. : Трансжелдориздат, 1933. – 136 с.
50. Радциг, Ю.А. Об определении наименьшего объема статически неопределимых ферм по заданным напряжениям / Ю.А. Радциг // Труды Казанского авиационного института. Т. 17. – Вып. 1. – Казань, 1946.
51. Ржаницын, А.Р. К вопросу о теоретическом весе стрелевых конструкций / А.Р. Ржаницын // Исследования по теории сооружений. – Вып. IV. – М. : Стройиздат, 1949. – С. 252–265.
52. Розов, И. Опыт теории арки равного сопротивления / И. Розов // Инженер. – 1904. – № 10–11. – С. 131.
53. Руднев, В.И. О рациональной форме сплошной упругой арки в связи с современными методами возведения / В.И. Руднев // Труды МИИТ. – Вып. 15. – М. : Транспечать, 1930.
54. Семиколенов, Г.С. Теория уравновешенных балок / Г.С. Семиколенов // Журнал Министерства путей сообщения, 1871.
55. Сергеев, Н.Д. Расчет статически неопределимых систем при их многоэтапной последовательной модификации / Н.Д. Сергеев // Строительная механика и расчет сооружений. – 1975. – № 6. – С. 11–16.
56. Слюсарчук, Ф.И. О регулярном расчете статически неопределимых ферм методом заданных напряжений / Ф.И. Слюсарчук // Труды Новосибирского института инженеров железнодорожного транспорта. – Вып. 8. – М. : Трансжелдориздат, 1952.
57. Смирнов, А.Ф. Стержни и арки минимального веса при продольном изгибе / А.Ф. Смирнов // Труды МИИТ. – Вып. 74. – М., 1950.
58. Смирнов, А.Ф. Устойчивость и колебания сооружений / А.Ф. Смирнов. – М. : Трансжелдориздат, 1958.
59. Соболев, Р.Б. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями / И.М. Соболев, Р.Б. Статников. – М. : Наука, 1981. – 112 с.
60. Стрелецкий, Н.С. Законы изменения веса металлических мостов / Н.С. Стрелецкий // Избранные труды. – М. : Стройиздат, 1968. – С. 335–367 [Впервые опубликовано в Сборнике трудов бюро инженерных исследований НТК НКПС. 1926. № 7].
61. Стрелецкий, Н.С. Законы изменения веса металлических мостов / Н.С. Стрелецкий // Труды научно-технического комитета НКПС. Сб. 8. – М. : Транспечать, 1926. – 100 с.
62. Филин, А.П. Об отыскании оптимальной оси трехшарнирной системы при работе ее на нескольких вариантах нагрузки / А.П. Филин, Е.С. Филалаева. – Казань : Изд-во КГУ, 1973. – С. 210–219.
63. Филин, А.П. Вопросы рационального проектирования мостовых арок / А.П. Филин // Труды Хабаровского института инженеров железнодорожного транспорта. – Вып. 3. – М. : Трансжелдориздат, 1953.
64. Хог, Э. Прикладное оптимальное проектирование: Механические системы и конструкции / Э. Хог, Я. Арора. – М. : Мир, 1983. – 478 с.
65. Хуберян, К.М. Расчет крестовых ферм на подвижную нагрузку по методу напряжений / К.М. Хуберян // Исследования по теории сооружений. – Вып. V. – М. : Госстройиздат, 1951. – С. 394–403.
66. Хуберян, К.М. К расчету статически неопределимых ферм / К.М. Хуберян // Труды Тбилисского научно-исследовательского института сооружений. – Вып. 32, 1938.
67. Хуберян, К.М. Метод напряжений / К.М. Хуберян // Исследования по теории сооружений. – Вып. IV. – М. : Стройиздат, 1949. – С. 164–176.
68. Ченцов, Н.Г. Стойки наименьшего веса / Н.Г. Ченцов // Труды ЦАГИ. Т. 265. – М., 1936.
69. Черевачкий, С.Б. О произвольных нитевых оболочках вращения, нагруженных давлением / С.Б. Черевачкий // Прочность и динамика авиационных двигателей : сб. статей. – М. : Машиностроение, 1966. – Вып. 4. – С. 20–30.
70. Чирас, А.А. Теория оптимизации упругопластических систем / А.А. Чирас, А.Э. Баркаускас, Р.П. Каркаускас. – Л., 1974. – 279 с.

71. Шимановский, В.Н. Оптимальное проектирование пространственных решетчатых покрытий / В.Н. Шимановский, В.Н. Гордеев, М.Л. Гринберг. – Киев : Будивельник, 1987. – 224 с.
72. Ясинский, Ф.С. О проектировании нормальных двугавровых сечений / Ф.С. Ясинский // Русский нормальный метрический сортамент фасонного железа. – СПб., 1900. – С. 13–16.
73. Banichuk, N.V. Optimization of axisymmetric membrane shells against brittle fracture / N.V. Banichuk, F.J. Barthold, M. Serra // *Meccanica*. – 2005. – V. 40. – № 2. – P. 135–145.
74. Bendsoe, M.P. Generating Optimal Topologies in Structural Design Using a Homogenization Method / M.P. Bendsoe, N. Kikuchi // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. – 1988. – V. 7. – P. 197–224.
75. Biernawski, A. O kształtowaniu kratownie na minimum potencjału / A. Biernawski, B. Grochowski // *Rozprawy Inżynierskie*. – 1960. – № 2.
76. Brandt, A. Kształtowanie wytrzymałości owe belki wsporakowej / A. Brandt, J. Ignaczak // *Rozprawy Inżynierskie*. – 1958. – XCIV. – № 1.
77. Brandt, A. O kształtowaniu kratownicy na minimum potencjału przez przesuwanie nieobciążonych węzłów aczających trzy przemy / A. Brandt, J. Kosmowski, Z. Wasiutynski // *Rozprawy Inżynierskie*. – 1957. – № 2.
78. Bhatia, K.G. Rapid Iterative Reanalysis for Automated Design / K.G. Bhatia // *NASA Technical Notes*. – 1971.
79. Calmann, K. Die graphische Statik / K. Calmann. – Zurich, 1866. – 527 s.
80. Chan, A.S.L. The Design of Michell Optimum Structures / A.S.L. Chan // *British Aeronautical Research Council R&M*. – 1960. – № 3303.
81. Chan, H.S. Optimum structural design and linear programming / H.S. Chan // *The College of Aeronautics, Cranfield, CoA Rept. Aero*. – 1964. – № 175.
82. Clausen, T. Über die Form architektonischer Säulen / T. Clausen // *Bulletin physico-mathématique de l'Académie (St. Petersburg)*. Bd. 9. – 1851. – S. 279–294.
83. Collington, Ed. Théorie élémentaire des ponts droites / Ed. Collington // *Ponts métalliques. Ponts américains, combles*. – Paris, 1865.
84. Dirksen, J. Hilfswerke für das Entwerfen der Brücken mit eisernen Unterbau / J. Dirksen. – 1905.
85. Dobbs, M.W. Application of Optimality Criteria to Automated Structural Design / M.W. Dobbs, R.B. Nelson // *AIAA Journal*. – 1976. – V. 14. – № 10. – P. 1436–1443.
86. Dorn, W.S. Automatic design of optimal structures / W.S. Dorn, R.E. Gomory, H.J. Greenberg // *Journal de mécanique*. – 1964. – V. 3. – № 1. – P. 25–52.
87. Fleury, C. Reconciliation of mathematical programming and optimality criteria approaches to structural optimization / C. Fleury // *Foundations of Structural Optimization: A Unified Approach*. – New York : John Wiley, 1982.
88. Foulkes, J. Linear programming and structural design / J. Foulkes // *Proceeding 2nd Symposium Bur. Of Stand US. Dept. of Commerce*. – 1955. – V. 1. – P. 27–29.
89. Foulkes, J. Minimum Weight Design and Theory of Plastic Collapse / J. Foulkes // *Quarterly of Applied Mathematics*. – 1953. – V. 19. – № 4. – P. 347–358.
90. Foulkes, J. The minimum weight design in structural frames / J. Foulkes // *Proceeding of Royal Society*. – 1954. – A223. – № 1155. – P. 482–484.
91. Fox, R.L. Constraint surface normals for structural synthesis techniques / R.L. Fox // *AIAA Journal*. – 1965. – V. 3. – P. 1516–1517.
92. Fox, R.L. Rates of change of eigenvalues and eigenvectors / R.L. Fox, M.P. Kapoor // *AIAA Journal*. – 1968. – V. 6. – P. 2426–2429.
93. Fox, R.L. An approximate analysis technique for design calculations / R.L. Fox, H. Miura // *AIAA Journal*. – 1971. – V. 9. – P. 177–179.
94. Galilei, G. Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla meccanica e i movimenti locali / G. Galilei. – Leida : Appresso gli Elseviri, 1638 [Русский перевод: Галилей, Г. Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки, относящихся к механике и местному движению / Г. Галилей. – М. : Гостехтеориздат, 1934].
95. Gallagher, R.H. Fully-stressed design / R.H. Gallagher // *Optimum Structural Design. Theory and Applications*. – London : John Wiley and Sons, 1973.
96. Gellatly, B.A. Procedure for Automated Minimum Weight Structural Design / B.A. Gellatly, R.H. Gallagher // *Aeronaut. Quarterly*. – 1966. – V. 14. – P. 332–342.

97. Gerber, G.H. Balkenträger mit freiliegenden / G.H. Gerber // Stützpunkten Bavarian patent. – 1866.
98. Gruver, W.A. Gradient Projection and Reduced Gradient Algorithms Based on an Augmented Lagrangian / W.A. Gruver, C. Shafroth // Proceedings of Operations Research Society of American Natural Convention. – Piadeldia : March-Apriel, 1976.
99. Grycz, J. O przekształceniach ustroju szterowezlowego przez wymiane pretow / J. Grycz // Rozprawy Inżynierskie. – 1960. – № 1.
100. Heimann, H. Beitrag zur Berechnung statisch unbestimmter Fachwerke / H. Heimann. – Berlin, 1928. – 24 s.
101. Heinzerling, A. Theorie und Berechnung der gestüssten und aufgehängten Charnierbrückenträger / A. Heinzerling // Der Civiling. – 1867. – B. 13.
102. Hemp, W.S. Theory of Structural Design / W.S. Hemp. – Cranfield College of Aeronautics, 1958. – COA Report. – № 115.
103. Heyman, J. Plastic Design of Beam and Plate Frames for Minimum Material Consumptions / J. Heyman // Quarterly of Applied Mathematics. – 1951. – V. 8. – № 4. – P. 373–381.
104. Hofmeister, L. Prestressing in Structural Synthesis / L. Hofmeister, L. Felton // AIAA Journal. – 1970. – V. 8. – № 2. – P. 363–364.
105. Hooke, R. Lectures de potentia restitutiva, or of spring explaining the power of springing bodies / R. Hooke. – London : John & Martin Printer to the Royal Society, 1678.
106. Hopkins, H.G. Limits of Economy of Material in Plates / H.G. Hopkins, W. Prager // Journal of Applied Mechanics. – 1955. – V. 22. – № 3. – P. 372–374.
107. Kalaba, R. Design of minimal weight structures for given reliability and cost / R. Kalaba // Journal of Aero/Space Science. – 1962. – V. 29. – № 3.
108. Klein, B. Further remarks on the direct use of extremal principles in solving certain optimizing problem involving inequalities / B. Klein // Journal of the Operations Research Society of America. – 1955. – V. 3. – P. 548–554.
109. Klusalaas, J. Minimum Weight Design of Structures via Optimality Criteria / J. Klusalaas // NASA Technical Notes D-71715. – 1972.
110. Kohn, R.V. Optimal Design and Relaxation of Variational Problems / R.V. Kohn, G. Strang // Communic. Pure and Appl. Math. – 1986. – V. 39. – P. 113–137 (part 1); P. 139–182 (part 2); P. 333–350 (part 3).
111. Lagrange, J.-L. Sur la figure des collonnes / J.-L. Lagrange // Mescellanea Taurinensia. – 1770–1773. – V. 5. – P. 123.
112. Legay. Memoire sur la trace et le calcul des voates en maconnerie / Legay // Annales des ponts et chaussées. – 1900. – № 4. – P. 19–34.
113. Levy, M. La statique graphique et ses applicatuions aux constructions. IV partie / M. Levy. – Paris, 1874.
114. Masur, E.F. Optimum Stiffness and Strength of Elastic Structures / E.F. Masur // Journal of the Engineering Mechanics Division. Proceeding of ASCE. – 1970. – V. 96. – № EM5. – P. 621–640.
115. Maxwell, J.C. Scientific papers II / J.C. Maxwell. – Cambridg : Univer. Press, 1869. – P. 175–177.
116. Michell, A. The limits of economy in frame-structures / A. Michell // Phyl. Mag. – 1904. – V. 8. – № 47. – P. 589–597.
117. Moses, F. Minimum Weight Design of Structures with Application to Elastic Grillages / F. Moses, S. Onoda // Internationa Journal of Numerical Methods in Engineering. – 1966. – V. 1. – № 4. – P. 311–331.
118. Noor, A.K. Approximate techniques of structural reanalysis / A.K. Noor, H.E. Lowder // Computer and Structures. – 1974. – V. 4. – P. 801–812
119. Palmer, A. Optimal structural design by dynamic programming / A. Palmer // Journal of Structural Division. Proceeding ASCE, 1968, No ST8
120. Pearson, C.E. Structural design by high-speed computing machines / C.E. Pearson // Conference on Electronic Computation of ASCE. – Kansas-SitY, 1958.
121. Pearson, C.W. Structural design by high speed computing machines / C.W. Pearson // Proceedings of the First Conference on Electronic Computation, ASCE. – New York, 1958. – P. 417–436.

122. *Perelmuter, A.* Parametric Optimization of Steel Shell Towers of High-Power Wind Turbines / A. Perelmuter, V. Yurchenko // *Procedia Engineering*. – 2013. – V. 57. – P. 895–905.
123. *Pippard, A.J.S.* On a method for the direct design of framed structures, having redundant bracing / A.J.S. Pippard // *Aeronautical Research Committee, Reports and memoranda*. – 1922. – № 793.
124. *Pope, G.G.* Structural Design Applications of Mathematical Programming Techniques / G.G. Pope, L.A. Schmit // AGARD-AG-149-71. Nort Atlantic Treaty Organization, Rue Ancelle 9Z. – Neuilly-Sur-Seine, France, 1971.
125. *Prager, W.* Minimum-weight design of a portal frame / W. Prager // *Journal of the Engineering Mechanics Division* // *Proceeding of ASCE*. – 1956. – V. 82. – № EM4. – P. 1073-1–1073-10.
126. *Prager, W.* Introduction to Structural Optimization / W. Prager. – Springer-Verlag, Vienna, 1974 [Русский перевод: Прагер, В. Основы теории оптимального проектирования конструкций / Прагер. – М. : Мир, 1977 – 109 с.].
127. *Prager, W.* Problems of Optimal Structural Design / W. Prager, J.E. Taylor // *Journal of Applied Mechanics*. – 1968. – V. 35. – № 1. – P. 102–106.
128. *Prager, W.* Optimization of the structural geometry / W. Prager, G.I.N. Rozvany // *Dynamical Systems (proc. Int. Conf. Gainesville, Florida)*. – New York : Academic Press, 1977. – P. 265–293.
129. *Razani, R.* Behavior of Fully Stressed Design of Structures and Its Relationship to Minimum-Weight Design / R. Razani // *AIAA Journal*. – 1965. – V. 3. – № 12. – P. 2262–2268 [Русский перевод: Разани, Р. Поведение равнонапряженной конструкции и ее отношение к конструкции минимального объема / Р. Разани // *Ракетная техника и космонавтика*. – 1965. – Т. 3. – № 12. – С. 115–124].
130. *Reinschmidt, K.F.* Iterative design and structural optimization / K.F. Reinschmidt, C.A. Cornell, J.F. Brotchie // *Journal of Structural Division. Proceeding ASCE*. – 1966. – № ST6.
131. *Rozvany, G.I.N.* Optimal Design of Flexural Systems: beams, grillages, slabs, plates and shells / G.I.N. Rozvany. – Oxford : Pergamon Press, 1976 [Русский перевод: Рожваны, Д. Оптимальное проектирование изгибаемых систем / Д. Рожваны. – М. : Стойиздат, 1980. – 316 с.].
132. *Salimbeni.* Degli archi e delle volte / Salimbeni. – Verona, 1787. – 320 p.
133. *Schmidt, L.C.* Fully-stressed design of elastic redundant trusses under alternative load systems / L.C. Schmidt // *Australian J. Appl. Sci.* – 1958. – № 9. – P. 337–348.
134. *Schmit, L.A.* Structural design by systematic synthesis / L.A. Schmit // *Proceedings of the 2nd National Conference on Electronic Computation (American Society of Civil Engineers, New York, 1960)*. – P. 105–132.
135. *Schmit, L.A.* Structural design by systematic synthesis / L.A. Schmit // *Proceeding of the 2nd ASCE Conference on Electronic Computation*. – New York : ASCE, 1960. – P. 105–132.
136. *Schmit, L.A.* Structural synthesis by combining approximation concepts and dual methods / L.A. Schmit, C. Fleury // *AIAA Journal*. – 1980. – V. 18. – P. 1252–1260.
137. *Strang, G.* Henky-Prandtl nets and constrained Michell trusses / G. Strang, R. Kohn // *Comp. Meth. in Appl. Mech. Engrg.* – 1983. – V. 36. – № 2. – P. 207–222.
138. *Toakley, A.R.* Optimum design using available sections / A.R. Toakley // *Journal of Structural Division. Proceeding ASCE*. – 1968. – № ST5.
139. *Turner, H.K.* Optimal design for stability under multiple loads / H.K. Turner, R.H. Plaut // *Proceeding ASCE*. – 1980. – V. 106. – P. 1365–1382.
140. *Venkayya, V.B.* Design of Optimum Structures / V.B. Venkayya // *Computer and Structures*. – 1971. – V. 1. – № 1–2. – P. 265–309.
141. *Villarceau.* Sur l'établissement des arches de point, envisage de point de vue de la plus grande stable / Villarceau // *Comp. Rend. de l'Acad. des Science de Paris. T. III.* – 1846. – № 9.
142. *Wasiutynski, Z.* O kształtowaniu wytrzymałościowym / Z. Wasiutynski. – Warszawa : Academia Nauk Technicznych, 1939.
143. *Wasiutynski, Z.* On the congruency of the forming according to the minimum potential energy with that according to the equal strength / Z. Wasiutynski // *Bull. Acad. Pol. Sci. Techn.* – 1960. – V. 8. – № 6. – P. 259–268.
144. *Wasiutynski, Z.* O przekształcaniu kratownic przez wprowadzenie nowych pretów / Z. Wasiutynski // *Inz. Budow.* – 1950. – № 11.
145. *Young, T.* Cours of Lectures on Natural Philosophy / T. Young. – 1807.

REFERENCES

1. Arman Zh.L. Prilozheniya teorii optimal'nogo upravleniya sistemami s raspredelennymi parametrami k zadacham optimizatsii konstruktii [Applications of optimum system control theory with distributive parameters of structural optimization]. Moscow: Mir Publ., 1977. 142 p. (rus)
2. Banichuk N.V. Optimizatsiya form uprugikh tel [Optimization of elastic body shapes]. Moscow : Nauka Publ., 1980. 256 p. (rus)
3. Banichuk N.V., Biryuk V.I., Epurash D.M. K zadache optimizatsii konstruktivno-silovykh skhem pri ispol'zovanii anizotropnoi modeli [Optimization of structural and main circuits in using anisotropic model]. 1984. V. 25. No. 2. Pp. 134–138. (rus)
4. Banichuk N.V. Vvedenie v optimizatsiyu konstruktii [Introduction in structural optimization]. Moscow : Nauka Publ., 1986. 303 p. (rus)
5. Banichuk N.V., Kobelev V.V., Rikards R.B. Optimizatsiya elementov konstruktii iz kompozitsionnykh materialov [Optimization of composite material structural elements]. Moscow : Mashinostroenie-1 Publ., 1988. 224 p. (rus)
6. Belzetskii S.I. Obobshchenie zadachi Vilarso, postavlennoi im v 12 tome memuarov frantsuzskoi akademii nauk [Generalization of Villardeau problem]. *Izvestiya sobraniya inzhenerov putei soobshcheniya*, 1907. V. 17. No. 1–2. (rus)
7. Belzetskii S.I. Uprugaya lineinaya arka ravnogo soprotivleniya dlya davlenii, proizvodimykh na vneshnyuyu poverkhnost' arki sypuchim massivom [Elastic linear arch of uniform strength for loads exerted by granular mass on external surface]. St.-Petersburg, 1904. (rus)
8. Boguslavskii N.B. Tablitsy, vesa zheleznodorozhnykh mostov pod nagruzku [Tables, weights of railway bridges under load]. *Zhurnal ministerstva putei soobshcheniya*, 1907, No. 8. (rus)
9. Bubnov I.G. Stroitel'naya mekhanika korablya [Structural design of ships]. St.-Petersburg, 1912. Pt. 1; 1914. Pt. 2. (rus)
10. Vinogradov A.I. Issledovanie voprosov konstruirovaniya perekrytii po zadannym napryazheniyam. Avtoreferat diss. ... d-ra tekhn. nauk [Problems of floor design using given stresses. DSC Thesis]. Moscow : MIIT Publ., 1948. (rus)
11. Vinogradov A.I. O staticheskoi neopredelivosti sterzhnevyykh sistem naimen'shego ob'ema. Issledovaniya po teorii sooruzhenii [Static indeterminate bar system of minimum volume. Theory of redundancy]. Moscow : Gosstroyizdat Publ., 1954. V. 6. Pp. 381–387. (rus)
12. Vinogradov A.I. O skhodimosti prochnostnogo pererashcheta v zadachakh optimizatsii [Strength recalculation and optimization problem convergence]. *Stroitel. mekh. i raschet sooruzhenii*, 1971, No. 3 Pp. 11–13. (rus)
13. Vinogradov A.I. Ob uchete sobstvennogo vesa v sterzhnevyykh sistemakh s zadannymi napryazheniyami [Dead weight in bar systems with given directions]. *Issledovaniya po teorii sooruzhenii*. Moscow : Gosstroyizdat Publ., 1959. No. 8. Pp. 523–534. (rus)
14. Gololobov V.I., Il'in L.A. Opredelenie tolshchiny ravnonapryazhennykh uprugikh obolochek vrashcheniya [Detection of thickness of equally directed elastic envelopes of rotation]. *International Applied Mechanics*. 1970. V. 6. No. 7. Pp. 58–63. (rus)
15. Gol'dshteyn Yu.B., Solomeshch M.A. Variatsionnye zadachi statiki optimal'nykh sterzhnevyykh sistem [Variation static problems of optimum bar systems]. Leningrad : Izdatel'stvo Leningradskogo universiteta, 1980. 316 p. (rus)
16. Gordeev V.N. Issledovanie mnozhestva odnotipnykh konstruktii s parametrami, blizkimi k optimal'nym [Research of multiple similar structures with parameters close to optimum]. Moscow: TsNIPIASS Publ., 1974. V. 8. Pp. 12–15. (rus)
17. Gordeev Yu.V., Dolgaya A.A., Uzdin A.M. Optimizatsiya parametrov seismoizoliruyushchikh fundamentov s ucheto mnogoznachnosti reshenii uravnenii seismicheskikh kolebani seismoizolirovannykh sooruzhenii [Antiseismic foundation optimization accounting for seismic oscillation equations]. *Seismostoitkie stroitel'stvo*. 1997. V. 4. Pp. 44–47. (rus)
18. Grinev V.B., Filippov A.P. Optimal'noe proektirovanie konstruktii, imeyushchikh zadannye sobstvennye chastoty [Optimum structural design with eigenfrequency]. *International Applied Mechanics*. 1971. V. 7. No. 10. (rus)
19. Gurevich Ya.I. K voprosu o ratsional'nom zakone izmeneniya sechenii sterzhnevyykh staticheskoi neopredelimykh sistem [Rational law of sectional change of statically indeterminate bar

- systems]. *Trudy Khabarovskogo instituta inzhenerov zheleznodorozhnogo transporta*. Moscow : Transzheldorizdat. V. 7. 1954. (rus)
20. Dol'berg M.D. Ob odnom obobshchenii zadachi Bubnova [Bubnov task generalization]. *Ukrainskii matematicheskii zhurnal*. 1951. V. 3. No. 4. Pp. 433–448. (rus)
21. Izraelit A.B. O garantii polozhitel'nykh reshenii pri raschete staticheskii neopredelimykh balok i ram metodom zadannykh napryazhenii [Positive design solutions of static indeterminate beams using given directions]. *Trudy Vsesoyuznogo zaochnogo lesotekhnicheskogo institute*. Moscow : 1956. No. 2. (rus)
22. Kashkovskaya Ya.V. (Makzhanova), Lyakhovich L.S. Optimal'noe zagruzhenie balochnykh sistem [Optimum loading of beam systems]. *News of Higher Educational Institutions. Construction*. 1998. No. 8. Pp. 17–22. (rus)
23. Kefeli A.I. O teoreticheskikh vesakh sooruzhenii [Theoretical weights of buildings]. *Sbornik Leningradskogo instituta inzhenerov putei soobshcheniya*. Leningrad, 1927. V. 96. Pp. 247–266. (rus)
24. Kiselev V.A. Ratsional'nye formy arok i podvesnykh sistem [Rational arch forms and suspended systems]. Moscow : Gosstroyizdat Publ, 1953. 353 p. (rus)
25. Komarov A.A. Osnovy proektirovaniya silovykh konstruktsii [Design basics of bearing structures]. Kuibyshev : Kuibyshevskoe knizhnoe izd-vo, 1965. 88 p. (rus)
26. Komarov A.A. Silovoe konstruirovaniye [Bearing design]. *Trudy Kuibyshevskogo aviatsionnogo instituta*. Kuibyshev, 1952. No. 1. Pp. 36–48. (rus)
27. Komarov, V.A. Proektirovaniye silovykh skhem aviatsionnykh konstruktsii [Design of aviation bearing structures]. *Aktual'nye problemy aviatsionnoi nauki i tekhniki*. Moscow : Mashinostroenie-1 Publ., 1984. Pp. 114–129. (rus)
28. Litvinov V.G. Nekotorye obratnye zadachi teorii uprugosti, svyazannye s optimal'nym nagruzheniem [Inversed problems of elasticity theory]. *International Applied Mechanics*. 1975. No. XI. V. Z. Pp. 39–49. (rus)
29. Lyakhovich L.S., Perel'muter A.V. Nekotorye voprosy optimal'nogo proektirovaniya stroitel'nykh konstruktsii [Optimum design of building structure]. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 2014, V. 10, No 2. Pp. 14–23. (rus)
30. Lyakhovich L.S., Plakhotin A.N. Kriterii optimal'nosti svyazei v zadachakh ustoiichivosti i sobstvennykh kolebaniy uprugikh sistem [Criterion of optimum connection in stability problems with eigenfrequency]. *News of Higher Educational Institutions. Construction and Architecture*. 1986. No. 7. Pp. 26–30. (rus)
31. Lyakhovich L.S., Te A.B., Fisher V.F. O ratsional'noi rasstanovke svyazei i raspredelenii materiala v zadache o sobstvennykh kolebaniyakh sistemy s konechnym chislom stepenei svobody [Rational connections and material distribution in eigenfrequency problem]. *Issledovaniya po stroitel'noi mekhanike*. Tomsk : TSU Publ., 1978. Pp. 31–34. (rus)
32. Malkov V.P., Strogina R.G. Optimizatsiya konstruktsii po vesu iz usloviy prochnosti [Structural optimization by weight]. *Metody resheniya zadach uprugosti i plastichnosti*. 1971. No. 4. Pp. 138–149. (rus)
33. Matsulyavichyus D.A. Zadacha sinteza optimal'noi konfiguratsii sharnirno-sterzhnevoi konstruktsii pri postoyanno nagruzke s uchetom nagruzki ot sobstvennogo vesa [Synthesis of optimum configuration of hinge structure under dead load and weight]. *Litovskii mekhanicheskii sbornik*. 1969. No. 2. Pp. 5–23 (rus)
34. Matsulyavichyus D.A. K voprosu o sinteze konfiguratsii uprugoi sharnirno-sterzhnevoi konstruktsii, vosprinimayushchei maksimal'nuyu nagruzku pri ogranichenom vese i sortamente materiala [Synthesis of optimum configuration of hinge structure under dead load, weight, material assortment]. *Litovskii mekhanicheskii sbornik*. 1968. No. 2. Pp. 16–21. (rus)
35. Matsulyavichyus D.A. K voprosu sinteza konfiguratsii sterzhnevyykh staticheskii opredelimykh konstruktsii minimal'nogo vesa [Synthesis of optimum configuration of minimum weight structure]. *Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Engineering Cybernetics*. 1965. No. 1. (rus)
36. Mizhidon A.D. Optimizatsionnye metody resheniya zadach vibrozashchity [Optimization of vibration protection problems]. Ulan-Ude : BNTs RAN, 1996. 137 p. (rus)

37. *Nemirovskii Yu.V.* K teorii strogo bezmomentnykh uprugikh i termouprugikh obolochek [Theory of elastic and thermal-resistant envelopes]. *Proc. Poland Symp. 'Solid Mechanics'*, Novosibirsk, Oct. 29–31 1974. Warsaw : Gos. nauchn. izd-vo, 1978. Pp. 231–242. (rus)
38. *Nemirovskii Yu.V., Starostin G.I.* Bezmomentnye uprugie obolochki nulevoi gaussovoi krivizny [Torque-free elastic envelopes]. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 1975. No. 6. Pp. 103–115. (rus)
39. *Nikolai E.L.* Zadacha Lagranzha o naivygodneishem ochertanii kolonn [Lagrange task on advantageous column layout]. *Izvestiya S.-Peterburgskogo politekhnicheskogo institute*. 1907. V. VIII, No. 1. Pp. 255–288. (rus)
40. *Nudel'man Ya.L.* Metody opredeleniya sobstvennykh chastot i kriticheskikh sil dlya sterzhnevnykh sistem [Detection of eigenfrequency and critical load in bar systems]. Moscow : Gostekhizdat Publ., 1949. 175 p. (rus)
41. *Ovchinnikov I.G., Bochkarev A.V.* Optimal'nye proekty gibkikh kruglykh plastin i ikh prakticheskaya realizuemost' [Optimum structure of flexible plates and their implementation]. *News of Higher Educational Institutions. Construction*. 2003. No. 6. Pp. 10–15. (rus)
42. *Ovchinnikov I.G., Pochtman Yu.M.* Tonkostennye konstruksii v usloviyakh korrozionnogo iznosa. Raschet i optimizatsiya [thin wall structures in corrosion wear conditions. Design and optimization]. Dnepropetrovsk : DSU Publ., 1995. 192 p. (rus)
43. *Panovko Ya.G.* K voprosu o vybore pod"ema svodov [Towards roof rise]. *Proc. MADI*. 1934 V. 2, Pp. 129–133. (rus)
44. *Paton E.O.* Ves zheleznykh mostov dlya zheleznykh i lineinykh dorog [Metal bridge weight for railways and linear roads]. Kiev: *Izdatel'stvo Politekhnicheskogo institute*. 1903. 59 p. (rus)
45. *Patskevich E.R.* Udel'nyi moment soprotivleniya izgibu i ego primenenie k raschetu metallicheskh balok [Specific moment of bend resistance and its use in metal beam design]. St-Petersburg : Tipografiya Erlikh, 1894. 43 p. (rus)
46. *Perel'muter A.V.* Kontseptsiya kontsentratsii materiala i trebovaniya bezopasnosti [Concept of material concentration and safety requirements]. *Teoriya i praktika rascheta zdaniy, sooruzheniy i elementov konstruksii Analiticheskie i chislennye metody*. Moscow : MGSU Publ., 2011. Pp. 286–291(rus)
47. *Perel'muter A.V.* Ocherki po istorii metallicheskh konstruksii [History of metal structures]. Moscow : SKAD SOFT Publ., ASV Publ., 2015. 256 p. (rus)
48. *Puzyrevskii N.P.* Shlyuzovye vorota i propusk sudov cherez nikh [Flood gates and ships]. Moscow : Stroyizdat Publ., 1924. (rus)
49. *Rabinovich I.M.* K teorii staticheskii neopredelimykh ferm [Towards theory of statically indeterminate trusses]. *Zakony raspredeleniya usiliy; metod zadannykh napryazheniy; nachal'nye usiliya v staticheskii neopredelimykh fermakh*. Moscow : Transzheldorizdat, 1933. 136 p. (rus)
50. *Radtsig Yu.A.* Ob po zadannym napryazheniyam. opredelenii naimen'shego ob"ema staticheskii neopredelimykh ferm [Minimum volume of statically indeterminate trusses]. *Trudy Kazanskogo aviatsionnogo institute*. 1946. V. 17. No. 1. (rus)
51. *Rzhanitsyn A.R.* K voprosu o teoreticheskom vese strezhnevnykh konstruksii [Towards theoretical weight of bar systems]. *Issledovaniya po teorii sooruzhenii*. Moscow : Stroyizdat Publ., 1949. V. 4. Pp. 252–265. (rus)
52. *Rozov I.* Opyt teorii arki ravnogo soprotivleniya [Theory of equal resistance arch]. *Inzhener*. 1904. No. 10–11, P. 131. (rus)
53. *Rudnev V.I.* O ratsional'noi forme sploshnoi uprugoi arki v svyazi s sovremennymi metodami vozvedeniya [Rational shape of continuous elastic arch and modern methods of building]. *Tudy MIIT*. 1930. V. 15. (rus)
54. *Semikolenov G.S.* Teoriya uravnoveshennykh balok [Theory of balanced beams]. *Zhurnal Ministerstva putey soobshcheniya*, 1871. (rus)
55. *Sergeev N.D.* Raschet staticheskii neopredelimykh sistem pri ikh mnogoetapnoi posledovatel'noi modifikatsii [Statically indeterminate system design at multistage modification]. *Stroit. mekh. i raschet sooruzhenii*. 1975. No. 6. Pp. 11–16. (rus)
56. *Slyusarchuk F.I.* O regul'yarnom raschete staticheskii neopredelimykh ferm metodom zadannykh napryazheniy [Regular calculation of statically indeterminate trusses by given stresses]. *Trudy Novosibirskogo instituta inzhenerov zheleznodorozhnogo transporta*. 1952. V. 8. (rus)

57. Smirnov A.F. Sterzhni i arki minimal'nogo vesa pri prodol'nom izgibe [Bars and arches of minimum weight at longitudinal bending]. *Tudy MIIT*. 1950. V. 74. (rus)
58. Smirnov A.F. Ustoichivost' i kolebaniya sooruzhenii [Stability and vibrations of buildings]. Moscow : Transzheldorizdat, 1958. (rus)
59. Sobol' I.M., Statnikov R.B. Vybor optimal'nykh parametrov v zadachakh so mnogimi kriteriyami [Optimum parameters in problems with multiple criteria]. Moscow : Nauka Publ., 1981. 112 p. (rus)
60. Streletskii N.S. Zakony izmeneniya vesa metallicheskih mostov [Laws of weight change of metal bridges]. Moscow : Stroyizdat Publ., 1968. Pp. 335–367. (rus)
61. Streletskii N.S. Zakony izmeneniya vesa metallicheskih mostov [Laws of weight change of metal bridges]. Moscow : Transpechat' Publ., 1926. 100 p. (rus)
62. Filin A.P., Filalava E.S. Ob otskani optimal'noi osi trekhsharnimoi sistemy pri rabote ee na neskol'kikh variantakh nagruzki [search for optimum axis of three-hinge system under different loads]. Kazan' : Kazan University Publ., 1973. Pp. 210–219. (rus)
63. Filin A.P. Voprosy ratsional'nogo proektirovaniya mostovykh arok [Rational design of bridge arches]. *Trudy Khabarovskogo instituta inzhenerov zheleznodorozhnogo transporta*. Moscow : Transzheldoroizdat, 1953. V. 3 (rus)
64. Khog E, Arora Ya. Prikladnoe optimal'noe proektirovanie: mekhanicheskie sistemy i konstruktii [Applied optimum design: mechanical systems and structures]. Moscow : Mir Publ., 1983. 478 p. (rus)
65. Khuberyan K.M. Raschet krestovykh ferm na podvizhnuyu nagruzku po metodu napryazhenii issledovaniya po teorii sooruzhenii [Movable load design of cross truss using theory of structures]. Moscow : Gosstroyizdat Publ, 1951. V. 5. Pp. 394–403. (rus)
66. Khuberyan K.M. K raschetu staticheski neopredelimykh ferm [Calculation of statically indeterminate trusses]. *Trudy Tbilisskogo nauchno-issledovatel'skogo instituta sooruzhenii*. 1938. V. 32. (rus)
67. Khuberyan K.M. Metod napryazhenii [Stress method]. *Issledovaniya po teorii sooruzhenii*. 1949. V. 4. Pp. 164–176. (rus)
68. Chentsov N.G. Stoiki naimen'shego vesa [Minimum weight buildings]. *Trudy TsAGI*. 1936. V. 265. (rus)
69. Cherevatskii S.B. O proizvol'nykh nitevykh obolochkakh vrashcheniya, nagruzhennykh davleniem [Rotating envelope derivation under pressure]. *Coll. Papers 'Strength and dynamics of aircraft engines'*. 1966. V. 4. Pp. 20–30. (rus)
70. Chiras A.A., Barkauskas A.E., Karkauskas R.P. Teoriya optimizatsii uprugoplasticheskikh sistem [Theory of optimization of elastoplastic systems]. Leningrad, 1974. 279 p. (rus)
71. Shimanovskii V.N., Gordeev V.N., Grinberg M.L. Optimal'noe proektirovanie prostranstvennykh reshchatykh pokrytiy [Optimum design of spatial lattice coverings]. Kiev : Budivel'nyk Publ., 1987. 224 p. (rus)
72. Yasinskiy F.S. O proektirovanii normal'nykh dvutavrovyykh sechenii [H-beam crossing design]. *Russkii normal'nyi metriceskii sortament fasonnogo zheleza*. St-Petersburg, 1900. Pp. 13–16. (rus)
73. Banichuk N.V., Barthold F.J., Serra M. Optimization of axisymmetric membrane shells against brittle fracture. *Meccanica*. 2005. V. 40. No. 2. Pp. 135–145.
74. Bendsoe M.P., Kikuchi N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1988. V. 7. Pp. 197–224.
75. Biernawski A., Grochowski B. O kształtowaniu kratownie na minimum potencjalu. *Rozprawy Inżynierskie*. 1960. No. 2.
76. Brandt A., Ignaczak J. Kształtowanie wytrzymałościowe belki wsporakowej. *Rozprawy Inżynierskie*. 1958. V. XCIV. No. 1.
77. Brandt A., Kosmowski J., Wasiutynski Z. O kształtowaniu kratownic na minimum potencjalu przez przesuwanie nicobciążonych węzłów aczających trzy prety. *Rozprawy Inżynierskie*. 1957. No. 2.
78. Bhatia K.G. Rapid iterative reanalysis for automated design. NASA Technical Notes. 1971.
79. Calmann K. Die graphische Statik. Zurich, 1866. 527 p.

80. Chan A.S.L. The design of Michell optimum structures. *British Aeronautical Research Council R&M*. 1960. No. 3303.
81. Chan H.S. Optimum structural design and linear programming. The College of Aeronautics, Cranfield, *CoA Rept. Aero*. No. 175. 1964.
82. Clausen T. Über die Form achitektonischer Säulen. *Bulletin physico-mathématique de l'Académie*. 1851. V. 9. Pp. 279–294.
83. Collington Ed. Théorie élémentaire des poutres droites. Ponts métalliques. Ponts américains, combles. Paris, 1865.
84. Dirksen J. Hilfswerke für das Entwerfen der Brücken mit eisernen Unterbau. 1905.
85. Dobbs M.W., Nelson R.B. Application of optimality criteria to automated structural design. *AAIA Journal*. 1976. V. 14. No. 10. Pp. 1436–1443.
86. Dorn W.S., Gomory R.E., Greenberg H.J. Automatic design of optimal structures. *Journal de mécanique*. 1964. V. 3. No. 1. Pp. 25–52.
87. Fleury C. Reconciliation of mathematical programming and optimality criteria approaches to structural optimization. Foundations of structural optimization: A unified approach, New York : John Wiley, 1982.
88. Foulkes J. Linear programming and structural design. *Proc. 2nd Symp. Bur. of Stand US*. Dept. of Commerce. 1955. V. 1. Pp. 27–29.
89. Foulkes J. Minimum weight design and theory of plastic collapse. *Quarterly of Applied Mathematics*. 1953. V. 19. No. 4. Pp. 347–358.
90. Foulkes J. The minimum weight design in structural frames. *Proc. Royal Society*. 1954. V. A223. No. 1155. Pp. 482–484.
91. Fox R.L. Constraint surface normals for structural synthesis techniques. *AIAA Journal*. 1965. V. 3. Pp. 1516–1517.
92. Fox R.L., Kapoor M.P. Rates of change of eigenvalues and eigenvectors. *AIAA Journal*. 1968. V. 6. Pp. 2426–2429.
93. Fox R.L., Miura H. An approximate analysis technique for design calculations. *AIAA Journal*. 1971. V. 9. Pp. 177–179.
94. Galileo Galilei. Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla meccanica e i movimenti locali. Leida : Appresso gli Elseviri, 1638.
95. Gallagher R.H. Fully-stressed design. Optimum structural design. Theory and applications. London : John Wiley and Sons, 1973.
96. Gellatly B.A., Gallagher R.H. Procedure for automated minimum weight structural design. *Aeronaut Quarterly*. 1966. V. 14. Pp. 332–342.
97. Gerber G.H. Balkenträger mit freiliegenden Stützpunkten Bavarian patent, 1866.
98. Gruver W.A., Shafroth C. Gradient projection and reduced gradient algorithms based on an augmented Lagrange. Proceedings of Operations Research Society of American Natural Convention, Philadelphia, 1976.
99. Grycz J. O przekształceniach ustroju szterowozłowego przez wymianę pretów. *Rozprawy Inżynierskie*. 1960. No. 1.
100. Heilmann H. Beitrag zur Berechnung statisch unbestimmter Fachwerke. Berlin, 1928. 24 p.
101. Heinzerling A. Theorie und Berechnung der gestützten und aufgehängten Charnierbrückenträger. *Der Civiling*, 1867. V. 13.
102. Hemp W.S. Theory of structural design. Cranfield College of Aeronautics, 1958, COA Report, No. 115.
103. Heyman J. Plastic design of beam and plate frames for minimum material consumptions. *Quarterly of Applied Mathematics*. 1951. V. 8. No. 4. Pp. 373–381.
104. Hofmeister L., Felton L. Prestressing in structural synthesis. *AIAA Journal*. 1970. V. 8. No. 2. Pp. 363–364.
105. Hooke R. Lectures de potentia restitutiva, or of spring explaining the power of springing bodies. London : John & Martin Printer to the Royal Society, 1678.
106. Hopkins H.G., Prager W. Limits of economy of material in plates. *Journal of Applied Mechanics*. 1955. V. 22. No. 3. Pp. 372–374.
107. Kalaba R. Design of minimal weight structures for given reliability and cost. *Journal of Aerospace Science*. 1962. V. 29. No. 3.

108. Klein B. Further remarks on the direct use of extremal principles in solving certain optimizing problem involving inequalities. *Journal of the Operations Research Society of America*. 1955. V. 3. Pp. 548–554.
109. Klusalaas J. Minimum weight design of structures via optimality criteria. NASA Technical Notes D-71715, 1972.
110. Kohn, R.V., Strang G. Optimal design and relaxation of variational problems. *Communic. Pure and Appl. Math.* 1986. V. 39. Pp. 113–137 (pt. 1), Pp. 139–182 (pt. 2), Pp. 333–350 (pt. 3).
111. Lagrange J.-L. Sur la figure des collonnes. *Mesclane Taurinensia*. V. 5. Pp. 1770–1773. P. 123.
112. Legay. Memoire sur la trace et le calcul des voates en maconnerie. *Annales des Ponts et Chaussees*. 1900. No. 4. Pp. 19–34.
113. Levy M. La statique graphique et ses applicatuions aux constructions. IV partie. Paris, 1874.
114. Masur E.F. Optimum stiffness and strength of elastic structures. *Journal of the Engineering Mechanics Division*. Proceeding of ASCE, 1970. V. 96. No. EM5. Pp. 621–640.
115. Maxwell J.C. Scientific papers II. Cambridge : Univer Press, 1869. Pp. 175–177.
116. Michell A. The limits of economy in frame-structures. *Phyl. Mag.* 1904. V. 8. No. 47. Pp. 589–597.
117. Moses F., Onoda S. Minimum weight design of structures with application to elastic grillages. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*. 1966. V. 1. No. 4. Pp. 311–331.
118. Noor A.K., Lowder H.E. Approximate techniques of structural reanalysis. *Computer and Structures*. 1974. V. 4. Pp. 801–812.
119. Palmer A. Optimal structural design by dynamic programming. *Journal of Structural Division*. Proceeding ASCE, 1968. No. ST8.
120. Pearson C.E. Structural design by high-speed computing machines. Conf. Electronic Computation of ASCE, Kansas-City, 1958.
121. Pearson C.W. Structural design by high speed computing machines. *Proc. 1st Conf. Electronic Computation*, ASCE, New York, 1958. Pp. 417–436.
122. Perelmuter A., Yurchenko V. Parametric optimization of steel shell towers of high-power wind turbines. *Procedia Engineering*. 2013. V. 57. Pp. 895–905.
123. Pippard A.J.S. On a method for the direct design of framed structures, having redundant bracing. Aeronautical Research Committee, Reports and Memoranda, 1922. No. 793.
124. Pope .G., Schmit L.A. Structural design applications of mathematical programming techniques. AGARD-AG-149-71. North Atlantic Treaty Organization, Rue Ancelle 9Z, Neuilly-Sur-Seine, France. 1971.
125. Prager W. Minimum-weight design of a portal frame. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, 1956. V. 82. No. EM4. Pp. 1073-1... 1073-10.
126. Prager W. Introduction to structural optimization. Springer-Verlag, Vienna, 1974.
127. Prager W., Taylor J.E. Problems of optimal structural design . *Journal of Applied Mechanics*. 1968. V. 35. No. 1. Pp. 102–106.
128. Prager W., Rozvany G.I.N. Optimization of the structural geometry. Dynamical Systems. *Proc. Int. Conf. Gainesville, Florida*. New York : Academic Press, 1977. P. 265–293.
129. Razani R. Behavior of fully stressed design of structures and its relationship to minimum-weight design. *AIAA Journal*. 1965. V. 3. No. 12. Pp. 2262–2268.
130. Reinschmidt K.F., Cornell C.A., Brothie J.F. Iterative design and structural optimization. *Journal of Structural Division*. ASCE. 1966. No. ST6.
131. Rozvany G.I.N. Optimal design of flexural systems: beams, grillages, slabs, plates and shells. Oxford: Pergamon Press, 1976.
132. Salimbeni. Degli archi e delle volte. Verona, 1787. 320 p.
133. Schmidt L.C. Fully-stressed design of elastic redundant trusses under alternative load systems. *Australian J. Appl. Sci.* 1958. No. 9. Pp. 337–348.
134. Schmit L.A. Structural design by systematic synthesis. *Proc. 2nd Nat. Conf. Electronic Computation*. American Society of Civil Engineers, New York, 1960. Pp. 105–132.
135. Schmit L.A. Structural design by systematic synthesis, *Proc. 2nd ASCE Conf. Electronic Computation*. New York : ASCE, 1960. Pp. 105–132.
136. Schmit L.A., Fleury C. Structural synthesis by combining approximation concepts and dual methods. *AIAA Journal*. 1980. V. 18. Pp. 1252–1260.

137. *Strang G., Kohn R.* Henky-Prandtl nets and constrained Michell trusses. *Comp. Meth. in Appl. Mech. Eng.* 1983. V. 36. No. 2. Pp. 207–222.
138. *Toakley A.R.* Optimum design using available sections. *Journal of Structural Division*. Proceeding ASCE, 1968. No. ST5.
139. *Turner H.K., Plaut R.H.* Optimal design for stability under multiple loads. Proceeding ASCE, 1980. V. 106. Pp. 1365–1382.
140. *Venkayya V.B.* Design of optimum structures. *Computer and Structures*. 1971. V. 1. No. 1–2. Pp. 265–309.
141. *Villarceau.* Sur l'établissement des arches de point, envisage de point de vue de la plus grande stable. *Comp. Rend. de l'Acad. des Science de Paris*. 1846. V. 3. No. 9.
142. *Wasiutynski Z.* O kształtowaniu wytrzymałościowym Warszawa : Academia Nauk Technicznych, 1939.
143. *Wasiutynski Z.* On the congruency of the forming according to the minimum potential energy with that according to the equal strength. *Bull. Acad. Pol. Sci. Tech.* 1960. V. 8. No. 6. Pp. 259–268.
144. *Wasiutynski Z.* O przekształcaniu kratownic przez wprowadzenie nowych pretów. *Inz. Budow.* 1950. No. 11.
145. *Young T.* Course of lectures on natural philosophy, 1807.