

# СТРОИТЕЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ, ЗДАНИЯ И СООРУЖЕНИЯ

УДК 624.04

DOI: 10.31675/1607-1859-2021-23-4-57-68

П.А. АКИМОВ<sup>1</sup>, Л.С. ЛЯХОВИЧ<sup>2</sup>,

<sup>1</sup>Национальный исследовательский

Московский государственный строительный университет,

<sup>2</sup>Томский государственный архитектурно-строительный университет

## ПРИЦЕЛЬНОЕ РЕГУЛИРОВАНИЕ СПЕКТРА ЧАСТОТ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГИХ ПЛАСТИН С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ МАСС ПУТЁМ ВВЕДЕНИЯ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ОБОБЩЁННЫХ СВЯЗЕЙ И ОБОБЩЁННЫХ КИНЕМАТИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВ

Каждая обобщённая прицельная связь *увеличивает* лишь одну выбранную собственную частоту до заранее заданного значения, не изменяя при этом остальные собственные частоты и все формы собственных колебаний. Каждое обобщённое кинематическое устройство *уменьшает* величину лишь одной выбранной собственной частоты до заранее заданного значения, не изменяя при этом остальные собственные частоты и все формы собственных колебаний.

К настоящему времени для некоторых упругих систем с конечным числом степеней свободы масс, у которых *направления движения масс параллельны и лежат в одной плоскости*, разработаны методы создания дополнительных связей и обобщённых кинематических устройств, прицельно изменяющих спектр частот собственных колебаний. В частности, для стержней разработаны теория и алгоритм формирования прицельных дополнительных связей и обобщённых кинематических устройств.

В статье показано, что метод формирования матрицы дополнительных коэффициентов жесткости, характеризующих прицельную связь, и матрицы учета действия дополнительных инерционных сил в задаче о собственных колебаниях стержней может быть применен и при решении аналогичной задачи для упругих систем с конечным числом степеней свободы, у которых *направления движения масс параллельны, но не лежат в одной плоскости*. В частности, к таким системам относятся пластины.

Вместе с тем алгоритмы формирования прицельных дополнительных связей и обобщённых кинематических устройств, разработанные для стержней на основе свойств верёвочных многоугольников, не могут быть без существенных изменений использованы в аналогичной задаче для пластин.

Метод формирования расчётных схем связей и кинематических устройств, прицельно изменяющих спектр частот собственных колебаний упругих пластин с конечным числом степеней свободы масс, представляет собой отдельную задачу и будет рассмотрен в следующей работе.

**Ключевые слова:** частота собственных колебаний; форма собственных колебаний; обобщённая прицельная дополнительная связь; коэффициенты жесткости; инерционные силы; обобщённое прицельное кинематическое устройство.

*Для цитирования:* Акимов П.А., Ляхович Л.С. Прицельное регулирование спектра частот собственных колебаний упругих пластин с конечным числом степеней свободы масс путём введения дополнительных обобщённых связей и обобщённых кинематических устройств // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. 2021. Т. 23. № 4. С. 57–68.  
DOI: 10.31675/1607-1859-2021-23-4-57-68

P.A. AKIMOV<sup>1</sup>, L.S. LYAKHOVICH<sup>2</sup>,

<sup>1</sup>The National Research Moscow State University of Civil Engineering,

<sup>2</sup>Tomsk State University of Architecture and Building

## PRECISION CONTROL FOR EIGEN-FREQUENCY OF ELASTIC PLATES WITH FINITE NUMBER OF MASS DEGREES OF FREEDOM BY USING ADDITIONAL GENERALIZED CONNECTIONS AND KINEMATIC DEVICES

Each generalized precision connection increases only one value of eigen-frequency prior to a specified value, without changing the remaining eigen-frequencies and all natural modes. Each generalized kinematic device reduces only one value of selected eigen-frequency prior to a specified value, without changing the remaining eigen-frequencies and all natural modes.

The methods of creating the additional connections and generalized kinematic devices that precisely change the eigen-frequency are developed for elastic systems with a finite number of degrees of freedom of masses, whose motion directions are parallel and lie in one plane. In particular, the theory and algorithm of formation of additional connections and generalized kinematic devices are developed for rods.

It is shown that the method of forming the matrix of additional stiffness coefficients describing the precision connection and a matrix of the additional inertial forces in the problem of eigen-frequency of rods, can be applied to solve a similar problem for elastic systems with a finite number of degrees of freedom of masses, whose directions of motion are parallel, but do not lie in one plane, in particular plates.

The developed algorithms for the formation of additional precision connections and generalized kinematic devices in rods based on the properties of string polygons cannot be used without significant changes in the similar problem for plates.

The development of connection schemes and kinematic devices that precisely change the eigen-frequency of elastic plates with the finite number of degrees of freedom of masses will be studies in future research.

**Keywords:** eigen-frequency; natural mode; additional generalized precise connection; stiffness coefficient; inertial forces; generalized kinematic device.

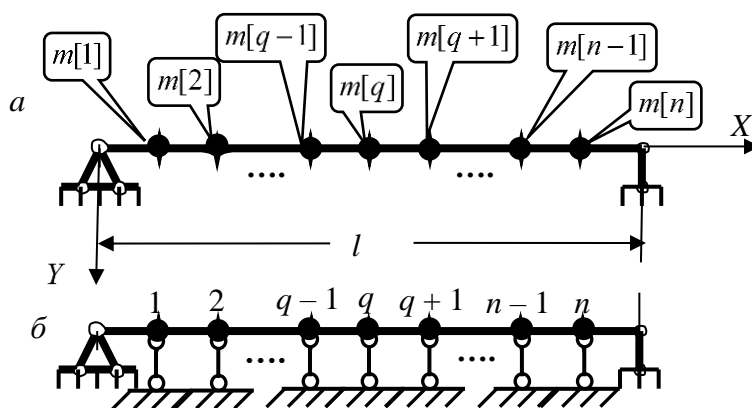
*For citation:* Akimov P.A., Lyakhovich L.S. Pritsel'noe regulirovanie spektra chastot sobstvennykh kolebaniy uprugikh plastin s konechnym chislom stepenei svobody mass putem vvedeniya dopolnitel'nykh obobshchennykh svyazei i obobshchennykh kinematicheskikh ustroystv [Precision control for eigen-frequency of elastic plates with finite number of mass degrees of freedom by using additional generalized connections and kinematic devices]. Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta – Journal of Construction and Architecture. 2021. V. 23. No. 4. Pp. 57–68.  
DOI: 10.31675/1607-1859-2021-23-4-57-68

При проектировании сооружений в некоторых случаях появляется необходимость вывести одну или несколько собственных частот из опреде-

лённого частотного интервала. Как известно (см., например, [1–6]), одним из методов решения такой задачи является создание прицельных обобщенных связей и обобщенных кинематических устройств.

В упомянутых выше работах для упругих стержней, несущих конечное количество сосредоточенных масс (например, таких, как на рис. 1, *а*), разработан метод создания прицельных связей. Выбиралась основная система метода перемещений (рис. 1, *б*). Уравнения метода перемещений записывались в виде, традиционном для систем с конечным числом степеней свободы ( $n$ ):

$$\begin{aligned} & (r[1,1] + m[1]\omega^2)v[1,j] + r[1,2]v[2,j] + \dots + r[1,q]v[q,j] + \dots + r[1,n]v[n,j] = 0, \\ & r[2,1]v[1,j] + (r[2,2] + m[2]\omega^2)v[2,j] + \dots + r[2,q]v[q,j] + \dots + r[2,n]v[n,j] = 0, \\ & \dots\dots\dots(1) \\ & \dots\dots\dots \\ & r[n,1]v[1,j] + r[n,2]v[2,j] + \dots + r[n,q]v[q,j] + \dots + (r[n,n] + m[n]\omega^2)v[n,j] = 0. \end{aligned}$$



*Puc. 1*

В (1) величины  $r[i, k]$  образуют матрицу коэффициентов жесткости  $A = \|r[i, k]\|$ ;  $m[i]$  – величины масс образуют диагональную матрицу  $M = \|m[i]\|$ ;  $\omega$  – частота собственных колебаний системы;  $v[k, j]$  – перемещения по направлению движения масс в  $j$ -й ( $j = 1, 2, \dots, q, \dots, n$ ) форме собственных колебаний.

### Корни уравнения

$$\left|A-\omega^2 \cdot M\right|=0 \quad (2)$$

определяют спектр частот собственных колебаний системы

$$\omega[1], \omega[2], \dots, \omega[q-1], \omega[q], \omega[q+1], \dots, \omega[n]. \quad (3)$$

Рассматривалась задача создания прицельной обобщенной связи, увеличивающей только одну частоту собственных колебаний (например,  $\omega[q]$ ) до

заранее заданного значения ( $\omega_S$ ) и не изменяющей ни одной из форм собственных колебаний и величин остальных частот спектра. Показано, что создание такой связи основано на формировании матрицы дополнительных коэффициентов жесткости

$$A_0 = A_{SO} \cdot A_S = A_{SO} \|a_0[i, k]\|_{i,k=1}^n, \text{ где } A_S = \|a_0[i, k]\|_{i,k=1}^n. \quad (4)$$

Матрица  $A_0$  должна обладать особыми свойствами. Если вводимая связь «нацелена» на  $q$ -ю частоту собственных колебаний, то коэффициенты жесткости  $\|a_0[i, k]\|_{i,k=1}^n$  должны быть ортогональны координатам форм собственных колебаний остальных  $(n-1)$  частот спектра, т. е.

$$\sum_{k=1}^n a_0[i, k]v[k, j] = 0, \quad (i=1, 2, \dots, n, j=1, 2, \dots, (q-1), (q+1), \dots, n). \quad (5)$$

По отношению к  $q$ -й собственной частоте, на которую «нацелена» вводимая связь, коэффициенты не ортогональны, т. е.

$$\sum_{k=1}^n a_0[i, k]v_\omega[k, q] \neq 0, (i=1, 2, \dots, n), (i=1, 2, \dots, n). \quad (6)$$

Показано (например, [2–5]), что условиям (5) и (6) будут удовлетворять коэффициенты

$$a_0[i, k] = m[i]m[k]v_\omega[i, q]v_\omega[k, q]. \quad (7)$$

Величина множителя  $A_{SO}$  определяется как корень уравнения

$$\left| (A - \omega_S^2 \cdot M) + A_{SO} \cdot A_S \right| = 0. \quad (8)$$

Так как  $q$ -я форма собственных колебаний исходной системы остается собственной формой и после введения прицельной связи, и при частоте  $\omega_S$ , множитель  $A_{SO}$  может находиться как

$$A_{SO} = \frac{-\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n (a[i, k] - \omega_S^2 \cdot m[i, k])v_\omega[i, q]v_\omega[k, q]}{\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_0[i, k]v_\omega[i, q]v_\omega[k, q]}. \quad (9)$$

Результат решения уравнения

$$\left| (A + A_{SO} \cdot A_S) - \omega^2 \cdot M \right| = 0 \quad (10)$$

должен подтвердить, что формы собственных колебаний не изменились, а «прицельная» частота увеличилась до  $\omega_S$ .

Опорное устройство, которому будет соответствовать матрица дополнительных коэффициентов жесткости  $A_0$ , должно обеспечить соотношение между узловыми перемещениями такое же, как между координатами  $q$ -й формы собственных колебаний исходной системы. Показано (см., например,

[2–5]), что такое соотношение будет реализовано, если дополнительная опорная система передаст в узлы основной системы стержня усилия, соотношения между которыми пропорциональны величинам

$$R_0[i] = m[i]v[i, (q)] . \quad (11)$$

Примером такой обобщённой прицельной связи для стержня является шпренгель, очертание которого определяется веревочным многоугольником, построенным в плоскости движения масс по усилиям  $R_0[i]$  (см., например, [2–5]).

Такая связь *один раз статически неопределима. Стойки связи установлены в узлах основной системы по направлению движения масс. Предварительное напряжение одного любого стержня вызовет такие усилия в стойках шпренгеля, соотношения между которыми будут такими же, как и соотношения между усилиями  $R_0[i]$ .*

В настоящей статье рассматривается задача создания прицельных связей для упругих пластин, несущих конечное число сосредоточенных масс. Как и в аналогичной задаче для стержней, предлагается использовать основную систему метода перемещений. Примеры такой пластины и соответствующей ей основной системы метода перемещений приведены на рис. 2, а и б.

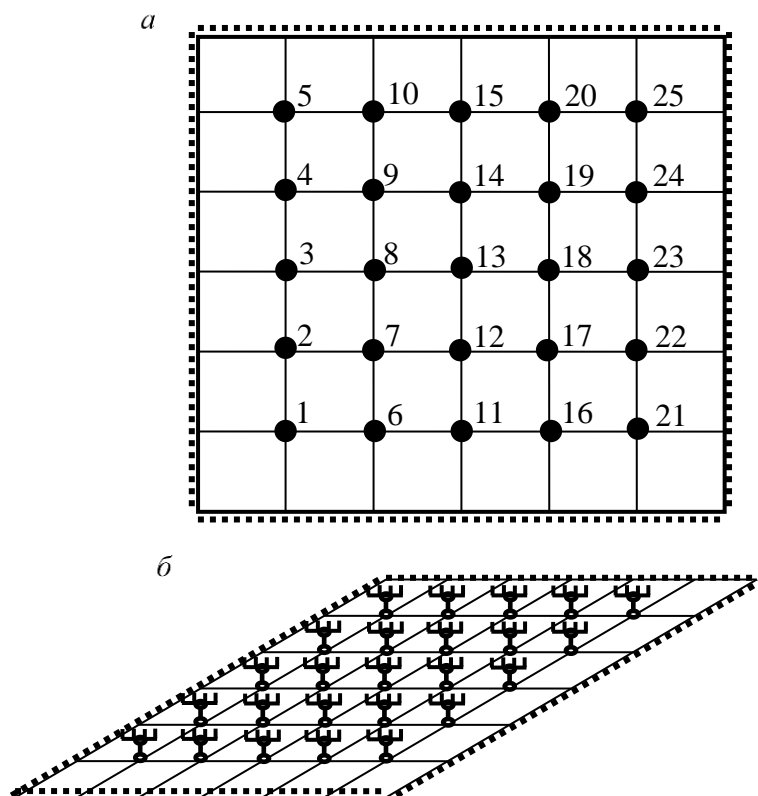


Рис. 2

Если принять в методе перемещений для пластин одномерную нумерацию, то уравнения в этом случае также запишутся в виде (1). Дополнительные связи в основной системе и перемещения  $v[k, j]$  в уравнениях отвечают направлению движения масс.

Вывод выражений коэффициентов матрицы дополнительных жесткостей (4) для стержней основан на свойствах форм собственных колебаний.

Так как формы собственных колебаний пластин, так же как и для стержней, ортогональны, т. е.

$$\sum_{k=1}^n m[k] v_{\omega}[k, q] v_{\omega}[k, j] = 0 \quad (q \neq j), \quad (12)$$

то задача для упругих пластин, несущих конечное число сосредоточенных масс, так же как и для стержней, будет основана на формировании матрицы дополнительных коэффициентов жесткости (4). Коэффициенты  $\|a_0[i, k]\|_{i,k=1}^n$  также должны удовлетворять условиям (5) и (6) и определяться зависимостями (7).

Приведём пример, подтверждающий, что матрица дополнительных коэффициентов жесткости (4) служит основанием для создания прицельных связей и для упругих пластин, несущих конечное число сосредоточенных масс.

Рассмотрим пластину, несущую 25 сосредоточенных масс (рис. 1, а). В узле 9 величина массы – 600 кг, в узле 18 – 1000 кг, а в остальных узлах – по 800 кг. Размеры пластины в плане 6×6 м, толщина 0,12 м. Модуль упругости материала пластины  $E = 24\,000\,000\,000$  н/м<sup>2</sup>. Коэффициент Пуассона  $\nu_0 = 0,2$ . При основной системе метода перемещений (рис. 2, б) и одномерной нумерации значений  $v[k, j]$  в соответствии с рис. 2, а определяется спектр частот собственных колебаний, как корни уравнения (2). Величины первых пяти частот собственных колебаний пластины и координаты соответствующих им собственных форм приведены в табл. 1 (столбцы – начальные частоты и формы).

Таблица 1

	Начальные частоты и формы					Изменённые частоты и формы				
$\omega$	36,6583	91,0084	92,7466	146,834	178,911	91,0084	92,7466	100,00	146,8337	178,911
1	0,0830	0,1995	0,0499	–0,2495	0,1547	–0,1995	–0,0499	0,0830	–0,2495	0,1547
2	0,1434	0,2935	–0,0043	–0,2433	–0,0063	–0,2935	0,0043	0,1434	–0,2433	–0,0063
3	0,1649	0,2568	–0,1468	0,0129	–0,1657	–0,2568	0,1468	0,1649	0,0129	–0,1657
4	0,1420	0,1514	–0,2494	0,2641	–0,0063	–0,1514	0,2494	0,1420	0,2641	–0,0063
5	0,0818	0,0579	–0,1971	0,2624	0,1548	–0,0579	0,1971	0,0818	0,2624	0,1548
6	0,1441	0,2533	0,1398	–0,2517	0,2788	–0,2533	–0,1398	0,1441	–0,2517	0,2788
7	0,2492	0,3484	0,0840	–0,2447	0,0003	–0,3484	–0,0840	0,2492	–0,2447	0,0003
8	0,2867	0,2601	–0,1502	0,0123	–0,2788	–0,2601	0,1502	0,2867	0,0123	–0,2788
9	0,2468	0,1025	–0,3415	0,2593	0,0003	–0,1025	0,3415	0,2468	0,2593	0,0003
10	0,1423	0,0090	–0,2912	0,2642	0,2789	–0,0090	0,2912	0,1423	0,2642	0,2789
11	0,1672	0,1467	0,2455	–0,0058	0,3359	–0,1467	–0,2455	0,1672	–0,0058	0,3359
12	0,2895	0,1491	0,2411	–0,0017	0,0088	–0,1491	–0,2411	0,2895	–0,0017	0,0088

Окончание табл. 1

	Начальные частоты и формы					Изменённые частоты и формы				
13	0,3336	0,0082	-0,0119	0,0070	-0,3237	-0,0082	0,0119	0,3336	0,0070	-0,3237
14	0,2877	-0,1313	-0,2630	0,0124	0,0088	0,1313	0,2630	0,2877	0,0124	0,0088
15	0,1657	-0,1331	-0,2605	0,0131	0,3359	0,1331	0,2605	0,1657	0,0131	0,3359
16	0,1454	0,0007	0,2856	0,2417	0,3025	-0,0007	-0,2856	0,1454	0,2417	0,3025
17	0,2522	-0,0908	0,3339	0,2415	0,0119	0,0908	-0,3339	0,2522	0,2415	0,0119
18	0,2915	-0,2485	0,1317	-0,0018	-0,2941	0,2485	-0,1317	0,2915	-0,0018	-0,2941
19	0,2513	-0,3314	-0,1103	-0,2446	0,0118	0,3314	0,1103	0,2513	-0,2446	0,0118
20	0,1446	-0,2398	-0,1592	-0,2432	0,3025	0,2398	0,1592	0,1446	-0,2432	0,3025
21	0,0842	-0,0528	0,1956	0,2437	0,1811	0,0528	-0,1956	0,0842	0,2437	0,1811
22	0,1461	-0,1445	0,2454	0,2416	0,0151	0,1445	-0,2454	0,1461	0,2416	0,0151
23	0,1688	-0,2486	0,1349	-0,0059	-0,1580	0,2486	-0,1349	0,1688	-0,0059	-0,1580
24	0,1457	-0,2827	-0,0135	-0,2517	0,0151	0,2827	0,0135	0,1457	-0,2517	0,0151
25	0,0838	-0,1910	-0,0633	-0,2494	0,1811	0,1910	0,0633	0,0838	-0,2494	0,1811

Пусть теперь требуется увеличить значение первой частоты собственных колебаний до  $100 \text{ с}^{-1}$ . Для этого в соответствии с (7), (8), (9) сформируем матрицу дополнительных коэффициентов жесткости. Все данные, необходимые для использования зависимостей (7), (8), (9), приведены в описании пластины и в табл. 1 (столбцы – начальные частоты и формы).

После формирования матрицы дополнительных коэффициентов жесткости с учётом их влияния определяем из уравнения (10) изменённый спектр собственных частот и соответствующие им формы колебаний.

Первые пять собственных частот и соответствующих им форм приведены в табл. 1 (столбцы – изменённые частоты и формы).

Из данных таблицы видно, что учёт дополнительных коэффициентов жесткости не изменил ни одной из форм собственных колебаний пластины, а лишь увеличил значение одной из частот с  $36,6583 \text{ с}^{-1}$  до заданной величины  $100 \text{ с}^{-1}$ . Этот результат наглядно иллюстрирует возможность использования зависимостей (4), (7), (8), (9) и для решения задачи о прицельных связях для упругих пластин с конечным числом степеней свободы масс.

Обобщённая прицельная связь для пластины, так же как и для стержня, должна создавать дополнительную жесткость, обеспечивающую прицельность связи.

Как отмечалось выше, свойства прицельных связей для стержней основаны на свойствах форм собственных колебаний. Используемые при этом свойства относятся и к упругим пластинам. Это обстоятельство служит обоснованием для использования результатов формулирования свойств прицельных связей для стержней и в аналогичной задаче для пластин.

Таким образом, для упругой пластины с конечным числом степеней свободы масс обобщённой прицельной связи должна соответствовать матрица дополнительных коэффициентов жесткости  $A_0$  (4). Если рас-

чётная схема связи представлена вариантом шарнирно-стержневой системы, то она должна быть один раз статически неопределима, в узлах пластины, где размещены массы, по направлению движения масс устанавливаются стойки, а предварительное напряжение одного любого элемента связи вызывает такие усилия в стойках системы, соотношения между которыми пропорциональны соотношениям между усилиями  $R_0[i]$  (11). При этом в структуре связи не должно быть никаких соединений с пластиной, кроме стоек, установленных в узлах пластины, где размещены массы.

Рассмотрим теперь задачу об обобщенных кинематических устройствах. В [4, 5] для стержней показано, что кинематическое устройство с одной степенью активности передаёт на сооружение обобщенную прицельную инерционную силу, которая уменьшает величину только одной частоты собственных колебаний до заданного значения  $\omega_S$ , оставляя остальные частоты спектра без изменения. Устройство формируется на основе матрицы учета действия дополнительных инерционных сил:

$$M_0 = M_{m0} \cdot M_m, \text{ где } M_m = \|m_0[i, k]\|_{i,k=1}^n. \quad (13)$$

Матрица  $M_0$  должна обладать особыми свойствами. Если вводимое кинематическое устройство «нацелено» на  $q$ -ю частоту собственных колебаний, то коэффициенты матрицы  $M_m - \|m_0[i, k]\|_{i,k=1}^n$  должны быть ортогональны координатам форм собственных колебаний остальных частот спектра, т. е.

$$\sum_{k=1}^n m_0[i, k] v_\omega[k, j] = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, q-1, q+1, \dots, n). \quad (14)$$

По отношению к  $q$ -й частоте собственных колебаний, на которую «нацелено» кинематическое устройство

$$\sum_{k=1}^n m_0[i, k] v[k, q] \neq 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (15)$$

В [4, 5] показано, что условиям (14) и (15) будут удовлетворять коэффициенты

$$m_0[i, k] = m[i] m[k] v_\omega[i, q] v_\omega[k, q]. \quad (16)$$

Величина множителя  $M_{m0}$  находится как корень уравнения

$$\left| (A - \omega_S^2 \cdot M) - M_{m0} (\omega_S^2 \cdot M_m) \right| = 0. \quad (17)$$

Учитывая, что  $q$ -я форма собственных колебаний остается собственной формой и при частоте  $\omega_S$ , множитель  $M_{m0}$  может находиться как

$$M_{m0} = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n (a[i, k] - \omega_S^2 \cdot m[i, k]) v_\omega[i, (q)] v_\omega[k, (q)]}{\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \omega_S^2 \cdot m_0[i, k] v_\omega[i, (q)] v_\omega[k, (q)]}. \quad (18)$$



Результат решения уравнения

$$\left| A - \omega^2 (M + M_{m0} \cdot M_m) \right| = 0 \quad (19)$$

должен подтвердить, что формы собственных колебаний не изменились, а «прицельная» частота уменьшилась до  $\omega_S$ .

Кинематическое устройство, которому будет соответствовать матрица коэффициентов учета действия дополнительных инерционных сил  $M_0 = M_{m0} \cdot M_m$ , где  $M_m = \|m_0[i, k]\|_{i,k=1}^n$ , должно обеспечить соотношение между узловыми перемещениями такое же, как между координатами  $q$ -й формы собственных колебаний исходной системы. В [4, 5] также показано, что такое соотношение будет реализовано, если кинематическое устройство передаст в узлы инерционные силы, соотношения между которыми будут пропорциональны соотношениям между усилиями  $R_0[i] = m[i]v_{\omega}[i, q]$  (11).

Примером такой обобщённой прицельной кинематической системы для стержня является шпренгель, очертание которого определяется веревочным многоугольником, построенным в плоскости движения масс по усилиям  $R_0[i]$  (например, [4, 5]).

Вывод выражений коэффициентов матрицы учета действия дополнительных инерционных сил (13) для стержней основан на использовании метода перемещений в традиционной форме и свойствах форм собственных колебаний.

Так как формы собственных колебаний пластин, так же как и для стержней, ортогональны, то задача для упругих пластин, несущих конечное число сосредоточенных масс, так же как и для стержней, будет основана на формировании матрицы учета действия дополнительных инерционных сил. Коэффициенты  $\|m_0[i, k]\|_{i,k=1}^n$  также должны удовлетворять условиям (14) и (15) и определяться зависимостями (16).

На рассмотренном выше примере о собственных колебаниях пластины (см. рис. 2) проведём иллюстрацию формирования матрицы учета действия дополнительных инерционных сил как основу для создания прицельных кинематических устройств и для упругих пластин, несущих конечное число сосредоточенных масс. Данные, характеризующие пластину, приведены выше. Величины первых пяти частот собственных колебаний пластины и координаты соответствующих им собственных форм приведены в табл. 1 (столбцы – начальные частоты и формы).

Допустим, что требуется расширить интервал между четвёртой и пятой частотами собственных колебаний за счёт уменьшения величины четвёртой частоты со  $146,834 \text{ с}^{-1}$  до  $110 \text{ с}^{-1}$ . Для этого в соответствии с (14), (15), (16) сформируем матрицу учета действия дополнительных инерционных сил. Данные, необходимые для использования зависимостей (14), (15), (16), приведены в описании пластины и в табл. 1 (столбцы – начальные частоты и формы).

После формирования матрицы действия дополнительных инерционных сил с учётом их влияния определяем из уравнения (19) изменённый спектр собственных частот и соответствующие им формы колебаний.

Первые пять собственных частот и соответствующих им форм приведены в табл. 2.

Из данных табл. 2 видно, что учёт дополнительных коэффициентов жесткости не изменил ни одной из форм собственных колебаний пластины, а лишь уменьшил значение одной из частот с  $146,834 \text{ с}^{-1}$  до заданной величины  $110 \text{ с}^{-1}$ . Этот результат наглядно иллюстрирует возможность использования зависимостей (14), (15), (16) и для решения задачи об обобщенном кинематическом устройстве связей для упругих пластин с конечным числом степеней свободы масс.

Таблица 2

$\omega$	36,6583	91,0084	92,7466	110,0000	178,9109
1	0,0830	-0,1995	-0,0499	0,2495	-0,1547
2	0,1434	-0,2935	0,0043	0,2433	0,0063
3	0,1649	-0,2568	0,1468	-0,0129	0,1657
4	0,1420	-0,1514	0,2494	-0,2641	0,0063
5	0,0818	-0,0579	0,1971	-0,2624	-0,1548
6	0,1441	-0,2533	-0,1398	0,2517	-0,2788
7	0,2492	-0,3484	-0,0840	0,2447	-0,0003
8	0,2867	-0,2601	0,1502	-0,0123	0,2788
9	0,2468	-0,1025	0,3415	-0,2593	-0,0003
10	0,1423	-0,0090	0,2912	-0,2642	-0,2789
11	0,1672	-0,1467	-0,2455	0,0058	-0,3359
12	0,2895	-0,1491	-0,2411	0,0017	-0,0088
13	0,3336	-0,0082	0,0119	-0,0070	0,3237
14	0,2877	0,1313	0,2630	-0,0124	-0,0088
15	0,1657	0,1331	0,2605	-0,0131	-0,3359
16	0,1454	-0,0007	-0,2856	-0,2417	-0,3025
17	0,2522	0,0908	-0,3339	-0,2415	-0,0119
18	0,2915	0,2485	-0,1317	0,0018	0,2941
19	0,2513	0,3314	0,1103	0,2446	-0,0118
20	0,1446	0,2398	0,1592	0,2432	-0,3025
21	0,0842	0,0528	-0,1956	-0,2437	-0,1811
22	0,1461	0,1445	-0,2454	-0,2416	-0,0151
23	0,1688	0,2486	-0,1349	0,0059	0,1580
24	0,1457	0,2827	0,0135	0,2517	-0,0151
25	0,0838	0,1910	0,0633	0,2494	-0,1811

Обобщённое кинематическое устройство для пластины, так же как и для стержня, должно создавать дополнительную обобщённую инерционную силу, обеспечивающую прицельность действия.

Как отмечалось выше, свойства кинематических устройств для стержней основаны на свойствах форм собственных колебаний. Такие же свойства относятся и к упругим пластинам. Это обстоятельство служит обоснованием

для использования результатов формулирования свойств кинематических устройств для стержней и в аналогичной задаче для пластин.

Таким образом, *для упругой пластины с конечным числом степеней свободы масс обобщённому кинематическому устройству должна соответствовать матрица учёта дополнительных инерционных сил  $M_0$  (13). Если расчётная схема связи представлена вариантом шарнирно-стержневой системы, то она должна быть с одной степенью активности, в узлах пластины, где размещены массы, по направлению движения масс устанавливаются стойки, а при колебаниях в стойках системы должны возникать усилия, соотношения между которыми пропорциональны соотношениям между усилиями  $R_0[i]$  (11). При этом в структуре связи не должно быть никаких соединений с пластиной, кроме стоек, установленных в узлах пластины, где размещены массы.*

Итак, в настоящей статье показано, что метод формирования матрицы дополнительных коэффициентов жесткости, определяющих прицельную связь, и метод формирования матрицы учёта дополнительных инерционных сил, определяющих прицельное кинематическое устройство, в задаче о собственных колебаниях стержней может быть применен и при решении аналогичных задач для упругих систем с конечным числом степеней свободы масс, у которых *направления движения масс параллельны, но не лежат в одной плоскости.*

В статье также обоснованы и сформулированы свойства и требования, которым должны соответствовать расчётные схемы прицельных связей и прицельных кинематических устройств в рассматриваемой задаче.

Расчетные схемы обобщенных прицельных связей и обобщённых кинематических устройств, отвечающие приведённым выше требованиям, многовариантны и зависят от очертания пластины, мест расположения масс и некоторых других особенностей исходного объекта. С учетом этих обстоятельств подходы и алгоритмы формирования соответствующих расчётных схем, прицельно изменяющих спектр частот собственных колебаний упругих пластин с конечным числом степеней свободы масс, представляют отдельную задачу и будут рассмотрены в следующей работе.

Основные результаты статьи представлены также в англоязычном варианте в [6 и 7].

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Нудельман Я.Л. Методы определения собственных частот и критических сил для стержневых систем. Москва : Гостехиздат, 1949. С. 175.
2. Нудельман Я.Л., Ляхович Л.С., Гитерман Д.М. О наиболее податливых связях наибольшей жесткости // Вопросы прикладной механики и математики. Томск : Изд-во ТГУ, 1981. С. 113–126.
3. Гитерман Д.М., Ляхович Л.С., Нудельман Я.Л. Алгоритм создания резонансно-безопасных зон при помощи наложения дополнительных связей // Динамика и прочность машин. Вып. 39. Харьков : Вища школа, 1984. С. 63–69.
4. Ляхович Л.С., Малеткин О.Ю. О прицельном регулировании собственных частот упругих систем // Известия вузов. Строительство и архитектура. 1990. № 1. С. 113–117.
5. Ляхович Л.С. Особые свойства оптимальных систем и основные направления их реализации в методах расчета сооружений. Томск : Изд-во Том. гос. арх.-строит. ун-та, 2009. 372 с.

6. *Lyakhovich L.S., Akimov P.A.* Aimed control of the frequency spectrum of eigenvibrations of elastic plates with a finite number of degrees of freedom of masses by superimposing additional constraints. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2021. V. 17. I. 2. P. 76–82.
7. *Akimov P.A., Lyakhovich L.S.* Aimed control of the frequency spectrum of eigenvibrations of elastic plates with a finite number of degrees of mass freedom by introducing additional generalized kinematic devices. // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2021. V. 17. I. 3. P. 14–20.

## REFERENCES

1. *Nudel'man Ya.L.* Metody opredeleniya sobstvennykh chastot i kriticheskikh sil dlya sterzhnevyykh system [Determination of eigen-frequencies and critical forces for rod systems]. Moscow: Gostekhizdat, 1949. 175 p. (rus)
2. *Nudel'man Ya.L., Lyakhovich L.S., Giterman D.M.* O naibolee podatlivykh svyazyakh naibol'shei zhestkosti [Most ductile connections of the greatest rigidity]. In: *Voprosy prikladnoi mekhaniki i matematiki*. Tomsk: TSU, 1981. Pp. 113–126. (rus)
3. *Giterman D.M., Lyakhovich L.S., Nudel'man Ya.L.* Algoritm sozdaniya rezonansno-bezopasnykh zon pri pomoshchi nalozheniya dopolnitel'nykh svyazei [Algorithm for creating resonance-safe zones by applying additional connections]. In: *Dinamika i prochnost' mashin*, vol. 39. Khar'kov: Vishcha shkola, 1984. Pp. 63–69. (rus)
4. *Lyakhovich L.S., Maletkin O.Yu.* O pritsel'nom regulirovanii sobstvennykh chastot uprugikh sistem [Precise analysis of eigen-frequencies of elastic systems]. *Izvestiya vuzov. Stroitel'stvo i arkhitektura*. 1990. No. 1. Pp. 113–117. (rus)
5. *Lyakhovich L.S.* Osobyie svoistva optimal'nykh sistem i osnovnye napravleniya ikh realizatsii v metodakh rascheta sooruzhenii [Specific properties of optimum systems and their use in structural analysis]. Tomsk: TSUAB, 2009. 372 p. (rus)
6. *Lyakhovich L.S., Akimov P.A.* Aimed control of the frequency spectrum of eigenvibrations of elastic plates with a finite number of degrees of freedom of masses by superimposing additional constraints. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2021. V. 17. No. 2. Pp. 76–82.
7. *Akimov P.A., Lyakhovich L.S.* Aimed control of the frequency spectrum of eigenvibrations of elastic plates with a finite number of degrees of mass freedom by introducing additional generalized kinematic devices. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2021. V. 17. No. 3. Pp. 14–20.

## Сведения об авторах

*Акимов Павел Алексеевич*, докт. техн. наук, академик РААСН, профессор, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, 26, pavel.akimov@gmail.com, AkimovPA@mgsu.ru

*Ляхович Леонид Семенович*, докт. техн. наук, академик РААСН, профессор, Томский государственный архитектурно-строительный университет, 634003, г. Томск, пл. Соляная, 2, lls@tsuab.ru, lsl@sibmail.com

## Authors Details

*Pavel A. Akimov*, DSc, Professor, Academician RAACS, The National Research Moscow State University of Civil Engineering, 26, Yaroslavl'skoe Road, 129337, Moscow, Russia, pavel.akimov@gmail.com, AkimovPA@mgsu.ru

*Leonid S. Lyakhovich*, DSc, Professor, Academician RAACS, Tomsk State University of Architecture and Building, 2, Solyanaya Sq., 634003, Tomsk, Russia, lls@tsuab.ru, lsl@sibmail.com